ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. XVI, 11 SECTIO AA 1961

Z Katedry Fizyki Ogólnej Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Armin Teske

Stefan KRÓL, Maksymilian PIŁAT

Drgania dwuwarstwowej lepkiej kropli

Колебания двухслойной вязкой капли

The Oscillations of a Two-Layered Liquid Viscous Sphere

§ 1. Drgania kropli cieczy idealnej i nieściśliwej z uwzględnieniem sił grawitacyjnych rozważał po raz pierwszy Lord Kelvin [1]. Podane przez niego rozwiązanie przeniósł Lamb [2] na przypadek drgań warstwy cieczy idealnej, pokrywającej sztywny rdzeń kulisty. W pracy [3] uogólnia się wspomniane wyniki na n warstw cieczy idealnych i nieściśliwych, pokrywających sztywny rdzeń, a w dyskusji uwzględnia się przypadek kropli pokrytej warstwą innej cieczy.

Drgania kropli cieczy lepkiej badał Chandrasekhar [4], a następnie Reid [5] uogólnił jego wyniki na przypadek kropli ze sztywnym rdzeniem. Podali oni równania na częstości własne drgań tych kropli.

W naszej pracy wyprowadzamy równanie na częstości własne drgań kropli cieczy lepkiej, pokrytej warstwą innej cieczy. Zagadnienie to obejmuje zarówno przypadek dyskutowany przez Chandrasekhara [4], jak również wyniki dla kropli dwuwarstwowej [3].

§ 2. Rozważamy, zgodnie z postawionym zagadnieniem, małe drgania ciekłej dwuwarstwowej kuli o promieniach powierzchni warstw równych odpowiednio R_1 i R_2, gdzie $R_2 < R_1$. Przyjmujemy, że ciecz jest nieściśliwa, lepka i ciężka. Równania ruchu po odrzuceniu małych rzędu drugiego są następujące [4].

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \omega - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \tag{2}$$

$$\omega = -\delta V + \frac{\delta p}{\rho} \tag{3}$$

$$\Delta \delta V = 0, \tag{4}$$

gdzie u oznacza prędkość, ν lepkość, ϱ gęstość, δp i δV są zmianami ciśnienia i wewnętrznego potencjału grawitacyjnego, wywołanymi odkształceniami kropli od kształtu kulistego.

Równania odkształconych powierzchni $r_1 = r_1\ (\Theta, \varphi)$ i $r_2 = r_2\ (\Theta, \varphi)$ piszemy w postaci szeregów funkcji kulistych $Y_l^m\ (\Theta, \varphi)$

$$r_1 = R_1 \left[1 + \sum_{l,m} \alpha_{ml}^{(1)}\, Y_l^m\, (\Theta, \varphi) \right] \tag{5}$$

$$r_2 = R_2 \left[1 + \sum_{l,m} \alpha_{lm}^{(2)}\, Y_l^m (\Theta, \varphi) \right], \tag{6}$$

gdzie $\alpha_{lm}^{(i)} = \alpha_{lm}^{(i)}\ (t)$ dla $i = 1,2$ są współczynnikami zależnymi od czasu, a sumowanie rozciąga się po m od $-l$ do l i po l od 0 do ∞. Zmiana potencjału grawitacyjnego δV wyraża się następującymi wzorami [3]:

dla $r_2 \leqslant r \leqslant r_1$

$$\delta V_1 = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left(\frac{\rho_1}{R_1^{l-2}} \alpha_{l,m}^{(1)} r^l + \frac{\rho^2 - \rho^1}{r^{l+1}} R_2^{l+3} \alpha_{l,m}^{(2)} \right) Y_l^m\, (\Theta, \varphi)\, *$$

oraz dla $0 \leqslant r \leqslant r_2$

$$\delta V_2 = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left(\frac{\rho_1}{R_1^{l-2}} \alpha_{l,m}^{(1)} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{R_2^{l-2}} \alpha_{l,m}^{(2)} \right) r^l Y_l^m\, (\Theta, \varphi) \tag{7}$$

Biorąc dywergencję równania (1) otrzymamy ze względu na równanie (2)

$$\Delta\omega = 0 \tag{8}$$

i ponieważ $\Delta \delta V = 0$, mamy:

$$\Delta \frac{\delta p}{\rho} = 0\,; \tag{9}$$

zatem:

$$\frac{\delta p}{\rho} = \sum_{lm} \alpha_{lm}^{(2)}\, P_0^{(l,m)}\, r^l\, Y_l^m \qquad \text{dla } r_1 \leqslant r_2 \tag{10}$$

oraz:

$$\frac{\delta p}{\rho} = \sum_{lm} \left(P_1^{(lm)} \frac{r^l}{R_1^l} + P_2^{(lm)} \frac{R_1^{l+1}}{r_1^{l+1}} \right) Y_l^m \quad \text{dla } r_2 \leqslant r \leqslant r_1 \tag{11}$$

gdzie P_0, P_1, P_2 są stałymi. Ze wzorów (3), (7), (10) i (11) otrzymujemy wyrażenia:

$$\omega_1 = -\delta V_1 + \frac{\delta p_1}{\rho_1} = \sum_{l,m} \alpha^{(1)}_{(lm)} \left[(l+1)\, A_6^{(l,m)}\, r^l - l A_7^{(l,m)} \frac{1}{r^{l+1}} \right] Y_l^m \tag{12}$$

dla $r_2 \leqslant r \leqslant r_1$,

$$\omega_2 = -\delta V_2 + \frac{\delta p_2}{\rho_2} = \sum_{lm} \alpha^{(1)}_{lm} (l+1)\, A_5^{(l,m)}\, r^l\, Y_l^m \qquad \text{dla } r \leqslant r_2 \tag{13}$$

gdzie A_5, A_6, A_7 są stałymi.

§ 3. Grad ω jest wektorem biegunowym o funkcji skalnej [4]:

$$S_1^{(lm)} = \alpha^{(1)}_{lm} \left(A_6^{(lm)}\, r^{l+1} + A_7^{(lm)} \frac{1}{r^l} \right) \qquad \text{dla } r_2 \leqslant r \leqslant r_1$$

$$S_2^{(lm)} = \alpha^{(2)}_{lm}\, A_5^{(lm)}\, r^{l+1} \qquad \text{dla } r \quad r_2;$$

to znaczy, że zachodzą następujące równości:

$$(\text{grad } \omega)_r = \sum_{lm} \frac{l(l+1)}{r^2} S^{(l,m)}_{(r\vartheta)}\, Y_l^m$$

$$(\text{grad } \omega)_\Theta = \sum_{lm} \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \Theta}$$

$$(\text{grad } \omega)_\varphi = \sum_{lm} \frac{1}{r \sin\Theta} \frac{\partial S}{\partial r} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \varphi}$$

$\vec{u}$ i rot rot $\vec{u}$ są zatem także wektorami biegunowymi o funkcjach skalarnych $U^{(l,m)}(r)$ i odpowiednio $-\left\{ \frac{d^2 U^{(l,m)}}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U^{(l,m)} \right\}$; (14)

$\vec{u}$ poprzez $U^{(l,m)}$ wyraża się w następujący sposób [4]

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \sum_{l,m} e^{-\sigma_{l,m} t} \frac{l(l+1)}{r^2} U^{(l,m)}(r)\, Y_l^m \\ u_\Theta &= \sum_{l,m} e^{-\sigma_{l,m} t} \frac{1}{r} \frac{dU^{(l,m)}}{dr} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \Theta} \\ u_\varphi &= \sum_{l,m} e^{-\sigma_{l,m} t} \frac{1}{r \sin\Theta} \frac{dU^{(l,m)}}{dr} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

Po podstawieniu (12), (13), (14), (15) do (1), przyrównaniu współczynników przy Y_l^m i opuszczeniu wskaźników otrzymamy:

$$\frac{d^2 U_1}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U_1 + \frac{\sigma}{\nu_1} U_1 = \frac{\alpha_0^{(1)}}{\nu_1} \left(A_6\, r^{l+1} + A_7 \frac{1}{r^l} \right) \tag{16}$$

$$\frac{d^2U_2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U_2 + \frac{\sigma}{\nu_2} U_2 = \frac{\alpha_0^{(1)}}{\nu_2} A_5 r^{l+1} \tag{17}$$

Przyjęliśmy, że współczynniki $\alpha^{(i)}(t)$ w porównaniu (5), (6), (7), 10), (12) i (13) są postaci $\alpha_o^{(i)} e^{-\sigma t}$

Rozwiązaniami (16) i (17) są odpowiednio funkcje:

$$U_1(r) = A_2 r^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(q_1 r) + A_3 r^{\frac{1}{2}} J_{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}(q_1 r) + \frac{\alpha_o^{(1)}}{\sigma} A_6 r^{l+1} + \frac{\alpha_o^{(1)}}{\sigma} A_7 \frac{1}{r^l} \tag{18}$$

$$U_2(r) = A_4 r^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(q_2 r) + \frac{\alpha_o^{(1)}}{\sigma} A_5 r^{l+1}, \text{ gdzie}$$

$$q_1 = \sqrt{\frac{\sigma}{\nu_1}}, \quad q_2 = \sqrt{\frac{\sigma}{\nu_2}}$$

$J_l(x)$ jest funkcją Bessela rzędu l. Stałe $\frac{\alpha_o^{(2)}}{\alpha_o^{(1)}} = A_1$, A_k dla k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, wyznaczamy z następujących warunków granicznych:

1. u_r wyliczone z funkcji tworzącej $U(r)$ i ze wzoru $r = R\left(1 + \sum_{l,m} \alpha_{l,m} Y_l^m\right)$ muszą być równe.

Stąd otrzymujemy dwa równania dla dwóch powierzchni:

$$u_r \Big|_{r=R_1} = \dot{r}_1, \quad u_r \Big|_{r=R_2} = \dot{r}_2,$$

2. Ciśnienie styczne $p_{r\theta}$ i $p_{r\varphi}$ musi znikać na powierzchni zewnętrznej. $p_{r\theta} = p_{r\varphi} = 0$ dla $r = R_1$. Prowadzi to do warunku:

$$\frac{l(l+1)}{r^2} U_1 + \frac{2}{r}\frac{dU_1}{dr} + \frac{d^2U_1}{dr^2} = 0 \text{ dla } r = R_1.$$

3. Ciśnienie normalne p_{rr} na powierzchni $r = R_1\left(1 + \sum_{lm} \alpha_{lm}^{(1)} Y_l^m\right)$ musi znikać. Ciśnienie to wyraża się następującym wzorem:

$$p_{rr} = p_o + \delta p_1 + 2\nu_1 \rho_1 \frac{\partial Ur}{\partial r}, \text{ gdzie}$$

$$p_o = \frac{2}{3}\pi \rho_1{}^2 R_1{}^2 \left(1 - \frac{r^2}{R_1{}^2}\right) + \frac{4}{3}\pi\rho_1(\rho_2 - \rho_1)\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 R_1{}^3\left(\frac{R_1}{r} - 1\right)$$

4. Prędkość radialna u_r wyliczona z $U_1(r)$ powinna być równa u_r wyliczonej z $U_2(r)$ dla powierzchni $r = R_2$. Prowadzi to do warunku $U_1 = U_2$ dla $r = R_2$.

5. Składowe prędkości prostopadłe do promienia powinny być ciągłe

$$u_\Theta^{(1)}\Big|_+ = u_\Theta^{(2)}\Big|_- \quad \text{oraz} \quad u_\varphi^{(1)}\Big|_+ = u_\varphi^{(2)}\Big|_- \quad \text{dla } r = R_2$$

$$\text{Stąd} \quad \frac{dU_1}{dr} = \frac{dU_2}{dr} \quad \text{dla } r = R_2$$

6. Napięcia styczne muszą być ciągłe w cieczy.

$$p_{r\Theta}^{(1)}\Big|_+ = p_{r\Theta}^{(2)}\Big|_- \quad \text{oraz} \quad p_{r\varphi}^{(1)}\Big|_+ = p_{r\varphi}^{(2)}\Big|_- \quad \text{dla } r = R_2,$$

stąd otrzymujemy dla $r = R_2$. następujące równanie:

$$\rho_1\nu_1\left\{\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{r}\frac{dU_1}{dr} + \frac{d^2U_1}{dr^2}\right\} = \rho_2\nu_2\left\{\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{r}\frac{dU_2}{dr} + \frac{d^2U_2}{dr^2}\right\}$$

7. Warunek ciągłości ciśnień normalnych w cieczy prowadzi do równania $p_{rr}\Big|_+ = p_{rr}\Big|_-$ na powierzchni $r = R_2\ (1 + \sum\limits_{lm}\alpha_{lm}^{(2)} Y_l^m)$, które po przekształceniach przyjmuje postać następującą:

$$\delta p_1 - 2\nu_1\rho_1 \frac{\partial U_r^{(1)}}{\partial r} = \delta p_2 - 2\nu_2\rho_2 \frac{\partial U_r^{(2)}}{\partial r}$$

Z powyższych warunków otrzymujemy następujący układ równań:

$$\sum_{k=1}^{7} a_{ik}A_k = -a_{i8}, \quad i = 1,\dots,8, \quad k = 1,\dots,7,$$

gdzie A_k są stałymi, o których była mowa poprzednio, natomiast
$a_{11} = a_{14} = a_{15} = a_{16} = a_{22} = a_{23} = a_{26} = a_{27} = a_{28} = a_{31} = a_{34} = a_{35} = a_{38} = a_{44} =$
$= a_{45} = a_{51} = a_{58} = a_{61} = a_{71} = a_{78} = 0,$

$$a_{12} = R_1^{-\frac{5}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(q_1R_1), \qquad a_{13} = R_1^{-\frac{5}{2}} J_{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}(q_1R_1)$$

$$a_{24} = R_2 J_{l+\frac{1}{2}}(q_2R_2), \qquad a_{16} = \frac{R_1^{l-2}}{\sigma}, \qquad a_{17} = \frac{1}{\sigma R_1^{l+3}}, \qquad a_{18} = -\frac{\sigma}{l(l+1)},$$

$$a_{21} = \frac{\sigma}{l(l+1)}, \qquad a_{25} = \frac{R_2^{l-2}}{\sigma},$$

$$a_{32} = \left[l(l+1) + \frac{3}{4}\right] R_1^{-\frac{3}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(q_1R_1) + 3R_1^{-\frac{1}{2}} q_1 J'_{l+\frac{1}{2}}(q_1R_1) +$$

$$+ R_1^{-\frac{1}{2}} q_1^2 J''_{l+\frac{1}{2}}(q_1R_1),$$

$$a_{33} = \left[l(l+1)+\frac{3}{4}\right] R_1^{-\frac{3}{2}} J_{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}(q_1 R_1) + 3R_1^{-\frac{1}{2}} q_1 J'_{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}(q_1 R_1) +$$

$$= R_2^{\frac{1}{2}} q_1^2 J''_{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}(q_1 R_1),$$

$$a_{36} = 2\,\frac{(l+1)^2}{\sigma} R_1^{l+2} \qquad a_{37} = \frac{2l^2}{\sigma}\frac{1}{R_1^{l+2}}, \qquad a_{41} = \frac{4\pi}{2l+1}\frac{R_1^{l+3}}{R_1^{l+1}}(\rho_2-\rho_1),$$

$$a_{42} = \nu_1 l(l+1)\left[3R_1^{-\frac{5}{2}} J_{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}(q_1 R_1) - 2R_1^{-\frac{3}{2}} q_1 J'_{l+\frac{1}{2}}(q_1 R_1)\right]$$

$$a_{43} = \nu_1 l(l+1)\left[3R_1^{-\frac{5}{2}} J_{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}(q_1 R_1) + 2R_1^{-\frac{3}{2}} q_1 J'_{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}(q_1 R_1)\right],$$

$$a_{46} = (l+1) R_1^{l-2}\left[R_1^2 - \frac{2\nu_1 l(l+1)}{\sigma}\right], \qquad a_{47} = \frac{l}{R_1^{l+1}}\left[\frac{2\nu_1(l+1)(l+2)}{\sigma} - 1\right],$$

$$a_{48} = \frac{4}{3}\pi R_1^2\left[\frac{2(l+1)}{2l+1}\rho_1 + (\rho_2-\rho_1)\frac{R_2}{R_1}\right], \qquad a_{52} = R_2^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(q_1 R_2),$$

$$a_{53} = R_2^{\frac{1}{2}} J_{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}(q_1 R_2), \qquad a_{54} = -R_2^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(q_2 R_2), \qquad a_{55} = -\frac{R^{l+1}}{\sigma},$$

$$a_{56} = \frac{R_2^{l+1}}{\sigma}, \; a_{57} = \frac{1}{\sigma}\frac{1}{R_2^l}, \; a_{62} = \frac{1}{2} R_2^{-\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(q_1 R_2) + R_2^{\frac{1}{2}} q_1 J'_{l+\frac{1}{2}}(q_1 R_2),$$

$$a_{63} = \frac{1}{2} R_2^{-\frac{1}{2}} J_{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}(q_1 R_2) + R_2^{\frac{1}{2}} q_1 J'_{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}(q_1 R_2),$$

$$a_{64} = -\frac{1}{2} R_2^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(q_2 R_2) - R^{\frac{1}{2}} q_2 J'_{l+\frac{1}{2}}(q_2 R_2),$$

$$a_{65} = -\frac{l+1}{\sigma} R_2^l, \quad a_{66} = \frac{l+1}{\sigma} R_2^l, \quad a_{67} = -\frac{l}{\sigma}\frac{1}{R_2^{l+1}},$$

$$a_{72} = \rho_1\nu_1\left\{\left[l(l+1)+3/4\right] R_2^{-\frac{3}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(q_1 R_2) + 3R_2^{-\frac{1}{2}} q_1 J'_{l+\frac{1}{2}}(q_1 R_2) + \right.$$

$$\left. + R_2^{\frac{1}{2}} q_1^2 J''_{l+\frac{1}{2}}(q_1 R_2)\right\},$$

$$a_{73}=\rho_1\nu_1\left\{\left[l\,(l+1)+3/4\right]R_2^{-\frac{3}{3}}J_{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}(q_1R_2)+3R_2^{-\frac{1}{2}}q_1J'_{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}(q_1R_2)+\right.$$

$$\left.+R_2^{-\frac{1}{2}}q_1^2J''_{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}(q_1R_2)\right\},$$

$$a_{74}=-\rho_2\nu_2\left\{\left[l\,(l+1)+3/4\right]R_2^{-\frac{2}{3}}J_{l+\frac{1}{2}}(q_2R_2)+3R_2^{-\frac{1}{2}}q_2J'_{l+\frac{1}{2}}(q_2R_2)+\right.$$

$$\left.+R_2^{-\frac{1}{2}}q_2^2J''_{l+\frac{1}{2}}(q_2R_2)\right\},$$

$$a_{75}=-\frac{2\,(l+1)^2}{\sigma}\rho_2\nu_2R_2^{l-1},\qquad a_{76}=\frac{2\,(l+1)^2}{\sigma}\rho_1\nu_1R_2^{l-1},$$

$$a_{77}=\frac{2l^2}{\sigma}\rho_1\nu_1\frac{1}{R_2^{l+2}},\qquad a_{81}=\frac{4\pi}{2l+1}R_2\,(\rho_2-\rho_1)^2,$$

$$a_{82}=\nu_1\rho_1l\,(l+1)\left[3R_2^{-\frac{5}{2}}J_{l+\frac{1}{2}}(q_1R_2)-2R_2^{-\frac{3}{2}}q_1J'_{l+\frac{1}{2}}(q_1R_2)\right],$$

$$a_{83}=\nu_1\rho_1l\,(l+1)\left[3R_2^{-\frac{5}{2}}J_{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}(q_1R_2)-2R_2^{-\frac{3}{2}}q_1J'_{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}(q_1R_2)\right],$$

$$a_{84}=-\nu_2\rho_2l\,(l+1)\left[3R_2^{-\frac{5}{2}}J_{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}(q_5R_2)-2R_2^{-\frac{3}{2}}q_2J'_{l+\frac{1}{2}}(q_2R_2)\right],$$

$$a_{85}=-\rho_2\,(l+1)\left[R_2^2-\frac{2\nu_2l\,(l+1)}{\sigma}\right]R_2^{l-2},$$

$$a_{86}=\rho_1\,(l+1)\left[R_2^2-\frac{2\nu_1l\,(l+1)}{\sigma}\right]R_2^{l-2},\quad a_{87}=R_2^{l+1}\rho_1\left[\frac{2\nu_1\,(l+1)\,(l+2)}{\sigma}-1\right]$$

$$a_{88}=-\frac{4\pi}{2l+1}\frac{R_2^l}{R_1^{l-2}}(\rho_1-\rho_2)$$

Po wyrugowaniu z tego układu równań stałych A_i, $i=1, 2, \ldots, 7$, otrzymujemy szukane równanie na częstości własne drgań dwuwarstwowej lepkiej kropli w postaci:

$$\det | a_{ik} | = 0, \; i, \; k = 1, \; 2, \ldots, \; 8.$$

Znalezienie konkretnych rozwiązań tego równania wymaga stosowania metod numerycznych.

PIŚMIENNICTWO

1. Tait G., Thomson K.: Treatise on Natural Philosophy, Cambridge 1903.
2. Lamb H.: Hydrodynamics, Cambridge 1906.
3. Piłat M.: Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Lublin, sectio AA, **XV**, 113 (1960).
4. Chandrasekhar S.: Proc. London Math. Soc., 9, **33**, 141 (1959).
5. Reid W.: Proc. London Math. Soc., 9, **35**, 389 (1959).

РЕЗЮМЕ

В этой работе рассматриваются гравитационные малые колебания двухслойной капли· которая состоит из жидкого шара, покрытого слоем иной жидкости. Полагаем, что эти жидкости вязки, так что проблема включает в себе так случай колебаний капли однородной вязкой жидкости, который рассматривал Чандрасекхар [4], как и случай колебаний двухслойной капли составленной из идеальных жидкостей [3].

Выведено уравнение для частот собственных колебаний. Полученное уравнение оказалось трансцендентным.

SUMMARY

The case of gravitational vibrations of a two-layered sphere is considered. The vibrations system consists of a fluid sphere covered with a layer of another fluid. The fluids are supposed to be viscous so that our problem includes both, the vibrations of a homogeneous viscous sphere discussed by Chandrasekhar [4] and the vibrations of a two-layered sphere of ideal fluids [3].

The equation for the eigen-frequencies is obtained. This equation is transcendental.

Papier druk. sat. III kl. 80 g.	Format 70×100	Druku str. 8
Annales UMCS Lublin 1962	Lub. Druk. Pras. Lublin, Unicka 4	Zam. 2853 14.VIII.63.
600 + 75 odbitek N-5	Manuskrypt otrzymano 17.VIII.63	Druk ukończono 31.I.64