ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XXIV/XXV, 11 SECTIO AA 1969/1970

Z Katedry Fizyki Teoretycznej Wydziału Mat. Fiz. Chem. UMCS
Kierownik: doc. dr habil. Stanisław Szpikowski

Janina MARCIAK-KOZŁOWSKA,
Maksymilian PIŁAT

Podstawowe drgania napiętej prawie kołowej płyty

Основные колебания почти круговой напряженной пластины

Principal Vibrations of the Nearly-Circular Strained Plate

Wpływem niewielkich zmian kształtu brzegu na drgania membrany kołowej zajmował się już Lord Rayleigh [1]. Rozważano podobne zagadnienie dla membrany pierścieniowej i dla falowodów [2, 3]. Rozwiązano także ten problem dla prawie kołowej płyty, nie poddanej działaniu sił stycznych [4].

W tej pracy zbadano wpływ kształtu brzegu na drgania płyty poddanej izotropowym napięciom w płaszczyznach równoległych do powierzchni płyty. Obliczono podstawową częstość drgań i odkształcenie naciągniętej lub ściśniętej płyty prawie kołowej.

Rozważmy poprzeczne drgania płyty leżącej na płaszczyźnie $z = 0$ i zamocowanej na brzegu.

Równanie drgań takiej płyty jest następujące [5]:

$$\frac{h^2E}{12(1-\sigma^2)}\Delta^2\xi - \sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\xi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = -d\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \qquad (1)$$

gdzie h oznacza grubość płyty, d — jej gęstość, ξ — ugięcie, E jest modułem Younga, σ — współczynnikiem Poissona, $\sigma_{\alpha\beta}$ oznacza dwuwymiarowy tensor napięć, Δ zaś dwuwymiarowy operator Laplace'a.

Przy izotropowym rozciąganiu lub ściskaniu płyty siłami przyłożonymi do jej brzegu tensor napięć można zapisać następująco:

$$\sigma_{\alpha\beta} = T\delta_{\alpha\beta} + \sigma'_{\alpha\beta} \qquad (2)$$

gdzie T oznacza wartość napięcia przyłożonego do brzegu płyty, zaś $\sigma'_{\alpha\beta}$ — tensor napięć wywołany ugięciem P płyty. Przy małych ugięciach

$(|\xi| \ll h), \sigma'_{\alpha\beta}$ można pominąć wobec T i równanie drgań przyjmie postać:

$$\Delta^2\xi - \frac{12T(1-\sigma^2)}{h^2E}\Delta\xi + d\frac{12(1-\sigma^2)}{h^2E}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0 \tag{3}$$

Płytę możemy teraz traktować jako powierzchnię dwuwymiarową. Przy skrajnie dużych napięciach T można także pominąć wyraz pierwszy w równaniu (3), które po takim uproszczeniu opisywać będzie drgania membrany. Z uproszczenia tego korzystać nie będziemy.

Rozwiązania szukamy w postaci:

$$\xi = v(x,y)e^{i\omega t} \tag{4}$$

Podstawiając wyrażenie (4) do (3) otrzymamy po prostych przekształceniach następujące równanie na funkcję $v(x, y)$:

$$\left(\Delta + \lambda_1^2(\omega)\right)\left(\Delta + \lambda_2^2(\omega)\right) \cdot v = 0 \tag{5}$$

gdzie

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{\sigma(1-\sigma^2)}{h^2E}\left(T \pm \sqrt{T^2 + \frac{dh^2E}{3(1-\sigma^2)}\omega}\right) \tag{6}$$

Funkcja $v(x, y)$ musi spełniać zwykłe dla zamocowanej płyty warunki brzegowe:

$$v\big|_C = 0\,, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_C = 0 \tag{7}$$

gdzie C jest brzegiem płyty, zaś ν normalną do C leżącą w płaszczyźnie $z=0$.

Równanie (5) spełniają funkcje następujące:

$$J_n(\lambda_1 r)\,e^{in\varphi} \quad \text{oraz} \quad J_n(\lambda_2 r)\,e^{in\varphi} \tag{8}$$

gdzie n jest liczbą całkowitą, a $J_n(x)$ są funkcjami Bessela rzędu n.

Dla płyty kołowej o promieniu R, podstawowym rozwiązaniem równania (5) przy warunkach (7) jest:

$$v_0(r) = I'_0(k_1R)\,J_0(k_1r) - J'_0(k_1R)\,I_0(k_1r) \tag{9}$$

Oznaczyliśmy:

$$k_1 = \lambda_1(\omega_0)\,, \qquad k_2 = \lambda_2(\omega_0)\,, \qquad I_0(k_1r) = J_0(k_2r)$$

gdzie ω_0 jest podstawową częstością drgań płyty, tzn. najmniejszym dodatnim pierwiastkiem równania:

$$v_0(R) = 0 \tag{10}$$

Isteresujące jest, jak zmieni się k_1, a więc i podstawowa częstość drgań płyty ω_0, a także funkcja $v_0(r)$, opisująca wychylenie płyty, gdy brzeg płyty ulegnie niewielkiemu odkształceniu: Zagadnienie to sprowadza się do poszukiwania podstawowego rozwiązania równania (5) przy warunkach (7) danych na krzywej C o równaniu:

$$r = r_c = 1 + \rho(\varphi) \tag{11}$$

przy czym

$$|\rho(\varphi)| \ll 1 \quad \text{i} \quad \left|\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\right| \ll 1$$

Funkcję $\varrho(\varphi)$ przedstawimy w postaci szeregu:

$$\rho(\varphi) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\right) \tag{12}$$

Rozwiązania równania (5) dla obszaru $r(\varphi) \leqslant 1 + \varrho(\varphi)$ szukamy w postaci:

$$v = v_0(kr) - p(kr, \varphi) - q(kr, \varphi) \tag{13}$$

$$p(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(r)\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) + \sum_{n=0}^{\infty} I_n(r)\left(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi\right) \tag{14}$$

$$q(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(r)\left(A'_n \cos n\varphi + B'_n \sin n\varphi\right) + \sum_{n=0}^{\infty} I_n(r)\left(C'_n \cos n\varphi + D'_n \sin n\varphi\right) \tag{14}$$

$$\omega = \omega_0 + l + l' \tag{15}$$

$$k = \lambda_1(\omega) = k_1 + \alpha(l + l') + \beta l^2 \tag{16}$$

$$kr_c = k_1 + \alpha l + k_1\rho + \alpha l' + \beta l^2 + \alpha l\rho \tag{17}$$

gdzie l, A_n, B_n, C_n, D_n są, tak jak $\varrho(\varphi)$ wielkościami małymi rzędu pierwszego, zaś l', A'_n, B'_n, C'_n, D'_n — małymi rzędu drugiego, α, β — współczynniki rzędu jedności.

Z warunków brzegowych (7) wynikają następujące związki:

$$v\big|_c = v_0(k_1) + (\alpha l + k_1\rho + \alpha l' + \beta l^2 + \alpha l\rho)v'_0(k_1) + \frac{1}{2}(\alpha l + k_1\rho)^2 v_0(k_1) -$$

$$- p(k_1,\varphi) - (\alpha l + k_1\rho)\, p_r(k_1,\varphi) - q(k_1,\varphi) = 0 \tag{18}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_c = v'_0(k_1) + (\alpha l + k_1\rho + \alpha l' + \beta l^2 + \alpha l\rho)v''_0(k_1) + \frac{1}{2}\alpha l + k_1\rho)^2 v'''_0(k_1) -$$

$$- p_r(k_1,\varphi) - (\alpha l + k_1\rho)\, p_{rr}(k_1,\varphi) - q_r(k_1,\varphi) = 0 \tag{19}$$

gdzie

$$p_r(k_1,\varphi) = \left.\frac{\partial p(r,\varphi)}{\partial r}\right|_{r=k1} \quad \text{i podobnie wyraża się } q_r.$$

Wobec tego, że:

$$v_0(k_1) = v_0'(k_1) = 0 \tag{20}$$

wyrazy rzędu pierwszego w (18) i (19) dają:

$$p(k_1,\varphi) = 0$$

$$(\alpha l + k_1 \rho) v_0''(k_1) - p_r(k_1,\varphi) = 0 \tag{21}$$

Z ostatniego otrzymujemy na $p(r, \varphi)$ następujące wyrażenie:

$$p(r,\varphi) = w_0(k_1) + 2k_1 v_0''(k_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(r)}{w_n(k_1)} (a_n \operatorname{sos} n\varphi + b_n \sin n\varphi) \text{ i } \alpha l = -k_1 a_0 \tag{22}$$

gdzie $w_n(r) = J_n(r) I_n(k_1) - I_n(r) J_n(k_1)$

Wyrazy rzędu drugiego w (18) i (19) po uśrednieniu względem φ dają związki:

$$k_1^2 v_0''(k_1) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) + [J_0(k_1) A_0' + I_0(k_1) C_c'] = 0 \tag{23}$$

$$(\alpha l' + \beta l^2 - k_1 a_0^2) v_0''(k_1) + k_1^2 v_0'''(k_1) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) -$$

$$- 2k_1^2 v_0''(k_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n''(k_1)}{w_n'(k_1)} (a_n^2 + b_n^2) - [J_0'(k_1) A_0' + I_0'(k_1) C_0'] = 0 \tag{24}$$

Z równań (20) wynika, że:

$$J_0'(k_1) A' + I_0'(k_1) C_c' = \frac{J_0'(k_1)}{J_0(k_1)} \cdot [J_0(k_1) A_0' + I_0(k_1) C_0'] =$$

$$= -k_1^2 v_0''(k_1) \frac{J_0'(k_1)}{J_0(k_1)} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \tag{25}$$

Zatem z równości (24) mamy:

$$\alpha l' + \beta l^2 = k_1 a_0^2 - k_1^2 \frac{v_0'''(k_1)}{v_0''(k_1)} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) + 2k_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n''(k_1)}{w_n'(k_1)} (a_n^2 + b_n^2) -$$

$$- k_1^2 \frac{J_0'(k_1)}{J_0(k_1)} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \tag{26}$$

Funkcje $I_0(x)$ i $I_0(x)$ spełniają równanie Bessela:

$$J_0''(x) + \frac{1}{x} J_0'(x) + J_0(x) = 0$$

$$I_0''(x) + \frac{1}{x} I_0'(x) + \gamma I_0(x) = 0$$

gdzie

$$\gamma = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2$$

Wobec tego mamy:

$$\frac{v_o'''(k_1)}{v_o''(k_1)} = \frac{1}{k_1} - \frac{J_o'(k_1)}{J_o(k_1)} \tag{27}$$

$$\frac{w_n''(k_1)}{w_n'(k_1)} = -\frac{1}{k_1} + (1-\gamma)\left[\frac{I_n(k_1)}{I(k_1)} - \frac{J_n'(k_1)}{J_n(k_1)}\right]^{-1} \tag{28}$$

i stąd

$$\alpha l' + \beta l^2 = k_1\left[a_o^2 - \sum_{n=1}^{\infty}(P_o + P_n)(a_n^2 + b_n^2)\right] \tag{29}$$

gdzie

$$P_o = 1 + \frac{2k_1 J_o'(k_1)}{J_o(k_1)} \tag{30}$$

jest wartością stałą, zależną tylko od własności sprężystych płyty, zaś współczynniki P_n, $n \geqslant 1$, zmieniają się wraz z n według wzoru:

$$P_n = \frac{2}{k_1}\left(k_1^2 - k_2^2\right)\left[\frac{J_n'(k_1)}{J_n(k_1)} - \frac{I_n'(k_1)}{I_n(k_1)}\right]^{-1} \tag{31}$$

Ze wzorów (16), (22) i (29) otrzymujemy poszukiwane wyrażenie na $k = \lambda_1(\omega)$, określające podstawową częstość drgań płyty:

$$k = k_1\left[1 - a_o + k_1 a_o^2 - \sum_{n=1}^{\infty}(P_o + P_n)(a_n^2 + b_n^2)\right] \tag{32}$$

Odkształcenie płyty z dokładnością do małych rzędu pierwszego wyraża się wzorem:

$$v(r, \varphi) = v_o(r) - p(r, \varphi)$$

gdzie $v_o(r)$ dane jest związkiem (9), a $p(r, \varphi)$ — związkiem (22). Pokażemy w końcu, że współczynniki P_n ze wzoru (32) spełniają następującą nierówność:

$$P_n \leqslant \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 k}\right)^2 (n+1) \tag{33}$$

Z teorii funkcji Bessela [6] wiadomo, że

$$\frac{J_n'(x)}{J_n(x)} = \frac{n}{x} - 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x}{j_{n\nu}^2 - x^2} \tag{34}$$

oraz

$$\sum_{v=1}^{\infty} j_{nv}^{-2} = \frac{1}{4(n+1)}$$

gdzie

$$j_{n1} < j_{n2} < \ldots\ldots, < j_{nv} < \ldots$$

oznaczają dodatnie pierwiastki równania $J_n(x)=0$.

Wyrażenie

$$g_n = \frac{J_n'(k_1)}{J_n(k_1)} - \frac{I_n'(k_1)}{I_n(k_1)}$$

możemy przedstawić następująco:

$$g_n = \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{2\gamma k_1}{j_{nv}^2 - \gamma k_1^2} - \frac{2k_1}{j_{nv}^2 - k_1^2} \right) = 2k_1(1-\gamma) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{j_{nv}^2 f(j_{nv})}$$

gdzie

$$f(j_{nv}) = -1 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{j_{nv}^2} - \frac{k_1^2 k_2^2}{j_{nv}^4} \leqslant \frac{(k_1^2 - k_2^2)^2}{2k_1 k_1}$$

Stąd i ze wzoru (34) wynika, że zachodzi nierówność:

$$g_n \geqslant 2 \frac{k_1 k_2^2}{k_1^2 - k_2^2} \cdot \frac{1}{n+1}$$

Zatem słuszna jest nierówność:

$$P_n = \frac{2(k_1^2 - k_2^2)}{k_1} g_n^{-1} \leqslant \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 k_2} \right)^2 (n+1)$$

co należało udowodnić.

PIŚMIENNICTWO

1. Lord Rayleigh: The Theory of Sound. London 1894—1896.
2. Marciak-Kozłowska J., Piłat M.: Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Lublin, sectio AA, **16**, 109 (1961).
3. Piłat M.: Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Lublin, sectio AA, **16**, 95 (1961).
4. Polya G., Szego G.: Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Princeton University Press 1951.
5. Landau L., Lifszic E.: Mechanika ośrodków ciągłych. PWN, Warszawa 1958.
6. Watson G. N.: A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge 1948.

РЕЗЮМЕ

В этой работе рассматривается влияние формы края на колебания почти круговой пластины, подвергнутой изотропическим напряжениям, действующим параллельно поверхности пластины. Проблема сводится к нахождению решений двухмерного уравнения (3) при краевых условиях (7) на кривой (11). Найдена основная частота и деформации такой напряженной пластины.

SUMMARY

The influence of the edge shape on the vibrations of a nearly circular, isotropically strained plate was investigated. The problem consists in solving the two-dimensional equation (3) at boundary conditions (7) on a curve (11). The basic frequency of vibrations and the distorsion of strained plate wre found.

Papier druk. sat. III kl. 80 g Format 70 × 100 Druku stron 7
Annales UMCS Lublin 1969 Lub. Zakł. Graf. Lublin, Unicka 4 Zam. 1662. 9.VI.70
600 + 25 egz. A-7 Manuskrypt otrzymano 9.VI.70 Data ukończenia 31.08.71

РЕЗЮМЕ

В этой работе рассматривается влияние формы края на колебания почти круговой пластины, подвергнутой изотропическим напряжениям, действующим параллельно поверхности пластины. Проблема сводится к нахождению решений двухмерного уравнения (3) при краевых условиях (7) на кривой (11). Найдена основная частота и деформации такой напряженной пластины.

SUMMARY

The influence of the edge shape on the vibrations of a nearly circular isotropically strained plate was investigated. The problem consists in solving the two-dimensional equation (3) at boundary conditions (7) on a curve (11). The basic frequency of vibrations and the distorsion of strained plate wre found.

Papier druk. sat. III kl. 80 g Format 70 × 100 Druku stron 7
Annales UMCS Lublin 1980 Lub. Zakł. Graf. Lublin, Unicka 4 zam. 1868 3.VI.80
800 + 25 egz. A-7 Manuskrypt otrzymano 3.VI.80 Data ukończenia 30.01.81