

Zakład Zastosowań Matematyki, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin
Zakład Matematyki Stosowanej, Politechnika Lubelska, Lublin

ZBIGNIEW BOGUCKI, JÓZEF ZDERKIEWICZ

Le rayon d'univalence de certaines fonctions analytiques

Promień jednolistości pewnych funkcji analitycznych

Радиус однолиственности некоторых аналитических функций

1. Introduction

Soient $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, et $g(z) = z + b_2 z^2 + \dots$, des fonctions analytiques dans le cercle unité K . Dans le travail [4] J. Krzyż et M. O. Reade, traitant des problèmes posés par Mac Gregor [5], [6], démontrent, entre autres, le théorème suivant.

Théorème 1. *Si g est univalente dans le cercle K et si dans celui-ci se trouvent vérifiées les conditions*

$$\operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} > 0 \quad \text{ou} \quad \left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1,$$

la fonction f est univalente et étoilée respectivement dans le cercle $|z| < 2 - \sqrt{3}$ ou dans $|z| < 1/3$.

R. M. Goel a établi dans [1] le résultat suivant.

Théorème 2. *Si g est univalente dans le cercle K et si*

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} - M \right| < M, \quad M > 1/2,$$

f est univalente et étoilée dans le cercle $|z| < \min \left(r_M, \operatorname{tgh} \frac{1}{2} \right)$, où r_M est la plus petite racine positive de l'équation

$$(1) \quad 1 - 3r - 3 \left(1 - \frac{1}{M} \right) r^2 + \left(1 - \frac{1}{M} \right) r^3 = 0.$$

De là on déduit, en particulier, le seconde partie de la conclusion du théorème 1.

Dans ce travail nous allons démontrer le théorème 3, qui comprendra comme cas particuliers les théorèmes 1 et 2. Nous profiterons des deux lemmes suivants.

Lemme 1 ([4]). *Si la fonction $g(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, est analytique dans le cercle K , l'inégalité*

$$\operatorname{Re} \frac{zg'(z)}{g(z)} \geq \frac{1 - |z|}{1 + |z|}$$

est vérifiée pour tout z tel que $|z| < \operatorname{tgh} \frac{1}{2} = 0,46212..$ L'égalité est réalisée

par la fonction de Koebe $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$.

Lemme 2 ([4]). *Les nombres A et B étant arbitrairement fixés et tels que $-1 < A \leq 1$, $-1 \leq B < A$, désignons par $P(A, B)$ la famille des fonctions $p(z)$ analytiques dans le cercle K , de la forme*

$$p(z) = \frac{1 + A\omega(z)}{1 + B\omega(z)},$$

où ω est une fonction analytique dans K satisfaisant aux conditions $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$. Alors on a, pour $z \in K$ fixé, $|z| = r$, $0 < r < 1$, et pour toute fonction $p \in P(A, B)$ la limitation exacte

$$\operatorname{Re} \frac{zp'(z)}{p(z)} \geq Y(r; A, B) = \begin{cases} Y_1(r; A, B) & \text{si } 0 < r \leq r^*, \\ Y_2(r; A, B) & \text{si } r^* < r < 1, \end{cases}$$

où

$$Y_1(r; A, B) = -\frac{(A-B)r}{(1-Ar)(1-Br)},$$

$$Y_2(r; A, B) = 2 \frac{\sqrt{UV} - (1 - AB r^2)}{(A-B)(1-r^2)} + \frac{A+B}{A-B},$$

$$U = U(r; A, B) = (1-B)(1+Br^2),$$

$$V = V(r; A, B) = (1-A)(1+Ar^2),$$

et $r^* = r^*(A, B)$ est la racine unique de l'équation

$$(2) \quad ABr^4 - 2ABr^3 + (2A + 2B - AB - 1)r^2 - 2r + 1 = 0$$

dans l'intervalle $0 < r < 1$ et

$$\lim_{r \rightarrow r^*+} Y_2(r; A, B) = Y_1(r^*; A, B). \text{ Si } A = 1, \text{ on a } r^* = 1.$$

Remarque. Dans le théorème 3 du travail [3], dont la première partie est citée ici comme lemme 2, il y a une faute d'impression; $Y_2(r; A, B)$ y a la forme

$$Y_2(r; A, B) = 2 \frac{\sqrt{UV - (1 - AB r^2)}}{(A - B)(1 - r^2)} + \frac{A + B}{A - B}.$$

2. Résultat principal

Théorème 3. Si la fonction $g(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, est analytique et univalente dans le cercle K , si $f(z) = z + b_2 z^2 + \dots$, est analytique dans ce cercle et si la condition suivante est vérifiée:

$$(3) \quad \frac{f(z)}{g(z)} = Q(z) \in P(A, B),$$

la fonction f est univalente et étoilée dans le cercle

$$|z| < \min \left[r(A, B), \operatorname{tgh} \frac{1}{2} \right],$$

où

$$r(A, B) = \begin{cases} r_1 & \text{si } r_1 \leq r^*, \\ r_2 & \text{si } r_1 \geq r^*, \end{cases}$$

r_1 étant la racine unique de l'équation

$$(4) \quad 1 - (1 + 2A)r + (2 + A)Br^2 - AB r^3 = 0$$

dans l'intervalle $(0, 1)$ et r_2 étant la plus petite racine de l'équation

$$(5) \quad \frac{1-r}{1+r} + Y_2(r; A, B) = 0,$$

dans l'intervalle $(r^*, 1)$, où r^* est le nombre défini dans le lemme 2. Le nombre $r(A, B)$ est le plus grand possible.

Démonstration. La fonction $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, étant analytique dans le cercle $|z| < R$, elle effectue la représentation univalente de ce cercle sur un domaine étoilé par rapport au point $w = 0$ si et seulement si elle satisfait dans celui-ci à la condition $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0$, il s'agira donc de prouver que $R = \min \left[r(A, B), \operatorname{tgh} \frac{1}{2} \right]$.

De (3) on tire

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{zg'(z)}{g(z)} + \frac{zQ'(z)}{Q(z)},$$

d'où, en tenant compte des lemmes 1 et 2, on obtient pour $|z| = r < \operatorname{tgh} \frac{1}{2}$

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} \geq \frac{1-r}{1+r} + Y(r; A, B).$$

Soit

$$h(r) = \frac{1-r}{1+r} + Y_1(r; A, B), \quad H(r) = \frac{1-r}{1+r} + Y_2(r; A, B)$$

pour $r \in (0, 1)$.

Comme

$$\frac{d}{dr} Y_1(r; A, B) = Y_1(r; A, B) \frac{1 - AB r^2}{r(1 - Ar)(1 - Br)} < 0$$

pour $0 < r < 1$ et $h(0) = 1$, $h(1) = 2(B - A) < 0$, l'équation $h(r) = 0$, équivalente à l'équation (4), admet dans l'intervalle $(0, 1)$ exactement une racine r_1 et on a $h(r) > 0$ pour $r \in (0, r_1)$.

Supposons que $r_1 > r^*$. Comme $H(r^*) > 0$ et $\lim_{r \rightarrow 1} H(r) = -\infty$, l'équation $H(r) = 0$ admet au moins une racine dans l'intervalle $(r^*, 1)$. Récapitulant ces considérations on peut constater que:

1° Si $r_1 \leq r^*$, on a

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0 \quad \text{pour } 0 < |z| < \min \left[r_1, \operatorname{tgh} \frac{1}{2} \right],$$

2° Si $r^* < r_1$, on a

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0 \quad \text{pour } 0 < |z| < \min \left[r_2, \operatorname{tgh} \frac{1}{2} \right].$$

La démonstration du théorème 3 est ainsi achevée.

3. Cas particuliers du théorème 3

1° Soit $A = 1$, $G = \frac{1}{M} - 1$, $M > \frac{1}{2}$.

Alors $r^* = 1$ et $r \left(1, \frac{1}{M} - 1 \right) = r_1$, où r_1 est maintenant la racine unique

de l'équation

$$1 - 3r - 3\left(1 - \frac{1}{M}\right)r^2 + \left(1 - \frac{1}{M}\right)r^3 = 0,$$

c'est-à-dire de l'équation (1).

Le lemme 1 du travail [2] entraîne l'équivalence

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)} - M\right| < M \Leftrightarrow \left(\frac{f}{g} \in P\left(1, \frac{1}{M} - 1\right)\right)$$

Du théorème 3 on obtient ainsi le théorème 2 et le théorème 1 lorsque $M = \infty$ ou $M = 1$.

2° Soit $A = 1 - 2\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, $B = -1$. Alors la condition (3) est équivalente à la condition $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} > \alpha$. Les équations (4), (5) et (2) prennent alors respectivement la forme:

$$(6) \quad (1 - 2\alpha)r^2 - 4(1 - \alpha)r + 1 = 0,$$

$$(7) \quad r^4 - 2r^3 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)r^2 + 2r - 1 = 0,$$

$$(8) \quad (1 - 2\alpha)r_4 + 2(2\alpha - 1)r^3 + 6\alpha r^2 + 2r - 1 = 0.$$

On constate ensuite que les équations (6), (7) et (8) admettent pour tout α , $0 \leq \alpha < 1$, des racines uniques dans l'intervalle $(0, 1)$, respectivement $r_1(\alpha)$, $r_2(\alpha)$ et $r^*(\alpha)$, r_1 et r_2 étant strictement croissantes, r^* strictement décroissante pour $\alpha \in (0, 1)$.

Soient α_0 , α_1 , α_2 les solutions des équations

$$r^*(\alpha_0) = r_1(\alpha) = r_2(\alpha_0),$$

$$r_1(\alpha_1) = \operatorname{tgh} \frac{1}{2}, \quad r_2(\alpha_2) = \operatorname{tgh} \frac{1}{2}$$

(ces solutions étant uniques, puisque les fonctions r_1 , r_2 , r^* sont strictement monotones). On trouve par un simple calcul que

$$\alpha_0 = 0,72\dots, \quad \alpha_1 = 0,44\dots, \quad \alpha_2 = 0,48\dots$$

Dans ce cas on peut formuler le théorème 3 sous la forme suivante:

Théorème 4. Si la fonction $g(z) = z + a_0z^2 + \dots$, est analytique et univalente dans le cercle K , si $f(z) = z + b_1z^2 + \dots$, est analytique dans ce cercle et si la condition suivante est vérifiée:

$$\operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} > \alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1,$$

la fonction f est univalente et étoilée dans le cercle

$$|z| < r(\alpha) = \begin{cases} r_1(\alpha) & \text{si } 0 \leq \alpha < \alpha_1, \\ \operatorname{tgh} \frac{1}{2} & \text{si } \alpha_1 \leq \alpha < 1, \end{cases}$$

où

$$r_1(\alpha) = \frac{1}{2(1-\alpha) + \sqrt{4\alpha^2 - 6\alpha + 3}},$$

et α_1 est la racine unique de l'équation $r_1(\alpha) = \operatorname{tgh} \frac{1}{2}$. Le nombre $r_1(\alpha)$ est le plus grand possible.

Remarque. Si $\alpha = 0$, on obtient du théorème 4 la première partie de la conclusion du théorème 1.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Goel, R. M., *The radius of univalence of certain analytic functions*, Tôhoku Math. J., 18 (1966), 398-403.
- [2] Janowski, W., *On the radius of starlikeness of some families of regular functions*, Comment. Math., 14 (1970), 137-149.
- [3] —, *Some extremal problems for certain families of analytic functions I*, Ann. Polon. Math., 28 (1973), 297-326.
- [4] Krzyż, J., Reade, M. O., *The radius of univalence of certain analytic functions*, Michigan Math. J., 11 (1964), 157-159.
- [5] MacGregor, T. H., *The radius of univalence of certain analytic functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 14 (1963), 514-520.
- [6] —, *The radius of univalence of certain analytic functions II*, Proc. Amer. Math. Soc., 14 (1963), 521-524.

STRESZCZENIE

Niech S będzie rodziną funkcji g , postaci

$$(*) \quad g(z) = z + a_2 z^2 + \dots,$$

analitycznych i jednolistnych w kole jednostkowym K , zaś $P(A, B)$, $-1 \leq B < A \leq 1$, niech oznacza rodzinę funkcji

$$p(z) = \frac{1 + A\omega(z)}{1 + B\omega(z)}$$

gdzie ω jest funkcją analityczną w kole K i spełniającą w nim warunki: $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$. W pracy tej udowadniamy następujące

Twierdzenie 3. Jeżeli $g \in S$, zaś f jest postaci (*) w kole K i spełniony jest tam warunek:

$$\frac{f(z)}{g(z)} \in P(A, B),$$

wówczas f jest funkcją jednolistną i gwiaździstą w kole $|z| < \min[r(A, B), \tanh 1/2]$, gdzie $r(A, B)$ jest określone w twierdzeniu 3. Z twierdzenia 3 przez odpowiedni dobór parametrów A, B dostaje się rezultaty otrzymane wcześniej przez Mac Gregora, J. Krzyża i M. O. Reade oraz R. M. Goela.

РЕЗЮМЕ

Пусть S обозначает класс функций g вида (*)

$$g(z) = z + a_2 z^2 + \dots,$$

аналитических и однолистных в единичном круге $P(A, B)$, $-1 \leq B < A \leq -1$ обозначает класс функций $P(z) = \frac{1 + A\omega(z)}{1 + B\omega(z)}$, где ω является аналитической функцией в K и удовлетворяет следующие условия:

$$\omega(0) = 0, |\omega(z)| < 1.$$

В настоящей работе доказана следующая теорема:

Теорема 3. Если $g \in S^c$ а f имеет вид (*) в круге K и удовлетворяет в этом круге условие:

$$\frac{f(z)}{g(z)} \in P(A, B),$$

тогда f является однолистной и звездообразной в круге $|z| < \min\left[r(A, B), \tanh \frac{1}{2}\right]$, где $r(A, B)$, определено в теореме 3. Из теоремы 3 посредством соответствующего подбора параметров A, B получаем результаты достигнутые раньше Мак Грегором, Й. Кшижом и М. О. Ридом, а также Р. М. Гоэлом.

