ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XXIX, 3 SECTIO A 1975

Instytut Ekonomii Politycznej i Planowania,
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin

CZESŁAWA BUCKA, KRYSTYNA CIOZDA

Sur l'interprétation géométrique de certains sous-classes de la classe S

O interpretacji geometrycznej pewnych podklas klasy S

О геометрической интерпретации некоторых подклассов класса S

1. Introduction. Dans le travail [2] nous avons étudié la classe $S_{(\alpha,\beta)}$, $\alpha\in(0,2)$, $\beta\in(-2,0)$, $\alpha-\beta\leqslant 2$, des fonctions holomorphes et univalentes dans le cercle K_1, où $K_r=\{z\colon |z|<r\}$, normées par les conditions: $f(0)=0$, $f'(0)=1$ et telles que

$$\beta\frac{\pi}{2}<\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}<\alpha\frac{\pi}{2}\quad \text{pour } z\in K_1.$$

Si $\alpha=1$ et $\beta=-1$, $S_{(1,-1)}$ devient la classe S^* des fonctions étoilées, c'est-à-dire des fonctions satisfaisant à la condition:

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>0\quad \text{pour } z\in K_1.$$

Si $\beta=-\alpha$, $S_{(\alpha,-\alpha)}$ est la classe S_α, $\alpha\in(0,1\rangle$, des fonctions α-angulairement étoilées, qu'ont étudiée, entre autres, D. A. Brannan, W. E. Kirwan [1] et J. Stankiewicz [3]. Enfin, si $\beta=\alpha-2$, on a $S_{(\alpha,\alpha-2)}=\hat{S}_\delta$, $\delta=(\alpha-1)\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire la classe des fonctions spiralées [4], fonctions qui satisfont à la condition:

$$\mathrm{Re}\left\{e^{-i\delta}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>0\quad \text{pour } z\in K_1.$$

Ces classes admettent les interprétations géométriques suivantes: Si la fonction f appartient à la classe S^*, le domaine $f(K_r)$ est pour tout $r\in(0,1\rangle$ tel que son complémentaire est la somme — au sens de la théorie des ensembles — des demi-droites dont les prolongements passent par l'origine des coordonnées. Si la fonction f appartient à la classe S_α, le domaine $f(K_r)$ est pour tout $r\epsilon(0,1\rangle$ un domaine α-angulairement étoilé [3], c'est-à-dire que si le domaine $f(K_r)$ ne contient pas un point quelconque w_0, il ne contient pas non plus tout l'angle de sommet w_0 et d'ouverture $(1-\alpha)\pi$ et dont la bissectrice prolongée passe par l'origine.

Enfin, si f appartient à $\check{S}_\delta$, $\delta = (\alpha-1)\dfrac{\pi}{2}$, le domaine $f(K_r)$ est pour tout $r\epsilon(0,1\rangle$ tel que si un point quelconque ne lui appartient pas, le domaine ne contient pas non plus l'arc de spirale logarithmique $w = w_0\times \times\exp\left\{it+t\cdot \mathrm{tg}\,\alpha\dfrac{\pi}{2}\right\}$, dont le coefficient d'inclinaison est $m = \mathrm{tg}\,\alpha\dfrac{\pi}{2}$, qui passe par le point w_0 et qui est situé dans le cercle $|w|<|w_0|$, c'est-à-dire que le domaine est δ-spiralé par rapport à l'origine.

L'interprétation géométrique de la classe $S_{(\alpha,\beta)}$ pour α,β quelconques, $\alpha\epsilon(0,2)$, $\beta\epsilon(-2,0)$, $\alpha-\beta\leqslant 2$, nous a semblé un problème intéressant; nous l'étudions dans la suite de ce travail.

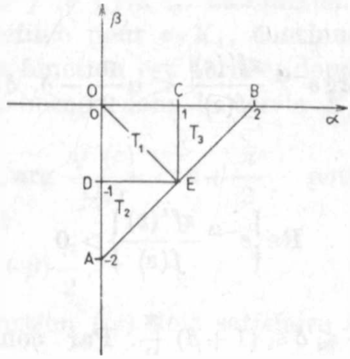
2. Définition. On dit que le domaine D est (α,β)-angulairement spiralé par rapport à l'origine, s'il contient celle-ci et si, le point w_0 n'appartenant pas au domaine D, le domaine ne contient pas non plus tous les arcs de spirales logarithmiques d'équations $w = w_0\exp\{it+t\cdot\mathrm{ctg}\,\delta\}$, $t\epsilon(-\infty,+\infty)$, $-(1-\alpha)\dfrac{\pi}{2}\leqslant\delta\leqslant(1+\beta)\dfrac{\pi}{2}$, passant par w_0, de foyers au point $w=0$ et contenus dans le complémentaire du cercle $|w|<|w_0|$.

Le domaine D ainsi défini est un domaine δ-spiralé par rapport à l'origine pour tout $\delta\epsilon\left\langle -(1-\alpha)\dfrac{\pi}{2},\ (1+\beta)\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$, où l'on entendra par domaine 0-spiralé un domaine étoilé par rapport à l'origine (dans ce cas, l'angle δ que fait le vecteur tangent à la spirale en un point quelconque de celle-ci avec le rayon-vecteur de ce point est égal à zéro, ce qui veut dire que l'arc de spirale est une demi-droite passant par w_0, dont le prolongement passe par l'origine).

Si α et β sont fixés, $\alpha\epsilon(0,2)$, $\beta\epsilon(-2,0)$, $\alpha-\beta\leqslant 2$, la classe de tous ces domaines sera appelée famille $G_{(\alpha,\beta)}$.

Le système de coordonnées α,β étant rectangulaire, le domaine dans lequel varient les paramètres α et β est un triangle de sommets $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$. Partageons ce triangle en trois parties: le carré T_1, le triangle T_2 et le triangle T_3, comme le montre la figure.
Si $(\alpha,\beta) = (1,-1) = E$, les domaines $D\epsilon G_{(\alpha,\beta)}$ sont étoilés par rapport à l'origine.

Si $(\alpha,\beta)\epsilon OE$, les domaines $D\epsilon G_{(\alpha,\beta)}$ sont α-angulairement étoilés par rapport à l'origine.



Enfin si $(\alpha, \beta) \epsilon AB$, les domaines $D \epsilon G_{(\alpha,\beta)}$ sont $-(1-\alpha)\dfrac{\pi}{2}$ — spiralés ou $(1+\beta)\dfrac{\pi}{2}$ — spiralés par rapport à l'origine.

Pour les points (α, β) qui appartiennent à l'intérieur du carré T_1, les domaines $D \epsilon G_{(\alpha,\beta)}$ sont tels que si un domaine ne contient pas le point w_0, il ne contient pas non plus "l'angle spiralé" de sommet au point w_0, dont les côtés sont des arcs de spirales logarithmiques d'équations

$$w = w_0 \exp\{it + t \cdot \operatorname{ctg} \delta_1\},\ t \epsilon (-\infty, +\infty),\ \delta_1 = -(1-\alpha)\frac{\pi}{2} < 0$$

et

$$w = w_0 \exp\{it + t \cdot \operatorname{ctg} \delta_2\},\ t \epsilon (-\infty, +\infty),\ \delta_2 = (1+\beta)\frac{\pi}{2} > 0.$$ Dans ce cas, le rayon-vecteur du point w_0 est situé à l'intérieur de cet angle.

Pour les points (α, β) appartenant à l'intérieur du triangle T_2 ou à l'intérieur du triangle T_3, les domaines $D_{(\alpha,\beta)}$ sont tels que si un domaine ne contient pas le point w_0, il ne contient pas non plus "l'angle spiralé" de sommet au point w_0, sont les côtés dont des arcs de spirales logarithmiques d'équations $w = w_0 \exp\{it + t \cdot \operatorname{ctg} \delta_1\}$ et $w = w_0 \exp\{it + t \cdot \operatorname{ctg} \delta_2\}$, $t \epsilon (-\infty, \infty)$, où $\delta_1 < 0$ et $\delta_2 < 0$ dans le cas du triangle T_2, $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ dans le cas du triangle T_3. Dans ces deux cas "l'angle spiralé" est situé de part ou d'autre du rayon-vecteur du point w_0.

Théorème 1. *Si $f \epsilon S_{(\alpha,\beta)}$, le domaine $f(K_1)$ appartient à la famille $G_{(\alpha,\beta)}$.*

Démonstration. En vertu de la définition de la classe $S_{(\alpha,\beta)}$ on a

$$\beta \frac{\pi}{2} < \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} < \alpha \frac{\pi}{2}.$$

De là on tire

$$\beta\frac{\pi}{2}-\delta<\arg e^{-i\delta}\frac{zf'(z)}{f(z)}<a\frac{\pi}{2}-\delta,\ \delta\epsilon\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),$$

donc

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-i\delta}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>0$$

pourvu que $-(1-a)\frac{\pi}{2}\leqslant\delta\leqslant(1+\beta)\frac{\pi}{2}$. Par conséquent, si $f\epsilon S_{(a,\beta)}$, il s'ensuit que $f\epsilon\check{S}_\delta$ pour tout $\delta\epsilon\left\langle-(1-a)\frac{\pi}{2},(1+\beta)\frac{\pi}{2}\right\rangle$. Des propriétés géométriques des classes $\check{S}_\delta$ il résulte que le domaine $f(K_1)$ est un domaine δ-spiralé par rapport à l'origine pour tout $\delta\epsilon\left\langle-(1-a)\frac{\pi}{2},(1+\beta)\frac{\pi}{2}\right\rangle$, et que par suite c'est un domaine appartenant à la famille $G_{(a,\beta)}$.

Théorème 2. *Si $f\epsilon S_{(a,\beta)}$, les domaines $D_r=f(K_r)$, où $r\epsilon(0,1\rangle$, sont des domaines de la famille $G_{(a,\beta)}$.*

Démonstration. Ce théorème résulte du fait que $S_{(a,\beta)}=\check{S}_{(1+\beta)\frac{\pi}{2}}\cap\cap\check{S}_{-(1-a)\frac{\pi}{2}}$, et que si la fonction $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ représente le cercle K_1 sur un domaine δ-spiralé, les domaines $f(K_r)$ pour $r<1$ sont aussi des domaines δ-spiralés [4].

Théorème 3. *Si la fonction $w=f(z)=a_1z+a_2z^2+\ldots$ représente le cercle-unité K_1 sur un domaine $D\epsilon G_{(a,\beta)}$, la fonction $\varphi(z)=f(z)/f'(0)$ appartient à la classe $S_{(a,\beta)}$.*

Démonstration. Si la fonction $f(z)$ représente K_1 sur un domaine dont la frontière est analytique et si le domaine D est δ-spiralé, la condition suivante se trouve remplie: $\operatorname{Re}\{e^{-i\delta}zf'(z)/f(z)\}>0$. Si la frontière du domaine D n'est pas analytique, on considère les fonctions $f(rz)$, $0<r<1$, qui représentent K_1 sur des domaines D_r, δ-spiralés et dont la frontière est analytique.

Si un domaine est δ-spiralé, l'angle que fait le vecteur tangent à la frontière avec le rayon-vecteur du point de contact est contenu dans l'intervalle $\langle\delta,\delta+\pi\rangle$. Par conséquent l'angle que font le vecteur normal et le rayon-vecteur est contenu dans l'intervalle

$$\left\langle\delta-\frac{\pi}{2},\delta+\frac{\pi}{2}\right\rangle.$$

Cet angle est égal à $\arg\{e^{i\theta}f'(e^{i\theta})/f(e^{i\theta})\}$. La fonction $\arg\{zf'(z)/f(z)\}$ est une fonction harmonique, définie pour $z\in K_1$, continue sur la frontière. Sur la circonférence C_1 cette fonction est bornée, donc, en vertu du principe de l'extrémum, elle est bornée dans le cercle K_1. Par conséquent

$$\delta-\frac{\pi}{2}<\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}<\delta+\frac{\pi}{2}\quad \text{pou } z\in K_1,$$

où $-(1-a)\dfrac{\pi}{2}\leqslant\delta\leqslant(1+\beta)\dfrac{\pi}{2}$.

Il en résulte que la fonction $f(z)$ doit satisfaire à la condition

$$\beta\frac{\pi}{2}<\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}<a\frac{\pi}{2}.$$

Remarque 1. Si $a\in(0,1)$ et $\beta\in(-1,0)$, les domaines de la famille $G_{(a,\beta)}$ ont la propriété suivante: si un point w_0 n'appartient pas au domaine $D\in G_{(a,\beta)}$, ce domaine ne contient pas non plus tout l'angle de sommet au point w_0 et d'ouverture $(2+\beta-a)\dfrac{\pi}{2}$, dont les côtés sont les tangentes aux spirales d'équations $w=w_0\exp\{it+t\cdot\operatorname{ctg}\delta\}$, où $\delta=-(1-a)\dfrac{\pi}{2}$ et $\delta=(1+\beta)\dfrac{\pi}{2}$ et $t\in(-\infty,+\infty)$, menées au point w_0.

Remarque 2. Si $a=1$ et $\beta\in(-1,0)$ ou $\beta=-1$ et $a\in(0,1)$, les domaines de la famille $G_{(a,\beta)}$ ont la propriété suivante: si un point w_0 n'appartient pas au domaine $D_{(a,\beta)}$, ce domaine ne contient pas non plus l'angle de sommet au point w_0 et d'ouverture $-(1-a)\dfrac{\pi}{2}$ ou $(1+\beta)\dfrac{\pi}{2}$, dont l'un côté est la demi-droite joignant les points w_0 et ∞, et telle que son prolongement passe par l'origine, et l'autre côté est tangent ou point w_0 à la spirale d'équation $w=w_0\exp\{it+t\operatorname{ctg}\delta\}$. $t\in(-\infty,+\infty)$, où respectivement $\delta=-(1-a)\dfrac{\pi}{2}$ ou $\delta=(1+\beta)\dfrac{\pi}{2}$. A une telle famille de domaines correspond la classe des fonctions qui satisfont dans le cercle K_1 à la condition

$$\beta\frac{\pi}{2}<\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}<a\frac{\pi}{2},\quad \beta\in(0,-1)$$

ou

$$-\frac{\pi}{2}<\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}<\frac{\pi}{2},\quad a\in(1,0).$$

RÉFÉRENCES

[1] Brannan D.A., Kirwan W.E., *On Some Classes of Bounded Univalent Functions*, J. London Math. Soc., 1 (1969), 413-443.

[2] Bucka Cz., Ciozda K., *On a new subclass of the class S*, Ann. Polon. Math., 28 (1973), 153-161.

[3] Stankiewicz J., *Quelques problèmes extrémaux dans les classes des fonctions a-angulairement étoilées*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 20 (1966), p. 000-000

[4] Špaček L., *Prispevek k teorii funkci prostych*, Časopis Pest. Mat. 62 (1933), 12-19.

STRESZCZENIE

W niniejszej pracy podajemy geometryczną interpretację klasy $S_{(\alpha,\beta)}$ badanej w pracy [2]. Dowodzimy również równoważności wprowadzonych definicji: analitycznej i geometrycznej tej klasy.

РЕЗЮМЕ

В данной работе представлена геометрическая интерпретация класса $S_{(\alpha,\beta)}$ исследованного в работе [2]. Доказано также равносильности аналитического и геометрического определения этого класса.