

Reiner KÜHN AU (Halle)

Maxima beim konformen Radius einfach zusammenhängender Gebiete

Abstract. Let $R(w, \mathcal{G})$ denote the inner conformal radius of a simply connected domain \mathcal{G} at the point w . It is well-known that the critical points of $w \mapsto R(w, \mathcal{G})$, if any, are saddle points, or local maxima. The author obtains some geometric conditions on \mathcal{G} implying the existence of a unique maximum of R . E.g. this occurs for $\partial\mathcal{G}$ being a quasicircle admitting a K -quasiconformal reflection with $K=2$ and in this case the maximum can be located. The same holds for $\partial\mathcal{G}$ being a Jordan curve close to a circle in some sense.

1. Einleitung. Nach [4] kann der konforme Radius R (als Ortsfunktion betrachtet) eines einfach zusammenhängenden Gebietes \mathcal{G} niemals ein lokales Minimum im Innern von \mathcal{G} annehmen. Die Frage nach lokalen Maxima ist komplizierter. Nach [4] kann der konforme Radius in einem konvexen einfach zusammenhängenden Gebiete \mathcal{G} , welches kein Parallelstreifen ist, in höchstens einem Punkte ein globales Maximum annehmen. Für nichtkonvexe Gebiete \mathcal{G} ist diese Aussage nicht immer richtig. Es können durchaus mehrere Maxima auftreten – vgl. das bekannte "Hantelgebiet" (zwei punktfremde Kreisscheiben, durch einen schmalen Steg verbunden). Aber immerhin gibt es doch viele Fälle von nichtkonvexen Gebieten \mathcal{G} , für die ebenfalls nur ein Maximum bei R auftritt. Ziel vorliegender Untersuchungen ist es, aufzuzeigen, wie man solche Fälle angeben kann. Es wird sich z.B. ergeben, dass nur ein globales Maximum in \mathcal{G} möglich ist, wenn der Rand von \mathcal{G} eine geschlossene Jordankurve ist, an der 2-quasikonform gespiegelt werden kann. Auch die Lage dieses Maximum lässt sich geometrisch eingrenzen.

Andere Sätze beziehen sich auf Gebiete \mathcal{G} , die in dem Sinne kreisnah sind, dass der Umfang nicht zu gross ist.

Beispiele von nichtkonvexen \mathcal{G} mit genau einem globalen Maximum werden in [5], [10] (Inneres eines gleichseitigen nullwinkligen Kreisbogendreiecks), [14] (Inneres einer Kardioide) angegeben; vgl. auch unten §5 (gewisse Kreisbogenzweiecke).

Weitere Literatur zu Maxima des konformen Radius: [13], [1], [12]. Bekanntlich stimmt der konforme Radius mit der reziproken Dichte der hyperbolischen Metrik überein, so dass alle Resultate auch mit letzterer formuliert werden können.

2. Technische Vorbemerkungen. Es sei $w = f(z)$ eine schlichte konforme Abbildung von $|z| < 1$ auf das einfach zusammenhängende Gebiet \mathcal{G} . Dann gilt bekanntlich für den konformen Radius R von \mathcal{G} im Urbild z des betreffenden Punktes

w

$$R = |f'(z)| \cdot (1 - |z|^2).$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $f(z) \in S$ annehmen, also setzen

$$(2) \quad f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots .$$

Es wird

$$(3) \quad f'(z) = 1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots = (1 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots)^2$$

mit gewissen neuen Koeffizienten A_k .

$$(4) \quad R = (1 + A_1 z + \dots)(1 + \bar{A}_1 \bar{z} + \dots)(1 - z\bar{z}).$$

Notwendig gilt in einem Extremum

$$0 = \frac{\partial R}{\partial z} = (A_1 + 2A_2 z + \dots)(1 + \bar{A}_1 \bar{z} + \dots)(1 - |z|^2) - |1 + A_1 z + \dots|^2 \cdot \bar{z},$$

$$(5) \quad (1 - 2|z|^2)A_1 + (2 - 3|z|^2)A_2 z + (3 - 4|z|^2)A_3 z^2 + \dots = \bar{z}.$$

Insbesondere muss notwendig $a_2 = 0$ sein, falls in $z = 0$ ein lokales Maximum vorliegt.

3. Satz von Haegi. Nun wollen wir zunächst einen Beweis des Satzes von Haegi geben, der vielleicht kürzer und direkter als in [4] ist und nur das Maximumsprinzip benutzt.

Satz 1. Ist Ω konvex und kein Parallelstreifen, dann besitzt R in höchstens einem Punkte eine stationäre Stelle.

Beweis. Notwendig gilt für eine stationäre Stelle von R

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial R^2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} f' \bar{f'} \cdot (1 - z\bar{z})^2 \\ &= f'' \bar{f'} \cdot (1 - z\bar{z})^2 + f' \bar{f'} \cdot 2(1 - z\bar{z})(-\bar{z}), \\ (6) \quad \frac{f''}{f'} &= 2 \frac{\bar{z}}{1 - |z|^2}. \end{aligned}$$

(Diese Bedingung bedeutet übrigens, dass in einer stationären Stelle z der Wert zf''/f' genau im Mittelpunkt der Kreisscheibe liegt, die in der Klasse S den genauen Wertebereich dieser Größe ausmacht – vgl. [2], S.42).

Die Funktion

$$\Phi(z) = 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)}$$

erfüllt bei Konvexität $\Re \Phi > 0$. Für die Funktion $\Psi = \frac{\Phi-1}{\Phi+1}$ gilt dann also $|\Psi| < 1$, und aus (6) folgt $\Psi = |z|^2$. Liegt z.B. in $z = 0$ eine stationäre Stelle vor, ist dort $a_2 = 0$,

so dass Ψ/z^2 noch in $z = 0$ regulär ist. Wenn noch eine weitere stationäre Stelle in $z \neq 0$ vorliegt, gilt dort (6), also $|\Psi/z^2| = 1$, so dass Ψ/z^2 nach dem Maximumsprinzip eine Konstante der Form $e^{i\alpha}$ (α reell) sein muss. Das zieht nach sich:

$$z \frac{f''}{f'} = \frac{2e^{i\alpha} z^2}{1 - e^{i\alpha} z^2}, \quad f' = \frac{a_1}{1 - e^{i\alpha} z^2}, \quad a_1 = \text{const},$$

so dass f eine Abbildung von $|z| < 1$ auf einen Parallelstreifen sein muss.

Bemerkungen. a) Ist \mathfrak{G} konvex und zusätzlich beschränkt, dann ist R in einem Randstreifen beliebig klein. Also existiert dann ein globales Maximum und nach obigem Satz von Haegi genau ein globales Maximum.

b) Ist \mathfrak{G} konvex und unbeschränkt, dann ist R genau dann (nach dem Koebeischen Viertelsatz) nach oben beschränkt, wenn in \mathfrak{G} nicht beliebig grosse Kreis Scheiben liegen. In einem konvexen und unbeschränkten \mathfrak{G} besitzt R im Innern kein lokales Maximum (und damit auch kein globales Maximum), falls \mathfrak{G} kein Parallelstreifen ist. Denn man kann ein solches \mathfrak{G} durch beliebig kleine Verschiebungen in ein kongruentes $\mathfrak{G}' \supset \mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}' \neq \mathfrak{G}$) transformieren.

c) Eine interessante einfache geometrische Einschränkung des Maximalpunktes für R bei beschränkten konvexen Gebieten wurde in [13] gegeben.

4. Genauere Untersuchung von $z = 0$, falls dort die notwendige Bedingung $a_2 = 0$ für eine stationäre Stelle erfüllt ist. Dann ist nach (4)

$$(7) \quad R = (1 + A_2 z^2 + \dots)(1 + \bar{A}_2 \bar{z}^2 + \dots)(1 - |z|^2) = 1 - |z|^2 - 2\Re A_2 z^2 + \dots$$

oder bei $A_2 = |A_2|e^{i\alpha}$, $z = |z|e^{i\varphi}$ (α, φ reell):

$$(8) \quad R = 1 - |z|^2(1 + 2|A_2| \cos(2\varphi + \alpha)) + \dots$$

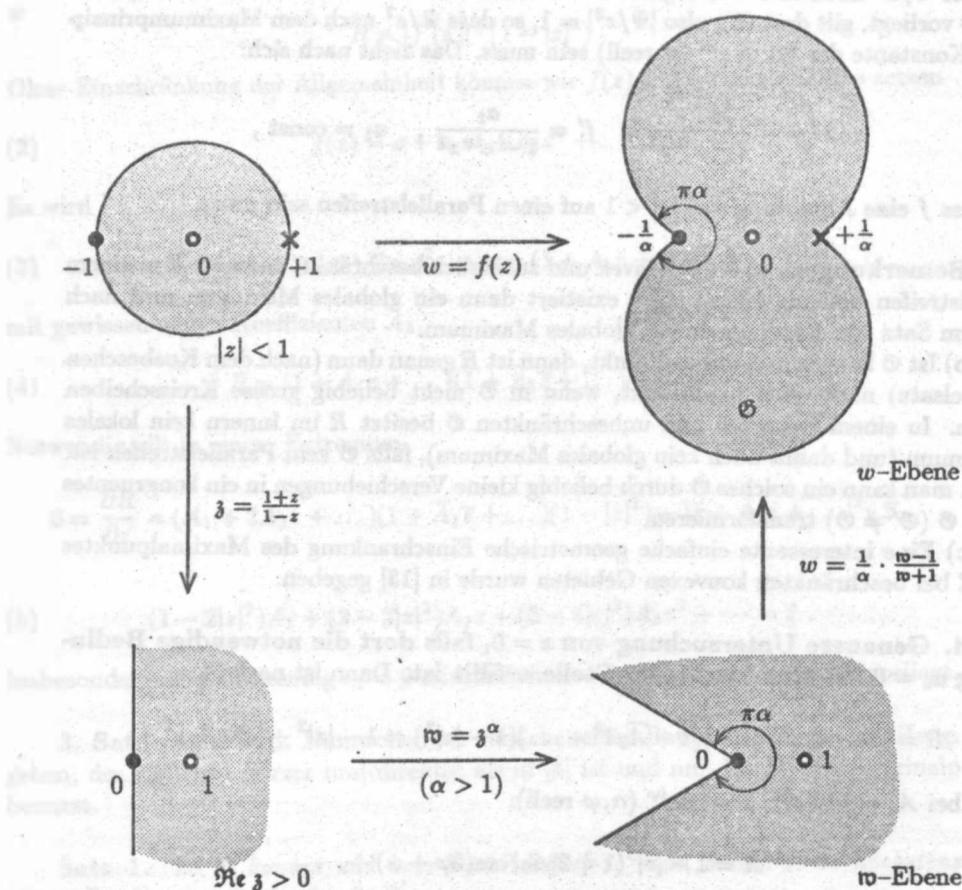
Also: Für $|a_3| < \frac{1}{3}$ (entsprechend $|A_2| < \frac{1}{2}$) besitzt R in $z = 0$ ein eigentliches lokales Maximum, für $|a_3| > \frac{1}{3}$ (entsprechend $|A_2| > \frac{1}{2}$) kein lokales Maximum [4].

5. Ein Beispiel: Kreisbogenzweieck. Sei unverändert $w = f(z)$ eine schlichte konforme Abbildung von $|z| < 1$ auf \mathfrak{G} . Wir wollen unten u.a. untersuchen, wie sich k -fache Symmetrie

$$(9) \quad f(z) = z + a_{k+1} z^{k+1} + a_{2k+1} z^{2k+1} + \dots \quad (k \geq 2)$$

auf die Frage der Maxima bei R auswirkt.

Wir betrachten hier zunächst ein Beispiel für $k = 2$. Sei \mathfrak{G} das aus der folgenden Figur ersichtliche Kreisbogenzweieck.



Die Entwicklung der so induzierten Abbildungsfunktion $w = f(z)$ um $z = 0$ ergibt sich zu

$$w = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{(1+z)^\alpha - (1-z)^\alpha}{(1+z)^\alpha + (1-z)^\alpha} = z - \frac{1}{3} (\alpha^2 - 1) z^3 + \dots$$

Also ist $a_3 = -\frac{1}{3}(\alpha^2 - 1)$ und $|a_3| < \frac{1}{3}$ für $0 < \alpha < \sqrt{2}$. Demnach haben wir nach §4 für $\alpha\pi < \sqrt{2}\pi$ in $z = 0$ bei R ein lokales Maximum, nicht aber für $\alpha\pi > \sqrt{2}\pi$. Für $\pi < \alpha\pi \leq \frac{4}{3}\pi$ ergibt sich unten ausserdem, dass dann in $z = 0$ sogar R ein globales Maximum besitzt (für $0 < \alpha\pi \leq \pi$ ist das nach [4] trivial wegen Konvexität), weil dann am Rand des Kreisbogenzweiecks nach [9] 2-quasikonform gespiegelt werden kann.

Somit folgt bei 2-fach symmetrischen ($k = 2$ in (9)) Gebieten \mathfrak{G} nicht immer, dass im Symmetriepunkt ein lokales Maximum bei R vorliegt. Dagegen hat man bei 3-fach oder höher symmetrischen ($k \geq 3$) Gebieten wegen $|a_3| = 0 < \frac{1}{3}$ immer ein lokales Maximum im Symmetriepunkt. Darüber hinaus ergibt sich unten in Satz 5 für $k \geq 3$, dass zum Symmetriepunkt immer eine konzentrische hyperbolische Kreisscheibe

universellen (d.h. vom speziellen \mathfrak{G} unabhängigen) Radius existiert, für die dieser Symmetriepunkt globales Maximum ist.

6. Der Rand von \mathfrak{G} sei eine quasikonforme Jordankurve \mathcal{C} .

Satz 2. Ist der Rand \mathcal{C} von \mathfrak{G} eine geschlossene Jordankurve, an der 2-quasikonform gespiegelt werden kann, dann besitzt R in \mathfrak{G} genau eine stationäre Stelle (also insbesondere genau eine Stelle, an der das globale Maximum angenommen wird).

Beweis. Solche \mathfrak{G} sind bekanntlich (vgl.z.B.[9]) nach einer Ähnlichkeitstransformation das Bild von $|z| < 1$ bei einer schlichten konformen Abbildung der Form (2), die nach $|z| > 1$ stetig, schlicht und 2-quasikonform fortsetzbar ist. Dann gilt nach [6]

$$|\{f, z\}| \leq 2 \cdot (1 - |z|^2)^{-2} \quad \text{für } |z| < 1 .$$

Hieraus folgt die Behauptung nach [1].

Auch über die Lage der stationären Stellen für R innerhalb \mathfrak{G} lässt sich etwas aussagen.

Satz 3. Ist der Rand \mathcal{C} von \mathfrak{G} eine geschlossene Jordankurve, an der Q -quasikonform gespiegelt werden kann mit $Q \leq 1 + \frac{\pi}{2} = 2,57\dots$, dann liegen alle stationären Stellen für R in der durch

$$(10) \quad \frac{2}{\pi}(Q - 1) \frac{E(|z|)}{|z|} > 1$$

charakterisierten hyperbolischen Kreisscheibe, die zum Spiegelpunkt von ∞ konzentrisch ist.

Dabei bezeichnet E das vollständige elliptische Integral 2. Gattung (es ist $E(|z|)/|z|$ monoton fallend). Und es wird eine schlichte konforme Abbildung von \mathfrak{G} auf $|z| < 1$ betrachtet, bei der der Spiegelpunkt von ∞ in $z = 0$ übergeht. Für $Q \rightarrow 1$ schrumpft die durch (10) charakterisierte hyperbolische Kreisscheibe auf einen Punkt zusammen.

Wegen $E(|z|) \leq \frac{\pi}{2}$ kann man von (10) auch zu der etwas grösseren, aber explizit angebbaren Kreisscheibe $|z| < Q - 1$ übergehen, in der also jedenfalls auch alle stationären Punkte für R liegen. Das liefert natürlich nur etwas für $Q < 2$.

Beweis von Satz 3. Man kann nach Ähnlichkeitstransformation von \mathfrak{G} annehmen, dass \mathfrak{G} als Bild von $|z| < 1$ bei einer Abbildung $f(z)$ der Form (2) entsteht mit einer Q -quasikonformen Fortsetzung nach $|z| > 1$ und $f(\infty) = \infty$. Dann gilt nach [8] (dort Fehler in (34): Es ist 2π durch π zu ersetzen), [11] für $|z| < 1$

$$(11) \quad \left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{4}{\pi}(Q - 1) \cdot \frac{|z|}{1 - |z|^2} E(|z|) .$$

Im Verein mit der notwendigen Bedingung (6) für stationäre Stellen liefert das die Behauptung.

7. Der Rand von \mathfrak{G} sei eine quasikonforme Jordankurve mit Symmetrie. Wenn \mathfrak{G} einen Symmetriepunkt besitzt, lässt sich Satz 2 u.U. verschärfen. Wir schliessen dann etwas anders. Dazu einige kurze technische Vorbereitungen.

Es gilt nach [7] (in (23) Stürzung), falls $F(z) \in S(Q)$ (Abbildungen aus S mit Q -quasikonformer Fortsetzung mit $F(\infty) = \infty$, wie schon im Beweis von Satz 3 betrachtet) und wie üblich $q = \frac{Q-1}{Q+1}$ gesetzt wird,

$$(12) \quad \left| z^2 \frac{F'(z)}{F^2(z)} \right| \geq (1 - |z|^2)^q .$$

Nach [3] gilt dazu

$$(13) \quad \left| z \frac{F'(z)}{F(z)} \right| \leq \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^q .$$

a) Ist $f(z) \in S(Q)$ nun 2-fach symmetrisch entsprechend (9) mit $k = 2$, dann ist

$$f(z) = [F(z^2)]^{1/2} \quad \text{mit} \quad F(z) \in S(Q) ,$$

$$(14) \quad \begin{aligned} |f'(z)| &= |z \cdot F^{-1/2}(z^2) \cdot F'(z^2)| = \left| \frac{F^2(z^2)}{z^4 \cdot F'(z^2)} \right|^{1/2} \cdot \left| z^2 \frac{F'(z^2)}{F(z^2)} \right|^{3/2} \\ &\leq \frac{1}{(1 - |z|^4)^{q/2}} \cdot \left(\frac{1 + |z|^2}{1 - |z|^2} \right)^{3q/2} = \frac{(1 + |z|^2)^q}{(1 - |z|^2)^{2q}} , \end{aligned}$$

$$(15) \quad \begin{aligned} R(z) &\leq (1 + |z|^2)^q \cdot (1 - |z|^2)^{1-2q} \\ &= (1 + |z|^2)^{1/3} \cdot (1 - |z|^2)^{1/3} \cdot \frac{(1 - |z|^2)^{2(1/3-q)}}{(1 + |z|^2)^{1/3-q}} . \end{aligned}$$

Es wird also $R(z) \leq 1$ für $q \leq 1/3$ (entsprechend $Q \leq 2$), mit Gleichheit genau für $z = 0$. Wir erhalten also gegenüber Satz 2 nichts Neues.

b) Ist aber $f(z)$ nun 3-fach symmetrisch entsprechend (9) mit $k = 3$, dann ist

$$f(z) = [F(z^3)]^{1/3} \quad \text{mit} \quad F(z) \in S(Q) ,$$

$$(16) \quad \begin{aligned} |f'(z)| &= |z^2 \cdot F^{-2/3}(z^3) \cdot F'(z^3)| = \left| \frac{F^2(z^3)}{z^6 F'(z^3)} \right|^{1/3} \cdot \left| z^3 \frac{F'(z^3)}{F(z^3)} \right|^{4/3} \\ &\leq \frac{1}{(1 - |z|^6)^{q/3}} \left(\frac{1 + |z|^3}{1 - |z|^3} \right)^{q4/3} = \frac{(1 + |z|^3)^q}{(1 - |z|^3)^{q5/3}} , \end{aligned}$$

$$(17) \quad R \leq \frac{(1 + |z|^3)^q}{(1 - |z|^3)^{q5/3}} \cdot (1 - |z|^2) .$$

Daraus folgt

Satz 4. Ist der Rand \mathcal{C} von \mathfrak{G} eine 3-fach symmetrische geschlossene Jordankurve, an der 3,87-quasikonform gespiegelt werden kann (entsprechend $q \leq 0,59$), dann besitzt R im Symmetriepunkt ein eigentliches globales Maximum.

Für $q = 1$, d.h. wenn der Rand von \mathfrak{G} keinerlei Einschränkung unterworfen wird, ergibt sich immerhin aus (17)

Satz 5. Ist $w = f(z)$ eine 3-fach symmetrische schlichte konforme Abbildung von $|z| < 1$ auf \mathfrak{G} , dann besitzt R im Symmetriepunkt bzw. in $z = 0$ ein eigentliches globales Maximum bezüglich der Umgebung $|z| \leq 0,405736$.

Man kann diesen Satz natürlich auch direkt in \mathfrak{G} formulieren: Das 3-fach symmetrische Gebiet \mathfrak{G} besitzt im Symmetriepunkt einen grösseren konformen Radius als in denjenigen Punkten, deren hyperbolischer Abstand vom Symmetriepunkt $\leq \text{ArTg } 0,405736 = 0,430496\dots$ ist.

Für höhere Symmetrien ergeben sich Verbesserungen. Die angegebenen numerischen Schranken für die Dilatation usw. sind sicher nicht bestmöglich. Hier ist noch ein Arbeitsfeld für Anwendung der Variationsmethoden, vielleicht in Form eines Dissertationchens.

8. Beschränkungen des Umfangs. Im folgenden sollen Umgebungen von $z = 0$ gesucht werden, in denen neben $z = 0$ keine weitere stationäre Stelle von R liegen kann, wenn Beschränkungen des Umfanges bei \mathfrak{G} vorgegeben werden. Dabei wird dieser Umfang = Länge des Randes aufgefasst als (vgl. (3))

$$(18) \quad l = \lim_{r \rightarrow 1} r \cdot \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi})| d\varphi \\ = \lim_{r \rightarrow 1} r \cdot \int_0^{2\pi} (1 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots)(1 + \bar{A}_1 \bar{z} + \bar{A}_2 \bar{z}^2 + \dots) d\varphi \\ = 2\pi(1 + |A_1|^2 + |A_2|^2 + \dots)$$

und jetzt natürlich $< +\infty$ vorausgesetzt. Es gilt (nach L.Bieberbach) $l \geq 2\pi$, mit Gleichheit genau für $f(z) \equiv z$. Wenn wir die Grösse

$$(19) \quad \lambda = \frac{2\pi}{l - 2\pi}$$

einführen, stellt λ ein Mass für Kreisnähe des Randes von \mathfrak{G} dar.

a) Wir nehmen nun an, R besitzt im $z = 0$ eine stationäre Stelle (woraus $a_2 = 0$ bzw. $A_1 = 0$ folgte). Dann ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme einer weiteren stationären Stelle $z \neq 0$, falls (Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

bei (5))

$$[(2 - 3|z|^2)^2|z|^2 + (3 - 4|z|^2)^2|z|^4 + \dots] (|A_2|^2 + |A_3|^2 + \dots) < |z|^2,$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [(\nu+2)^2 - 2(\nu+2)(\nu+3)|z|^2 + (\nu+3)^2|z|^4]|z|^{2\nu} \left(\frac{l}{2\pi} - 1 \right) < 1,$$

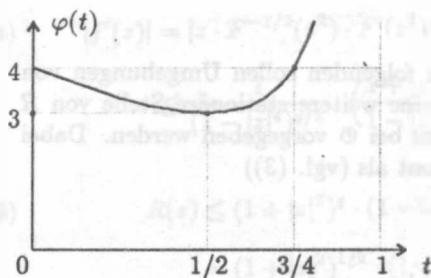
$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [(\nu+2)^2 - 2(\nu+1)(\nu+2) + (\nu+1)^2]|z|^{2\nu} + 3 - 4|z|^2 < \lambda,$$

$$(20) \quad \frac{4 - 7|z|^2 + 4|z|^4}{1 - |z|^2} < \lambda.$$

Die linke Seite schreiben wir nun zweckmäßig als $\varphi(|z|^2)$ mit

$$(21) \quad \varphi(t) = \frac{4 - 7t + 4t^2}{1 - t}.$$

Elementare Diskussion zeigt:



$\varphi(t)$ ist für $0 < t < \frac{1}{2}$ monoton fallend,
für $\frac{1}{2} < t < 1$ monoton steigend. Für
 $0 < t < \frac{3}{4}$ gilt $\varphi(t) < 4$.

Wenn wir zunächst nun den Fall $\lambda > 4$ (entsprechend $l < 2\pi + \frac{\pi}{2}$) betrachten, dann folgt nach (18) $|A_2| < \frac{1}{2}$, so dass R in $z = 0$ ein lokales Maximum besitzt. Ferner ist dann $\varphi(|z|^2) < \lambda$ für $|z| < \sqrt{3}/2$ und sogar noch etwas darüber hinaus für

$$(22) \quad |z| < \sqrt{\frac{7 - \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda - 15}}{8}}$$

erfüllt, so dass also zu (5) ein Widerspruch entsteht für $z \neq 0$.

Satz 6. Für $l < 2\pi + \frac{\pi}{2}$ besitzt R bei $a_2 = 0$ in $z = 0$ ein lokales Maximum und bei (22), also jedenfalls immer für $|z| < \sqrt{3}/2$, sonst keine weitere stationäre Stelle.

Bemerkung. Zum Vergleich dieses Kriteriums mit Satz 2 betrachten wir ein Beispiel. Es ergibt sich für das Kreisbogenzweieck von 5. wegen $l = 2\pi/\sin \frac{\pi\alpha}{2}$ für $\pi\alpha < 4,4285\dots$, dass dann für $|z| < \sqrt{3}/2$ neben $z = 0$ keine weitere stationäre Stelle vorliegt. Nach Satz 2 folgt: Für $\pi\alpha \leq \frac{4}{3}\pi = 4,1887\dots$ liegt in $z = 0$ ein globales Maximum vor.

Nun erhalten wir entsprechend noch für $3 < \lambda < 4$ (entsprechend $2\pi + \frac{1}{2} < l < 2\pi + \frac{2}{3}\pi$) zumindest für

$$(23) \quad \sqrt{\frac{7 - \lambda - \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda - 15}}{8}} < |z| < \sqrt{\frac{7 - \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda - 15}}{8}}$$

keine weitere stationäre Stelle.

Satz 7. Für $2\pi + \frac{1}{2} < l < 2\pi + \frac{2}{3}\pi$ besitzt R bei $a_2 = 0$ in $z = 0$ eine stationäre Stelle, aber für alle z mit (23) keine weitere stationäre Stelle.

Für $l > 2\pi + \frac{2}{3}\pi$ ergibt sich durch diese Betrachtung keine Aussage.

Bemerkung. Gewisse geringe Verbesserungen der Ungleichungen ergeben sich bei der zusätzlichen Annahme zentrischer Symmetrie bei $f(z)$ entsprechend (9) mit $k = 2$.

b) Wenn nun zusätzlich neben $a_2 = 0$ noch $a_3 = 0$ ist, was z.B. bei 3-fach symmetrischen Gebieten bzw. $f(z)$ entsprechend (9) mit $k = 3$ gilt, dann folgt ebenso aus (5) wegen $A_1 = A_2 = 0$:

Es ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme einer weiteren stationären Stelle $z \neq 0$, falls

$$(24) \quad \begin{aligned} & [(3 - 4|z|^2)^2|z|^4 + (4 - 5|z|^2)^2|z|^6 + \dots] (|A_3|^2 + |A_4|^2 + \dots) < |z|^2, \\ & |z|^2 \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+3)^2 |z|^{2\nu} - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu+2)(\nu+3) |z|^{2\nu} + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu+2)^2 |z|^{2\nu} \right] \left(\frac{l}{2\pi} - 1 \right) < 1, \\ & |z|^2 \frac{9 - 7|z|^2 + 9|z|^4}{1 - |z|^2} < \lambda. \end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Ungleichung schreiben wir nun zweckmäßig als $\psi(|z|^2)$ mit

$$(25) \quad \psi(t) = \frac{9t - 17t^2 + 9t^3}{1 - t}.$$

Elementare Diskussion zeigt: $\psi(t)$ ist für $0 < t < 1$ monoton steigend von 0 nach $+\infty$. Daraus folgt

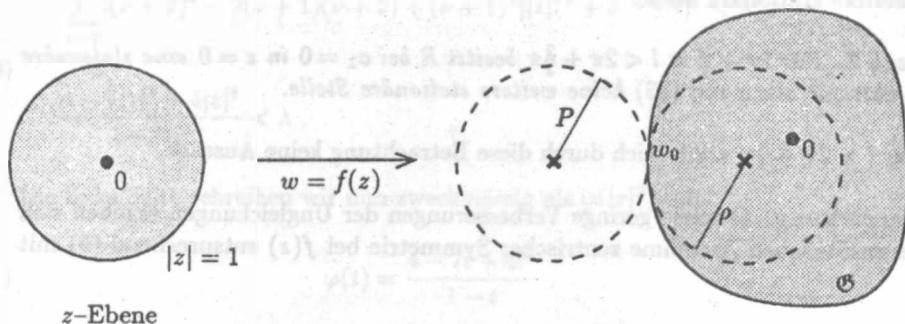
Satz 8. Es besitzt R bei $a_2 = a_3 = 0$ außer in $z = 0$ (wo dann ein lokales Maximum vorliegt) keine stationäre Stelle in der durch

$$(26) \quad \psi(|z|^2) < \lambda$$

beschriebenen Umgebung von $z = 0$.

9. Sätze bei Beschränkung der Krümmung. Man kann natürlich die Aussage, dass z.B. bei einem \mathfrak{G} mit k -facher Symmetrie zu 0 in diesem Punkte 0 der konforme Radius maximal wird, auch erhalten, wenn der Rand \mathfrak{C} geeigneten Krümmungsbeschränkungen unterworfen wird. Dies sei hier nur kurz angedeutet, ohne die zugehörigen elementaren Rechnungen explizit durchzuführen.

Sei z.B. \mathfrak{C} eine geschlossene glatte Jordankurve, bei der zu jedem



Randpunkt w_0 ein von aussen berührender Kreis des Radius P existiert, der vollständig ausserhalb \mathfrak{G} liegt, sowie ein Kreis des Radius ρ , der \mathfrak{C} von innen berührt und vollständig in \mathfrak{G} liegt, wobei der Mittelpunkt zu 0 einen Abstand besitzt, der $\leq \rho' < \rho$ ist (P, ρ und ρ' fest).

Nach dem Schwarzschen Lemma bzw. dem Prinzip vom hyperbolischen Mass ist für alle Punkte von \mathfrak{G} der konforme Radius \leq dem Wert des konformen Radius in diesem Punkte bezogen auf das Äussere des Kreises vom Radius P . Der letztere konforme Radius ist ausrechenbar, so dass man so für einen inneren Randstreifen bei \mathfrak{G} herausbekommt, dass dort der konforme Radius bezüglich $\mathfrak{G} \leq$ dem Wert in 0 ist. Für den Rest von \mathfrak{G} bekommt man die analoge Aussage z.B. bei k -facher Symmetrie (7.) und wenn besagter Randstreifen in der z -Ebene ein Urbild besitzt, welches einen (aussen von $|z| = 1$ berandeten) konzentrischen Kreisring hinreichend grosser "Breite" enthält. Letzteres lässt sich erreichen, da die Punkte auf der Innennormalen zu \mathfrak{C} (im Randpunkt w_0) innerhalb \mathfrak{G} einen hyperbolischen Abstand zu 0 besitzen, der \leq dem hyperbolischen Abstand (ausrechenbar) innerhalb des obigen Kreises mit Radius ρ .

SCHRIFTTUM

- [1] Ak sent'ev , L.A. , Kazantsev , A.V. , *A new property of the Nehari class and its applications*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 1989, no 8, 69–72 (Russian).
- [2] Golusin , G.M. , *Geometrische Funktionentheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957.
- [3] Gutljanskii , V.Ja. , *Area principle for a class of quasiconformal mappings*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol.212 (1973), 540–543 (Russian).
- [4] Haegi , H.R. , *Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrössen*, Comp. Math., vol.8 (1950), 81–111.
- [5] Krzyż , J.G. , *Some Remarks on the Maxima of Inner Radius*, this volume,

- [6] Kühnau, R., *Wertannahmeprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung*, Math. Nachr., vol.40 (1969), 1-11.
- [7] Kühnau, R., *Verzerrungssätze und Koeffizientenbedingungen vom Grunsky'schen Typ für quasikonforme Abbildungen*, Math. Nachr., vol.48 (1971), 77-105.
- [8] Kühnau, R., *Verzerrungsaussagen bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung und ein Extremalprinzip der Elektrostatik in inhomogenen Medien*, Comment. Math. Helv., vol.53 (1978), 408-428.
- [9] Kühnau, R., *Möglichst konforme Spiegelung an einer Jordankurve*, Jahresber.d.Deutsch. Math.-Verein., vol.90 (1988), 90-109.
- [10] Kühnau, R., *Zum konformen Radius bei nullwinkeligen Kreisbogendreiecken*, Mitt. Math. Sem. Giessen, Heft 211 (1992), 19-24.
- [11] Kühnau, R., Hoy, E., *Abschätzung des Wertebereichs einiger Funktionale bei quasikonformen Abbildungen*, Bull. Soc. Scienc. Lettres Łódź, vol.29, no 4 (1979), 1-9.
- [12] Minda, D., Overholt, M., *The minimum points of the hyperbolic metric*, Complex Variables (to appear).
- [13] Sachs, H., *Über Verallgemeinerungen der Steinerschen Symmetrisierung*, Wiss. Z.d. Martin-Luther-Univ. Halle - Wittenberg, Math.-Nat.Reihe vol.8 (1959), 755-764.
- [14] Yamashita, S., *The Peak Sets*, this volume, 99-112.

Fachbereich Mathematik-Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
D-06099 Halle an der Saale, Germany.

(received May 19, 1993)

