ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XVI, 12 SECTIO AA 1961

Z Katedry Fizyki Teoretycznej Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: doc. dr Włodzimierz Urbański

Janina MARCIAK-KOZŁOWSKA
Maksymilian PIŁAT

Podstawowe drgania prawie kołowej pierścieniowej membrany

Основные колебания почти круговой кольцевой мембраны

Principal Vibrations of the Nearly Circular Annular Membrane

Zagadnienie drgań własnych membrany kołowej prowadzi do równania:

$$(\Delta + \lambda^2)\, w = 0 \tag{1}$$

z warunkiem na brzegu C_0

$$w\,(r,\ \varphi)\,|_{C_0} = 0 \tag{2}$$

Równanie (1) ma rozwiązanie $w = I_n(\lambda r)\, e^{in\varphi}$ gdzie $I_n(\lambda r)$ są funkcjami Bessela rzędu n (n — całkowite).

Lord Rayleigh [1, 2] podał przybliżone rozwiązanie równania (1) z warunkiem (2) dla drgań podstawowych membrany prawie kołowej, tj. z brzegiem C o równaniu $r = 1 + \varrho\,(\varphi)$, gdzie $|\varrho(\varphi)| \ll 1$ V. Vodicka w pracy [3] rozważa drgania membrany niejednorodnej złożonej z kilku warstw. Poszczególne warstwy łączą się między sobą wzłuż koncentrycznych okręgów.

W pracy tej zajmiemy się drganiami podstawowymi membrany pierścieniowej, której jeden brzeg C_1 jest okręgiem o promieniu r_0, a drugi C_2 krzywą bliską okręgu o równaniu $r = 1 + \varrho(\varphi)$, gdzie $|\varrho(\varphi)| \ll 1$ uważamy za małą rzędu pierwszego. Wygodnie jest $\varrho(\varphi)$ przedstawić w postaci szeregu

$$\rho\,(\varphi) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\,\varphi + b_n \sin n\,\varphi) \tag{3}$$

Rozwiązanie równania (1) w przypadku takiej membrany będzie miało postać:

$$w(r,\varphi) = I_0(\lambda r) + CN_0(\lambda r) - p(\lambda r,\varphi) - q(\lambda r,\varphi) \tag{4}$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} p(r,\varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big[I_n(r)+CN_n(r)\Big](A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) \\ q(r,\varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big[I_n(r)+CN_n(r)\Big](A_n'\cos n\varphi + B_n'\sin n\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\lambda = k + l + l' \tag{6}$$

A_n, B_n, l są wielkościami rzędu pierwszego, a A_n', B_n', l' — wielkościami rzędu drugiego.

Rozwiązanie $w(r,\varphi)$ ma spełniać następujące warunki brzegowe:

$$w|_{C_1} = 0 \tag{a}$$

$$w|_{C_2} = 0 \tag{b}$$

W przypadku gdy C_2 jest też okręgiem warunki (a) i (b) przyjmą postać:

$$I_0(kr_0) + CN_0(kr_0) = 0 \tag{a'}$$

$$I_0(k) + CN_0(k) = 0 \tag{b'}$$

Stąd

$$C = -\frac{I_0(kr_0)}{N_0(kr_0)} \tag{7}$$

a k spełnia następujące równanie:

$$N_0(k)\,I_0(kr_0) - N_0(kr_0)\,I_0(k) = 0 \tag{8}$$

Korzystając z warunku (b') i kładąc $r = 1 + \rho(\varphi)$ otrzymujemy z dokładnością do wyrazów rzędu drugiego następujące równości:

$$\lambda r = k + (l + k\rho) + (l' + l\rho) \tag{9}$$

$$w = I_0(k) + CN_0(k) + (l + k\rho + l' + l\rho)\,[I_0'(k) + CN_0'(k)] + \frac{1}{2}(l + k\rho)^2\,[I_0''(k) + CN_0''(k)] - p(k,\varphi) - (l + k\rho)\,p_r(k,\varphi) - q(k,\varphi) = 0 \tag{10}$$

Wyrazy rzędu pierwszego w (10) dają równość

$$(l + k\rho)\,[I_0'(k) + CN_0'(k)] - p(k,\varphi) = 0 \tag{11}$$

lub po rozpisaniu

$$l\,[I_0'(k) + CN_0'(k)] + k\,[I_0'(k) + CN_0'(k)]\cdot\left[a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi)\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}[I_n(k) + CN_n(k)]\,(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) \tag{11}$$

Stąd

$$l = -ka_0 \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} A_n &= 2k\frac{I_0'(k)+CN_0'(k)}{I_n(k)+CN_n(k)}a_n \\ B_n &= 2k\frac{I_0'(k)+CN_0'(k)}{I_n(k)+CN_n(k)}b_n \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Po uwzględnieniu (13) wyrażenie (5) dla p (r, φ) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} p(r,\varphi) &= A_0[I_0(r)+CN_0(r)]+2k[I_0'(k)+CN_0'(k)]\cdot \\ &\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n(r)+CN_n(r)}{I_n(k)+CN_n(k)}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi) \end{aligned} \tag{14}$$

Zbierając wyrazy rzędu drugiego w (10) otrzymujemy równanie:

$$\begin{aligned} (l\rho+l')[I_0'(k)+CN_0'(k)]+\frac{1}{2}(l+k\rho)^2[I_0''(k)+CN_0''(k)]-(l+k\rho)\,p_r(k,\varphi)- \\ -q(k,\varphi)=0 \end{aligned} \tag{15}$$

Po przecałkowaniu wyrażenia (15) po φ w granicach od 0 do 2π i uwzględnieniu (12) oraz równości

$$\frac{I_0''(k)+CN_0''(k)}{I_0'(k)+CN_0'(k)}=-\frac{1}{k} \tag{16}$$

która wynika z równania Bessela, otrzymujemy następujące wyrażenie na l'

$$l'=k\left[a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(a_n^2+b_n^2)\right] \tag{17}$$

gdzie

$$\alpha_n=1+2k\frac{I_n'(k)+CN_n'(k)}{I_n(k)+CN_n(k)} \tag{18}$$

Zatem podstawowa wartość własna równania (1) z warunkami (a) i (b) wyraża się następująco:

$$\lambda=k-ka_0+ka_0^2+k\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(a_n^2+b_n^2) \tag{19}$$

Wyniki otrzymane przez Lorda Rayleigha (poza oszacowaniem współczynników α_n) są szczególnym przypadkiem wyników podanych w tej pracy. Istotnie, przypadek membrany prawie kołowej otrzymujemy przechodząc z r_0 do 0. Wtedy C dąży także do 0, a wyrażenia (4), (13), (18), (19) przyjmują postać:

$$w(r,\varphi)=I_0(\lambda r)-\sum_{n=0}^{\infty}I_n(\lambda r)(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)$$

$$A_n = 2k \frac{I_0'(k)}{I_n(k)} a_n \qquad B_n = 2k \frac{I_0'(k)}{I_n(k)} b_n$$

$$\lambda = k - ka_0 + ka_0^2 + k \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (a_n^2 + b_n^2)$$

gdzie

$$\alpha_n = 1 + 2k \frac{I_n'(k)}{I_n(k)}$$

Wyniki te są identyczne z podanymi w pracy [2].

PIŚMIENNICTWO

1. Lord Rayleigh: The Theory of Sound, London 1894/96.
2. Po'lya G., Szego G.: Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics, Princeton University Press 1951.
3. Vodicka V.: Free Vibrations of a Composite Circular Membrane, Journal of the Physical Society of Japan, 17, 698 (1962).
4. Lebiediew N. N.: Funkcje specjalne i ich zastosowanie, PWN, Warszawa 1957.

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматриваются основные колебания кольцевой мембраны, которой один край (круговой) определяется уравнением $v = v_0$, а второй уравнением $v = 1 + \vartheta(\varphi)$, здесь $|\vartheta(\varphi)| \ll 1$. Получается приближенное решение (с точностью до членов второго порядка) уравнения $(\Delta + \lambda^2) w = 0$ при краевых условиях $w = 0$. Это решение является обобщением результатов данных Ролеем в случае почти круговой мембраны.

SUMMARY

In this paper were investigated the principal vibrations of the annular membrane with circular edge given in the equation $r = r_0$ and the second edge described in the equation $r = 1 + \varrho(\varphi)$ where $|\varrho(\varphi)| \ll 1$. There was obtained the approximate solution of the equation $(\Delta + \lambda^2)\, w = 0$ with the boundary condition on the edges $w = 0$. The results were calculated with accuracy up to the second order terms. The results which are obtained in Lord Rayleigh's paper [1] for the nearly circular membrane, are a particular case of the results formed above.

Annales UMCS Lublin 1962 Format 70×100 Druku 4 str.
Papier druk. sat. III kl. 80 g Lub. Druk. Pras. Lublin, Unicka 4 Zam. 2854 14 VIII 63
600+75 egz. N-5 Manuskrypt ortzymano 14. VIII. 63 Druk ukończono 31 I.1964