

Instytut Ekonomii Politycznej i Planowania,
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin

ANDRZEJ WESOŁOWSKI

Sur certaines estimations dans la classe $\Sigma^*(a, \gamma)$

O pewnych oszacowaniach w klasie $\Sigma^*(a, \gamma)$

О некоторых оценках в классе $\Sigma^*(a, \gamma)$

1. Nous déterminons par Σ la classe des fonctions $F(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1z + \dots$ méromorphiques et univalents dans le cercle K_1 où $K_1 = \{z: |z| < 1\}$. Que $\Sigma_a^* \subset \Sigma$ détermine la classe des fonctions $F(z)$ qui satisfont à la condition

$$(1,1) \quad \operatorname{Re} \left\{ -\frac{zF'(z)}{F(z)} \right\} > a, \quad z \in K_1, \quad 0 \leq a < 1.$$

Dans le cas particulier $a = 0$ la classe Σ_0^* se couvre avec la classe des fonctions Σ — étoilées. Les classes Σ_a^* et Σ_0^* étaient étudiées entre autres par M. S. Robertson [3] et W. A. Zmorowicz [5].

Par Ω nous déterminons la classe des fonctions $\omega(z)$ holomorphe dans K_1 qui satisfont aux hypothèses du lemme Schwarz $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$, $z \in K_1$.

Il faut enfin que P détermine la classe des fonctions $p(z) = 1 + p_1z + p_2z^2 + \dots$, holomorphe dans K_1 et qui satisfont à la condition

$$(1,2) \quad \operatorname{Re} p(z) > 0 \quad \text{pour } z \in K_1.$$

2. La classe $\Sigma_{(H)}^*$. Il est à remarquer, que dans la définition de la classe Σ_a^* nous avons l'idée de la subordination, c'est-à-dire on exige que

l'expression $-\frac{zF'(z)}{F(z)}$ se trouve dans le domaine univalent contenant

le point $w = 1$, qui est situé sur le demiplan droit. L'examen des sous-classes des fonctions de la classe Σ_0^* on peut réduire au problème plus général. Nous déterminons dans ce but par $H(z)$ une fonction fixée

volontaire de la classe P , de laquelle on suppose quelle est une fonction univalente dans K_1 . L'image du cercle K_1 par la transformation de $H(z)$, que nous déterminons $H(K_1)$, est située dans le demiplan droit et qui contient le point $w = 1$.

Déterminons maintenant par $\Sigma_{(H)}^*$ la classe des fonctions $F(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$ telles que l'expression $-\frac{zF'(z)}{F(z)}$ est située dans le domaine $H(K_1)$.

L'inscription $\varphi(z) \rightarrow_1 \Phi(z)$ signifie la subordination du domaine la fonction $\varphi(z)$ au majorante $\Phi(z)$ dans le cercle K_1 , cela veut dire que $\varphi(0) = \Phi(0)$ et qu'il existe $\omega(z) \in \Omega$ telle, que $\varphi(z) = \Phi(\omega(z))$.

La classe $\Sigma_{(H)}^*$ on peut définir d'une manière suivante:

$$(2,1) \quad F(z) \in \Sigma_{(H)}^* \Leftrightarrow -\frac{zF'(z)}{F(z)} \rightarrow_1 H(z), \quad z \in K_1.$$

Si dans la définition (2,1) on accepte que $H(z)$ est une fonction qui transforme d'une manière univalente K_1 sur le demiplan $\operatorname{Re} w > a$, $0 \leq a < 1$, alors la classe $\Sigma_{(H)}^*$ passera dans la classe Σ_a^* . De la définition (2,1) il en résulte qu'il existe $\omega(z) \in \Omega$ telle, que

$$(2,2) \quad -\frac{zF'(z)}{F(z)} = H(\omega(z))$$

Puisque comme on sait pour chaque fonction $\omega(z) \in \Omega$ existe une fonction $p(z) \in P$ telle, que

$$(2,3) \quad \omega(z) = \frac{p(z)-1}{p(z)+1} \quad \text{pour } z \in K_1$$

on peut donc inscrire (2,2) sous la forme

$$(2,4) \quad -\frac{zF'(z)}{F(z)} = H\left(\frac{p(z)-1}{p(z)+1}\right) \quad z \in K_1$$

De la dernière égalité après des simples calculs nous obtenons la formule structurale pour la classe $\Sigma_{(H)}^*$

$$(2,5) \quad F(z) = \frac{1}{z} \cdot \exp \left\{ \int_0^z \frac{1}{z} \left[1 - H\left(\frac{p(z)-1}{p(z)+1}\right) \right] dz \right\}.$$

Au contraire chaque fonction donnée par la formule (2,5) appartient à $\Sigma_{(H)}^*$ ce qui est immédiatement à vérifier.

3. La classe $\Sigma_{(a, \gamma)}^*$. Par un cas particulier de la classe définie $\Sigma_{(H)}^*$ dans le point 2. est aussi la classe $\Sigma_{(a, \gamma)}^*$ qui je définis d'une manière suivante:

$$(3,1) \quad \Sigma_{(a, \gamma)}^* = \Sigma_{(H)}^*, \text{ où } H = H(z, a, \gamma) = \left[(1-a) \frac{1+z}{1-z} + a \right]^\gamma$$

signifie cette branche uniforme de la fonction $\left[(1-a) \frac{1+z}{1-z} + a \right]^\gamma$ qui pour $z = 0$ est égale 1, $z \in K_1$, $0 \leq a < 1$, $0 < \gamma \leq 1$. Cette classe dans les cas limites se confondra avec les classes étudiées dans la littérature, par exemple $\Sigma_{(a, 1)}^* = \Sigma_a^*$, $\Sigma_{(0, 1)}^* = \Sigma_0^*$. Dans le cas $a = 0$, $0 < \gamma < 1$ la classe $\Sigma_{(0, \gamma)}^*$ est la classe des fonctions $F(z)$ dont l'expression $-zF'(z)/F(z)$ pour $z \in K_1$ change dans l'angle symétrique par rapport à l'axe réelle dont le sommet est situé à l'origine et dont les bras sont inclinés jusqu'à la direction positive sous l'angle $\beta = \pm \gamma\pi/2$. La fonction $H(z, a, \gamma)$ est univalente dans K_1 et transforme le cercle K_1 sur le domaine convexe $H(K_1, a, \gamma)$ dont l'équation du frontière l'auteur donne dans le travail [4]. Dans la fonction ainsi choisi $H = H(z, a, \gamma)$ la formule structurale (2,5) passe dans la formule structurale pour la classe des fonctions $\Sigma^*(a, \gamma)$ dans la forme

$$(3,2) \quad F(z) = \frac{1}{z} \exp \left\{ \int_0^z \frac{1}{z} [1 - ((1-a)p(z) + a)^\gamma] dz \right\}, \quad p(z) \in P.$$

4. Certains problèmes extrémaux dans la classe $\Sigma_{(a, \gamma)}^*$.

Theorème 4.1. Dans la classe $\Sigma_{(a, \gamma)}^*$ pour chaque z fixé $|z| = r < 1$ le domaine de la variabilité $\left(-\frac{zF'(z)}{F(z)} \right)^{1/\gamma}$ est le cercle fermé

$$(4,1) \quad \left| \left(-\frac{zF'(z)}{F(z)} \right)^{1/\gamma} - \frac{1 + r^2(1-2a)}{1-r^2} \right| \leq \frac{2r(1-a)}{1-r^2}.$$

La fonction extrémale est la fonction

$$(4,2) \quad F(z) = \frac{1}{z} \exp \left\{ \int_0^z \frac{1}{z} \left[1 - \left(\frac{1 + (1-2a)z}{1-z} \right)^\gamma \right] dz \right\}.$$

Démonstration. De la définition de la classe il en résulte, que

$$-\frac{zF'(z)}{F(z)} = [(1-a)p(z) + a]^\gamma$$

d'où

$$p(z) = \frac{\left(-\frac{zF'(z)}{F(z)}\right)^{1/\gamma} - a}{1-a}$$

Comme on sait le domaine de la variabilité $p(z) \in P$ pour z fixé, $|z| = r < 1$ est le cercle, dont la médiane située sur l'axe réel a les buts dans les points $\frac{1-r}{1+r}$, $\frac{1+r}{1-r}$. De là il en résulte immédiatement le thèse du théorème 4.1.

Comme les corollaires du théorème ci-dessus nous obtenons les estimations exactes: suivantes

$$(4,3) \quad \left(\frac{1-r(1-2a)}{1+r}\right)^{\gamma} \leq \left|\frac{zF'(z)}{F(z)}\right| \leq \left(\frac{1+r(1-2a)}{1-r}\right)^{\gamma}, \quad |z| = r < 1$$

$$(4,4) \quad \left(\frac{1-r(1-2a)}{1+r}\right)^{\gamma} \leq \operatorname{Re} \left\{ -\frac{zF'(z)}{F(z)} \right\} \leq \left(\frac{1+r(1-2a)}{1-r}\right)^{\gamma}, \quad |z| = r < 1$$

$$(4,5) \quad \left| \arg \left\{ -\frac{zF'(z)}{F(z)} \right\} \right| \leq \gamma \arcsin \frac{2(1-a)r}{1+r^2(1-2a)}, \quad |z| = r < 1.$$

Dans les cas limites nous avons des estimations exactes dans les limites classes correspondantes des fonctions.

Théorème 4.2. Pour $F(z) \in \Sigma_{(a,\gamma)}^*$, pour chaque z fixé, $|z| = r < 1$ est l'estimation exacte

$$(4,6) \quad \frac{1}{r} \exp \left\{ \int_0^r \frac{1}{r} \left[1 - \left(\frac{1+r(1-2a)}{1-r} \right)^{\gamma} \right] dr \right\} \leq |F(z)| \\ \leq \frac{1}{r} \exp \left\{ \int_0^r \frac{1}{r} \left[1 - \left(\frac{1-r(1-2a)}{1+r} \right)^{\gamma} \right] dr \right\}, \quad |z| = r < 1$$

La fonction extrémale est la fonction donnée par la formule (4,2).

Démonstration. On sait, que

$$\ln zF(z) = \ln |zF(z)| + i \arg zF(z)$$

de là

$$-\frac{zF'(z)}{F(z)} = 1 - r \frac{\partial}{\partial r} \ln |zF(z)| - ir \frac{\partial}{\partial r} \arg zF(z) \quad |z| = r$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{Re} \left\{ -\frac{zF'(z)}{F(z)} \right\} = 1 - r \frac{\partial}{\partial r} \ln |zF(z)|$$

En profitant de (4,4) nous avons

$$\frac{1}{r} \left[1 - \left(\frac{1+r(1-2\alpha)}{1-r} \right)^\gamma \right] \leq \frac{\partial}{\partial r} \ln |zF'(z)| \leq \frac{1}{r} \left[1 - \left(\frac{1-r(1-2\alpha)}{1+r} \right)^\gamma \right].$$

Intégrant par les côtés depuis 0 jusqu'à r nous avons

$$\exp \left\{ \int_0^r \frac{1}{r} \left[1 - \left(\frac{1+r(1-2\alpha)}{1-r} \right)^\gamma \right] dr \right\} \leq |zF'(z)| \exp \left\{ \int_0^r \frac{1}{r} \left[1 - \left(\frac{1-r(1-2\alpha)}{1+r} \right)^\gamma \right] dr \right\}$$

De là après la division des côtés par r nous obtenons le théorème du théorème 4,2.

Dans les cas limites de (4,6) nous obtenons des estimations connues $|F(z)|$ respectivement dans les classes des fonctions regarde par exemple [2].

$$\frac{(1-r)^{2(1-\alpha)}}{r} \leq |F(z)| \leq \frac{(1+r)^{2(1-\alpha)}}{r}$$

Théorème 4,3. Si $F(z) = 1/z + a_0 + a_1 z + \dots$, cela

$$(4,7) \quad \begin{aligned} \text{a) } & |a_0| \leq 2\gamma(1-\alpha) \\ \text{b) } & |a_1| \leq \gamma(1-\alpha) \end{aligned}$$

Les fonctions extrémales dans les cas a) et b) nous avons respectivement des fonctions:

$$\begin{aligned} F_a(z) &= \frac{1}{z} \exp \left\{ \int_0^z \frac{1}{z} \left[1 - \left(\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z} \right)^\gamma \right] dz \right\} \\ F_b(z) &= \frac{1}{z} \exp \left\{ \int_0^z \frac{1}{z} \left[1 - \left(\frac{1+(1-2\alpha)z^2}{1-z^2} \right)^\gamma \right] dz \right\} \end{aligned}$$

Démonstration. Que $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots \in P$ et que

$$F(z) = \frac{1}{z} \exp \left\{ \int_0^z \frac{1}{z} [1 - ((1-\alpha)p(z) + \alpha)^\gamma] dz \right\}$$

Alors

$$-\frac{zF'(z)}{F(z)} = [(1-\alpha)p(z) + \alpha]^\gamma.$$

de là

$$(4,8) \quad \frac{1 - a_1 z - 2a_2 z^3 - \dots}{1 + a_0 z + a_1 z^2 + a_2 z^3 + \dots} = [1 + (1-\alpha)(p_1 z + p_2 z^2 + \dots)]^\gamma$$

Parce que

$$[1 + (1 - a)(p_1 z + p_2 z^2 + \dots)]^\gamma = \\ = 1 + \gamma(1 - a)p_1 z + \gamma(1 - a) \left[p_2 - \frac{1}{2}(1 - a)(1 - \gamma)p_1^2 z^2 + \dots \right]$$

or de (4,8) par la comparaison des coefficients dans les puissances égales nous obtenons

$$(4,9) \quad a_0 = -\gamma(1 - a)p_1 \\ a_1 = -\frac{1}{2}\gamma(1 - a) \left[p_2 - \frac{1}{2}(1 - a)(1 + \gamma)p_1^2 \right]$$

Parce que comme on sait $|p_1| \leq 2$ or la première inégalité dans (4,7) est démontrée.

Mettons dans la deuxième inégalité (4,9)

$$\frac{1}{2}(1 - a)(1 + \gamma) = \delta$$

alors

$$|a_1| = \frac{1}{2}\gamma(1 - a)|p_2 - \delta p_1^2|$$

où $0 < \delta \leq 1$ pour $0 \leq a < 1$ et $0 < \gamma \leq 1$.

Que $\omega(z) = \omega_1 z + \omega_2 z^2 + \dots \in \Omega$ alors la fonction $p(z) \in P$ est liée avec la fonction $\omega(z)$ par la relation

$$\omega(z) = \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1}$$

De là un calcul facile montre, que

$$p_1 = 2\omega_1, \quad p_2 = 2(\omega_1^2 + \omega_2)$$

c'est-à-dire

$$(4,10) \quad |a_1| = \gamma(1 - a)|\omega_2 + (1 - 2\delta)\omega_1^2|$$

Or, il suffit d'estimer $|\omega_2 + (1 - 2\delta)\omega_1^2|$.

Puisque $|\omega_2| \leq 1 - |\omega_1|^2$ regarde par exemple [1], or $|\omega_2 + (1 - 2\delta)\omega_1^2| \leq 1 - 2\delta|\omega_1|^2 < 1$ pour $0 < \delta \leq 1/2$ ou

$$|\omega_2 + (1 - 2\delta)\omega_1^2| \leq 1 - 2(1 - \delta)|\omega_1|^2 < 1 \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2} \leq \delta \leq 1.$$

Or finalement de (4,10) nous obtenons l'inégalité

$$|a_1| \leq \gamma(1 - a)$$

Remarque. Les côtés droits des estimations des coefficients a_0 et a_1 suggèrent, que pour chaque n dans la classe $\Sigma^*(\alpha, \gamma)$ une estimation exacte est véritable

$$|a_n| \leq \frac{2\gamma(1-\alpha)}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

et fonctions extrémales sont des fonctions

$$F(z) = \frac{1}{z} \exp \left\{ \int_0^z \frac{1}{z} \left[1 - \frac{1 + (1-2\alpha)z^{n+1}}{1-z^{n+1}} \right]^\gamma dz \right\}.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Гелузин Т. М. Геометрическая теория функций каютнексного переменного Мпска 1966.
- [2] Libera R.J., and Liwinston A.E., *Bounded functions with positive real part*, Czechoslovak Math. J. 22 (1972), 195-209.
- [3] Robertson M.S., *Extremal problems for analytic functions with positive real part and applications*, Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963), 236-253.
- [4] Wołowski, A., *Des certains résultats obtenus en classe*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A, 25 (1971), 121-130.
- [5] Zmorowicz, W.A., *On bounds of convexity for starlike functions of order α in circle $|z| < 1$ and in the circular region $0 < |z| < 1$* Mat. Sb., 68 (1965), 518-526.

STRESZCZENIE

W zdefiniowanej klasie $\Sigma^*(\alpha, \gamma)$ funkcji $F(z)$ meromorficznych w K_1 podano dokładne oszacowania

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zF'(z)}{F(z)} \right\}, \arg \frac{zF'(z)}{F(z)}, \left| \frac{zF'(z)}{F(z)} \right|$$

jak również $|F(z)|$ oraz współczynników a_0 i a_1 .

РЕЗЮМЕ

В определенном классе $\Sigma^*(\alpha, \gamma)$ функций $F(z)$ мероморфных в K_1 даны точные оценки

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zF'(z)}{F(z)} \right\}, \arg \frac{zF'(z)}{F(z)}, \left| \frac{zF'(z)}{F(z)} \right|$$

а также $|F(z)|$ и коэффициентов a_0 и a_1 .

