

Zespół Matematyki, Wyższa Szkoła Inżynierska, Lublin
Instytut Matematyki, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin

LEOPOLD KOCZAN, WOJCIECH SZAPIEL

**Sur certaines classes de fonctions holomorphes
définies par une intégrale de Stieltjes**

O pewnych klasach funkcji holomorficznych określonych całką Stieltjesa

O некоторых классах голоморфных функций, определяемых интегралом Стильтеса

1. Introduction

Supposons

1° que pour tout t , $a \leq t \leq b$, $J(z, t)$ soit une fonction holomorphe dans $\Delta = \{z: |z| < 1\}$ de la forme

$$J(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) z^k, \quad p_1(t) = 1,$$

telle que $\text{Lin}(p_1, p_2, \dots)$ soit un ensemble dense dans l'espace des fonctions réelles continues sur $[a, b]$;

2° que la fonction $J(z, t)$ soit continue sur $\Delta \times [a, b]$.

Désignons par A la classe des fonctions définies dans Δ par la formule

$$(1.1) \quad f(z) = \int_a^b J(z, t) da(t) = z + c_2 z^2 + \dots,$$

où

$$(1.2) \quad a(t) \text{ est une fonction non décroissante dans l'intervalle } [a, b], \\ \text{telle que } a(a) = 0, a(b) = 1, 2a(t) = a(t^-) + a(t^+).$$

La classe A est un sous-ensemble convexe et compact de la famille des fonctions holomorphes dans Δ , muni d'une topologie définie par la convergence presque uniforme dans Δ .

On constate aisément qu'entre les fonctions $f \in A$ et les fonctions définies par (1.2) il existe une correspondance biunivoque exprimée par la formule (1.1). Nous désignerons donc par $a_\gamma(t)$ la fonction définie par les formules (1.1) et (1.2).

Soit E l'ensemble des points extrémaux de la classe A , c'est-à-dire que $f \in E$ si et seulement si la représentation $f(z) = \lambda f_1(z) + (1 - \lambda)f_2(z)$, $0 < \lambda < 1$, $f_1, f_2 \in A$ implique $f_1(z) = f_2(z)$ dans Δ . Il résulte d'un théorème de M. Krein et D. Milman ([1], [2]) que A est la fermeture d'un ensemble convexe étendu sur E . De plus, toute fonctionnelle continue convexe définie sur A admet son maximum en un point extrémal de cet ensemble.

On voit facilement que $E = \{J(\cdot, t) : a \leq t \leq b\}$ et que dans la classe A on a les théorèmes suivants:

Théorème 1. *Pour tout $z \in \Delta$ fixé on a les inégalités exactes*

$$|f(z)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |\dot{J}(z, t)|,$$

$$|f'(z)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |J'_z(z, t)|.$$

De plus, pour $n = 1, 2, \dots$,

$$\min_{a \leq t \leq b} p_n(t) \leq c_n \leq \max_{a \leq t \leq b} p_n(t).$$

Théorème 2. *L'ensemble*

$$\bigcap_{f \in A} \{z : f'(z) \neq 0\} = \{z : \max_{a \leq \nu \leq \mu \leq b} |\Delta \arg J'_z(z, t)| < \pi\}$$

t il est un ensemble ouvert contenant le point $z = 0$.

Notons que la fonction $J(z, t)$ peut être univoquement représentée dans $\Delta \times [a, b]$ sous forme de la somme

$$J(z, t) = J_1(z, t) + J_2(z, t),$$

où les fonctions $J_1(z, t)$ et $J_2(z, t)$ satisfont dans $\Delta \times [a, b]$ aux relations

$$J_1(-z, t) = -J_1(z, a + b - t), J_2(-z, t) = J_2(z, a + b - t).$$

D'où

$$2J_1(z, t) = J(z, t) - J(-z, a + b - t), 2J_2(z, t) = J(z, t) + J(-z, a + b - t).$$

Dans ce travail nous nous bornerons aux classes A dans lesquelles $J_2(z, t) = 0$, c'est-à-dire telles que pour tout k , $k = 1, 2, \dots$, $p_k(t) + (-1)^k p_k(a + b - t) = 0$, $a \leq t \leq b$. Alors, si $f \in A$, les fonctions $-f(-z)$ et $g(z) = \frac{1}{2}[f(z) - f(-z)]$ appartiennent aussi à A .

Soit $g(z)$ une fonction impaire de la classe A , c'est-à-dire telle que $g(-z) = -g(z)$ pour $z \in \Delta$. Chaque fonction de ce type détermine une sous-classe $A(g) \subset A$ de fonctions $f(z)$ telles que

$$(1.3) \quad f(z) - f(-z) = 2g(z) = g(z) - g(-z), \quad z \in \Delta.$$

La classe A se trouve ainsi divisée en sous-ensembles disjoints, convexes et compacts, chaque classe $A(g)$ étant la fermeture d'un ensemble convexe étendu sur l'ensemble $E(g)$ de ses points extrémaux.

Dans le chapitre suivant nous allons déterminer l'ensemble $E(g)$ en supposant donnée une fonction impaire $g \in A$ et nous allons trouver les fonctions extrémales pour certaines fonctionnelles dans ces classes. Comme application nous obtiendrons les limitations exactes des coefficients et des parties réelle et imaginaire de la fonction $f \in A(g)$. Le chapitre 3 sera consacré à une étude plus détaillée des résultats qui se rapportent à des classes connues de fonctions.

2. Problèmes extrémaux dans la classe $A(g)$.

Théorème 3. *La fonction $f(z)$ définie par la formule (1.1) est une fonction de la classe $A(g)$ si et seulement si la fonction $\alpha_f(t)$ satisfait à la condition*

$$(2.1) \quad \alpha_f(t) - \alpha_f(a+b-t) = \alpha_g(t) - \alpha_g(a+b-t), \quad a \leq t \leq b.$$

Démonstration. La condition (2.1) résulte immédiatement de l'égalité (1.3) et de l'unicité de la représentation (1.1).

Remarque 1. La condition (2.1) peut être remplacée par

$$(2.1') \quad \alpha_f(t) - \alpha_f(a+b-t) = 2\alpha_g(t) - 1, \quad a \leq t \leq b,$$

qui résulte de l'égalité

$$\alpha_g(t) + \alpha_g(a+b-t) = 1, \quad a \leq t \leq b.$$

Corollaire 1. *Si $\alpha_g(t)$ est une fonction absolument continue (singulière) dans $[a, b]$, il résulte de (2.1') que $\alpha_f(t)$, $f \in A(g)$, est aussi une fonction absolument continue (singulière) dans $[a, b]$.*

Corollaire 2. *De (2.1') on tire pour $t_1, t_2 \in [a, b]$*

$$\alpha_f(t_1) - \alpha_f(t_2) + \alpha_f(a+b-t_2) - \alpha_f(a+b-t_1) = 2[\alpha_g(t_1) - \alpha_g(t_2)].$$

Donc:

a) si $\alpha_g(t_1) = \alpha_g(t_2)$, on a pour $f \in A(g)$ $\alpha_f(t_1) = \alpha_f(t_2)$ et $\alpha_f(a+b-t_1) = \alpha_f(a+b-t_2)$;

b) si $f \in A(g)$, on a pour tout $t \in (a, b)$

$$\alpha_f(t^+) - \alpha_f(t^-) + \alpha_f((a+b-t)^+) - \alpha_f((a+b-t)^-) = 2[\alpha_g(t^+) - \alpha_g(t^-)]$$

et

$$\alpha_f(b^-) - \alpha_f(a^+) = \alpha_g(b^-) - \alpha_g(a^+);$$

c) $f \in A(g)$ si et seulement si

$$\alpha_f(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{pour } a \leq t < \frac{a+b}{2}, \\ \alpha\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^-\right) - \alpha_a\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^-\right) + \frac{1}{2} & \text{pour } t = \frac{a+b}{2}, \\ \alpha(a+b-t) - 2\alpha_a(a+b-t) + 1 & \text{pour } \frac{a+b}{2} < t \leq b, \end{cases}$$

où $\alpha(t)$ est une fonction définie dans $\left[a, \frac{a+b}{2}\right)$, satisfaisant aux conditions

$$0 \leq \alpha(t_2) - \alpha(t_1) \leq 2[\alpha_a(t_2) - \alpha_a(t_1)] \quad \text{pour } a \leq t_1 < t_2 < \frac{a+b}{2},$$

$$\alpha(a) = 0 \text{ et } \alpha(t^-) + \alpha(t^+) = 2\alpha(t) \quad \text{pour } a < t < \frac{a+b}{2}.$$

Théorème 4. Si $f \in E(g)$, pour tout t , $a \leq t < \frac{a+b}{2}$ au moins un des points t , $a+b-t$, est un point de continuité de la fonction $\alpha_f(t)$.

Démonstration. Supposons que la fonction $\alpha_f(t)$ admette aux points $t_0 < \frac{a+b}{2}$ et $a+b-t_0$ les sauts $\Delta\alpha_0$ et $\Delta\alpha'_0$. Alors il existe des fonctions distinctes $\alpha_1(t)$ et $\alpha_2(t)$ satisfaisant à (1.2) et (2.1) et un nombre λ , $0 < \lambda < 1$, tels que $\alpha_f(t) = \lambda\alpha_1(t) + (1-\lambda)\alpha_2(t)$, $a \leq t \leq b$. Il suffit de prendre

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \begin{cases} \alpha_f(t) & \text{pour } t \in [a, b] - [t_0, a+b-t_0] \\ \alpha_f(t) + \Delta\alpha'_0 & \text{pour } t \in (t_0, a+b-t_0) \end{cases} \\ \alpha_2(t) &= \begin{cases} \alpha_f(t) & \text{pour } t \in [a, b] - [t_0, a+b-t_0] \\ \alpha_f(t) - \Delta\alpha_0 & \text{pour } t \in (t_0, a+b-t_0) \end{cases} \\ \lambda &= \frac{\Delta\alpha_0}{\Delta\alpha_0 + \Delta\alpha'_0}. \end{aligned}$$

Corollaire 3. Soit $\alpha_g(t)$ une fonction à sauts. Si la fonction $\alpha_g(t)$ admet le saut $\Delta\alpha_k$ au point t_k , $a \leq t_k < \frac{a+b}{2} = t_0$, $k = 1, 2, \dots$, et le saut $2\Delta\alpha_0 \geq 0$ au point t_0 , toutes les fonctions $f \in E(g)$ sont définies par la formule

$$f(z) = 2 \sum_{k=0} \Delta\alpha_k J(z, \eta_k), \quad 2 \sum_{k=0} \Delta\alpha_k = 1,$$

où pour tout k , $k = 1, 2, \dots$, η_k est l'un des nombres t_k , $a+b-t_k$.

Théorème 5. Si $\alpha_g(t)$ est une fonction absolument continue, $f \in E(g)$ si et seulement si

$$(2.2) \quad |\alpha_f'(t) - \alpha_g'(t)| = \alpha_g'(t) \text{ presque partout dans } [a, b].$$

Démonstration. Soit $B = \{t: |\alpha_f'(t) - \alpha_g'(t)| < \alpha_g'(t)\}$. Supposons que $\mu(B) > 0$. Alors il existe $f_1, f_2 \in A(g)$, $f_1 \neq f_2$, telles que $2f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ dans Δ . Il suffit d'admettre

$$\alpha_{fk}(t) = \alpha_f(t) + (-1)^k u(t), \quad k = 1, 2, \quad a \leq t < \frac{a+b}{2},$$

où

$$u(t) = \alpha_g(t) - \int_a^t |\alpha_f'(\theta) - \alpha_g'(\theta)| d\theta$$

(v. p. ex. corollaire 2c) c'est-à-dire $f \notin E(g)$.

Si $\mu(B) = 0$, la représentation $f(z) = \lambda f_1(z) + (1-\lambda)f_2(z)$, $0 < \lambda < 1$, n'est possible que si $\alpha_{f_1}'(t) = \alpha_{f_2}'(t)$ presque partout dans $[a, b]$. En effet, sur l'ensemble $C = \{t: \alpha_{f_1}'(t) \neq \alpha_{f_2}'(t)\}$ on a $|\alpha_f'(t) - \alpha_g'(t)| < \alpha_g'(t)$, ce qui veut dire que $C \subset B$.

Remarque 2. La condition (2.2) peut être remplacée par

$$(2.2') \quad \alpha_f'(t) \alpha_f'(a+b-t) = 0 \text{ presque partout dans } [a, b],$$

ou

$$(2.2'') \quad |\alpha_f'(t) - \alpha_f'(a+b-t)| = 2\alpha_g'(t) \text{ presque partout dans } [a, b].$$

Des théorèmes 4 et 5 on tire le

Théorème 6. Si $\alpha_g(t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t)$, où $\alpha_1(t)$ est une fonction absolument continue et $\alpha_2(t)$ est une fonction à sauts dans $[a, b]$, $f \in E(g)$ si et seulement si la condition (2.2) est remplie et si pour $t \in (a, b)$ on a

$$[\alpha_f(t^+) - \alpha_f(t^-)] \cdot [\alpha_f((a+b-t)^+) - \alpha_f((a+b-t)^-)] = 0$$

et

$$\alpha_f(a^+) [1 - \alpha_f(b^-)] = 0.$$

Théorème 7. Soit $h(t)$ une fonction quelconque continue dans $[a, b]$. Alors le maximum de la fonctionnelle

$$(2.3) \quad F(f) = \int_a^b h(t) d\alpha_f(t), \quad f \in A(g)$$

est égal à

$$\int_a^b h(t) d\alpha_g(t) + \frac{1}{2} \int_a^b |h(t) - h(a+b-t)| d\alpha_g(t).$$

De plus, $f \in A(g)$ est une fonction extrémale pour cette fonctionnelle si et seulement si a lieu l'implication

$$(2.4) \quad h(t) < h(a+b-t) \text{ pour } t \in [t_1, t_2] \text{ entraîne } \alpha_f(t_1) = \alpha_f(t_2).$$

Démonstration. Observons que si $\varphi(t)$ est une fonction continue telle que $\varphi(t) = \varphi(a+b-t)$ pour $t \in [a, b]$, on a pour toute $f \in A(g)$

$$\int_a^b \varphi(t) d\alpha_f(t) = \int_a^b \varphi(t) d\alpha_g(t).$$

Donc

$$(2.5) \quad \begin{aligned} F(f) &= \int_a^b h(t) d\alpha_g(t) + \frac{1}{2} \int_a^b [h(t) - h(a+b-t)] d\alpha_f(t) \leq \\ &\leq \int_a^b h(t) d\alpha_g(t) + \frac{1}{2} \int_a^b |h(t) - h(a+b-t)| d\alpha_g(t). \end{aligned}$$

Supposons d'abord que

$$\left\{ t \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right) : h(t) < h(a+b-t) \right\} = \bigcup_{k=1}^n (t_{2k-1}, t_{2k}),$$

où $a = t_0 \leq t_{2k-1} < t_{2k} \leq t_{2k+1}$, $k = 1, 2, \dots$. Alors la fonction $\alpha(t) = \frac{1}{2} [\beta(t^-) + \beta(t^+)]$, $\alpha(a) = \beta(a)$, où

$$\beta(t) = \begin{cases} 2\alpha_g(t) & \text{pour } t \in [a, t_1] \\ 2 \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha_g(t_{2k+1}) - \alpha_g(t_{2k})] & \text{pour } t \in (t_{2n-1}, t_{2n}) \\ 2 \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha_g(t_{2k+1}) - \alpha_g(t_{2k})] + 2[\alpha_g(t) - \alpha_g(t_{2n})] & \text{pour } t \in [t_{2n}, t_{2n+1}], \end{cases}$$

$n = 1, 2, \dots$,

satisfait aux hypothèses du corollaire 2c), et la fonction α_f qui y est définie réalise l'égalité dans (2.5). Il en résulte que dans ce cas toute fonction extrémale satisfait à la condition (2.4).

En particulier, on trouve que la limitation (2.5) est exacte lorsque la fonction $h(t)$ est un polynôme.

Supposons maintenant que $h(t)$ soit une fonction quelconque continue dans $[a, b]$. Alors il existe une suite de polynômes $h_n(t) \rightrightarrows h(t)$ uniformément dans $[a, b]$. Désignons par f_n la fonction qui réalise le maximum de la fonctionnelle

$$F_n(f) = \int_a^b h_n(t) d\alpha_f(t), \quad f \in A(g).$$

En vertu d'un théorème bien connu de Helly ([1], [4], [5], [9]) on peut extraire de la suite $\alpha_{j_n}(t)$ une suite partielle $\alpha_{j_{k_n}}(t)$ qui converge vers une fonction $\alpha(t)$ à variation bornée. Évidemment la fonction $\alpha(t)$ satisfait à (1.2) et (2.1). Si donc $h(t) < h(a+b-t)$ dans l'intervalle $[t_1, t_2]$, il existe un nombre N tel que pour $n \geq N$

$$h_n(t) < h_n(a+b-t), \quad t \in [t_1, t_2].$$

D'où $\alpha_{j_{k_n}}(t_1) = \alpha_{j_{k_n}}(t_2)$ pourvu que $k_n \geq N$, c'est-à-dire $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$. Par conséquent la fonction

$$f(z) = \int_a^b J(z, t) d\alpha(t)$$

satisfait à la condition (2.4), c'est donc une fonction qui réalise le maximum de la fonctionnelle (2.3). De plus, toute fonction qui réalise le maximum de cette fonctionnelle satisfait à (2.4).

Corollaire 4. $A(g) = \{g\}$ si et seulement si

$$g(z) = J\left(z, \frac{a+b}{2}\right).$$

Corollaire 5. Soit $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots \in A(g)$. Alors pour les coefficients c_{2n} , $n = 1, 2, \dots$, ont lieu les inégalités exactes

$$|c_{2n}| \leq \int_a^b |p_{2n}(t)| d\alpha_g(t).$$

Corollaire 6. Si $f \in A(g)$ et z est quelconque fixé, $z \in \Delta$, on a les inégalités exactes

$$|\operatorname{Re}[f(z) - g(z)]| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |\operatorname{Re}\{J(z, t) + J(-z, t)\}| d\alpha_g(t).$$

$$|\operatorname{Im}[f(z) - g(z)]| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |\operatorname{Im}\{J(z, t) + J(-z, t)\}| d\alpha_g(t).$$

3. Exemples

3.1. Soit

$$J(z, t) = \frac{z}{1 - 2z \cos t + z^2} = S(z, \cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

On obtient alors la classe bien connue $A = T$ des fonctions typiquement réelles. Elle a été introduite par W. Rogosinski [8] comme la classe des fonctions $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, holomorphes dans Δ et satisfaisant pour $z \in \Delta$ à la condition $\operatorname{Im} f(z) \operatorname{Im} z \geq 0$. La représentation intégrale (1.1) est due à Robertson [7].

Dans la classe T on connaît la représentation de la fonction $\alpha_f(t)$, voir p. ex. [3],

$$\alpha_f(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_0^t \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 - r^2 e^{2i\theta}}{r e^{i\theta}} f(r e^{i\theta}) \right\} d\theta$$

en tout point de continuité de la fonction α_f . En profitant de plus du fait que $\varrho^{-1} f(\varrho z) \rightarrow f(z)$ quand $\varrho \rightarrow 1^-$ presque uniformément dans Δ et du théorème de Helly, on obtient

$$(3.1) \quad \alpha_f(t) = \frac{2}{\pi} \lim_{\varrho \rightarrow 1^-} \int_0^t \operatorname{Im} f(\varrho e^{i\theta}) \cdot \sin \theta d\theta,$$

en tout point de continuité de la fonction α_f .

Désignons par H_p , $p \geq 1$, la classe des fonctions holomorphes dans Δ telles que $f \in H_p$ si et seulement si toutes les normes

$$\|f_r\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(r e^{it})|^p dt \right)^{1/p}, \quad f_r(t) = f(r e^{it})$$

sont équibornées pour tout r , $0 \leq r < 1$.

Observons que pour $f \in T(g)$ on a l'inégalité

$$(3.2) \quad |\operatorname{Im}[f(z) - g(z)]| < |\operatorname{Im} g(z)|, \quad \operatorname{Im} z \neq 0, \quad z \in \Delta.$$

Il résulte de cette inégalité que si $g \in H_p$, $p > 1$, toute fonction $f \in T(g)$ est aussi une fonction de la classe H_p . Dans ce cas la formule (3.1) prend la forme

$$(3.1') \quad \alpha_f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \operatorname{Im} f(e^{i\theta}) \sin \theta d\theta, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

et la condition (2.1) du théorème 3 devient

$$(2.1') \quad \alpha_f(t) - \alpha_f(\pi - t) = \frac{2}{\pi} \int_t^{\pi-t} \operatorname{Im} g(e^{i\theta}) \sin \theta d\theta, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

En nous appuyant sur ces propriétés des classes $T(g)$ et sur les résultats du chapitre précédent nous établirons le théorème suivant:

Théorème 8. Si n est un nombre naturel fixé, on a

$$T(g) \subset \{f \in T: a_{2n}(f) = 0\}$$

si et seulement si la fonction $g(z)$ est de la forme

$$(3.3) \quad g(z) = \sum_{k=1}^n \Delta \alpha_k \left[S\left(z, \cos \frac{k\pi}{2n}\right) + S\left(z, -\cos \frac{k\pi}{2n}\right) \right],$$

où $\Delta \alpha_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ et $2 \sum_{k=1}^n \Delta \alpha_k = 1$.

Démonstration. Du corollaire 5 du chapitre précédent on déduit que

$$\int_0^\pi \frac{|\sin 2nt|}{\sin t} d\alpha_\theta(t) = 0,$$

d'où résulte (3.3).

Théorème 9. Si $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \in T(g)$, les coefficients a_{2n} , $n = 1, 2, \dots$, satisfont aux inégalités exactes suivantes:

$$(3.4) \quad |a_{2n}| \leq \frac{8n}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ctg} \frac{2k-1}{4n} \pi}{4n^2 - (2k-1)^2} a_{2k-1},$$

$$(3.5) \quad |a_{2n+2} - a_{2n}| \leq \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 - 4k^2} [a_{2(2n+1)k+1} - a_{2(2n+1)k-1}],$$

$$(3.6) \quad |a_{2n+2} + a_{2n}| \leq \frac{4}{\pi} \{A_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + A_{k+1}) a_{2k+1}\},$$

$$\text{où } A_k = \frac{(2n+1) \operatorname{tg} \frac{nk\pi}{2n+1} + (-1)^k 2k}{(2n+1)^2 - 4k^2}.$$

Démonstration. Du corollaire 5 et de la formule (3.1) découle l'inégalité exacte

$$|a_{2n}| \leq \frac{2}{\pi} \lim_{\varrho \rightarrow 1-} \int_0^\pi \operatorname{Im} g(\varrho e^{it}) |\sin 2nt| dt =$$

$$= \frac{8n}{\pi} \lim_{\varrho \rightarrow 1-} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ctg} \frac{2k-1}{4n} \pi}{4n^2 - (2k-1)^2} a_{2k-1} \varrho^{2k-1}.$$

En tenant compte du théorème de Littlewood [6] on obtient (3.4). Les autres inégalités se démontrent d'une façon analogue.

Théorème 10. Si $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \in T(g)$, alors:

a) pour tout r , $0 < r < 1$, on a l'inégalité

$$\|g_r\|_2 \leq \|f_r\|_2 < \sqrt{2} \|g_r\|_2,$$

la constante $\sqrt{2}$ ne pouvant en général être diminuée;

b) si $g \in H_2$, on a les inégalités exactes

$$(3.7) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}^2, \quad a_1 = 1,$$

$$(3.8) \quad a_2^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k+2} - a_{2k})^2 \leq a_1^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k+1} - a_{2k-1})^2,$$

$$(3.9) \quad a_2^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k+2} + a_{2k})^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k+1} + a_{2k-1})^2,$$

c) dans la classe $T(g)$, $g \in H_2$, les conditions suivantes sont équivalentes:

I. $|\operatorname{Im}[f(e^{it}) + f(-e^{it})]| = 2 \operatorname{Im} g(e^{it})$ presque partout dans $[0, \pi]$;

II. $\lim_{r \rightarrow 1-} \|f_r\|_2 = \sqrt{2} \lim_{r \rightarrow 1-} \|g_r\|_2$;

III. Dans l'une des inégalités (3.7), (3.8), (3.9) a lieu l'égalité;

IV. $f \in E(g)$.

Démonstration. Nous profiterons de lemme suivant:

Lemme. Supposons que $h(t)$ et $\varphi(t)$ soient des fonctions complexes, de carré intégrable sur $[-\pi, \pi]$. Soit encore

$$h(t) \sim a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad \varphi(t) \sim a'_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a'_k \cos kt + b'_k \sin kt).$$

Si pour presque tout t de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ a lieu l'inégalité $|h(t)| \leq |\varphi(t)|$, on a

$$\frac{1}{2} |a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \leq \frac{1}{2} |a'_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|a'_k|^2 + |b'_k|^2).$$

De l'inégalité (3.2) et du lemme résulte immédiatement l'inégalité a).

Dans le cas où $g \in H_2$, l'inégalité (3.2) donne

$$(3.10) \quad |\operatorname{Im}[f(e^{it}) + f(-e^{it})]| \leq 2 |\operatorname{Im} g(e^{it})|$$

presque partout dans $[-\pi, \pi]$, d'où, en tenant compte du lemme, on déduit l'inégalité (3.7).

En multipliant les deux membres de l'inégalité (3.10) respectivement par $|\sin t|$ et $|\cos t|$ et en appliquant le lemme, on obtient les autres inégalités.

L'équivalence des conditions I et IV résulte immédiatement du théorème 5 et de la formule (3.1). Les autres équivalences se démontrent en profitant de l'inégalité (3.10) et du lemme.

Remarque 3. On peut obtenir autant que l'on veut d'inégalités des types (3.7) — (3.9). Il suffit pour cela de multiplier les deux membres de l'inégalité (3.10) par $|\varphi(t)|$, où $\varphi(t)$ est une fonction quelconque de carré intégrable sur $[-\pi, \pi]$ et d'appliquer le lemme.

Théorème 11. Pour $f \in T(g)$ et z fixé quelconque, $z \in \Delta$, on a les inégalités exactes

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}[f(z) - g(z)]| &\leq 2 \int_0^\pi |\operatorname{Re} S(z^2, \cos 2t) \cos t| d\alpha_g(t) \\ |\operatorname{Im}[f(z) - g(z)]| &\leq 2 \int_0^\pi |\operatorname{Im} S(z^2, \cos 2t) \cos t| d\alpha_g(t) \\ &= \begin{cases} |\operatorname{Im}[f_2(z) - g(z)]| & \text{pour } \sin(2 \arg z) \geq 0, \\ |\operatorname{Im}[f_2(-z) + g(z)]| & \text{pour } \sin(2 \arg z) \leq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

où $f_2(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ est une fonction qui réalise le maximum du coefficient a_2 dans la classe $T(g)$.

3.2. Désignons par P la classe bien connue des fonctions dont la partie réelle est positive, c'est-à-dire que $p(z) \in P$ si et seulement si $p(z)$ est une fonction holomorphe dans Δ , $p(0) = 1$ et $\operatorname{Re} p(z) > 0$ pour $z \in \Delta$. Par P_r nous désignerons la classe composée des fonctions $p(z) \in P$ qui sont réelles sur $(-1, 1)$.

On sait que toute fonction $p(z) \in P_r$ peut être représentée dans Δ par la formule

$$p(z) = \int_0^\pi K(z, t) d\alpha_p(t), \quad K(z, t) = \frac{1 - z^2}{1 - 2z \cos t + z^2},$$

où $\alpha_p(t)$ est une fonction non décroissante dans $[0, \pi]$, telle que $\alpha_p(0) = 0$, $\alpha_p(\pi) = 1$, $2\alpha_p(t) = \alpha_p(t^-) + \alpha_p(t^+)$.

Observons que la fonction $zK(z, t)$ a toutes les propriétés du noyau exigées au chapitre 1. Donc si $g(z)$ est une fonction paire de la classe P_r ,

c'est-à-dire si $g(-z) = g(z)$ pour $z \in \Delta$, par $P_r(g)$ nous entendrons la classe composée des fonctions $p(z) \in P_r$ qui satisfont à la relation

$$p(z) + p(-z) = 2g(z), \quad z \in \Delta.$$

Pour la classe $P_r(g)$ tous les théorèmes du chapitre 2 restent en vigueur si l'on y remplace $J(z, t)$ par $K(z, t)$, et si dans le corollaire 6 on remplace $J(z, t) + J(-z, t)$ par $K(z, t) - K(-z, t)$.

En passant de la classe P_r à la classe T on obtient immédiatement dans la classe $P_r(g)$ les inégalités exactes qui correspondent aux inégalités (3.4) – (3.9). Ainsi, par exemple, pour $p(z) = 1 + b_1 z + \dots \in P_r(g)$ on a

$$|b_{2n-1}| \leq \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-4k^2} b_{2(2n-1)k}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Observons que si $p(z) = 1 + b_1 z + \dots \in P$, on a

$$\frac{1}{2}[p(z) + \overline{p(\bar{z})}] \in P_r \text{ et } \frac{1}{2}[p(iz) + \overline{p(i\bar{z})}] \in P_r.$$

Par conséquent on a, dans toute la classe P , les inégalités exactes

$$|\operatorname{Re} b_{2n-1}| \leq \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-4k^2} b_{2(2n-1)k};$$

$$|\operatorname{Im} b_{2n-1}| \leq \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{2(2n-1)k}}{1-4k^2},$$

$$n = 1, 2, \dots$$

RÉFÉRENCES

- [1] Alexiewicz A., *Analiza funkcjonalna*, Warszawa 1969.
- [2] Dunford N., Schwartz J., *Linear Operators I, II*, New York 1958, 1964.
- [3] Голузин Г. М., *О типично-вещественных функциях*, Мат. Сб., 27 (69); 2 (1950), 201-217.
- [4] Golusin G. M., *Geometrische Funktionen-theorie*, Berlin 1957.
- [5] Halmos P., *Measure Theory*, New York 1950.
- [6] Littlewood J. E., *The Converse of Abel's Theorem on Power Series*, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 9 (1911), 423-448.
- [7] Robertson M. S., *On the Coefficients of Typically-Real Functions*, Bull. Amer. Math. Soc., 41, 8 (1936), 565-572.
- [8] Rogosinski W., *Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen*, Math. Zeit., 35, 1 (1932), 93-121.
- [9] Sikorski R., *Funkcje rzeczywiste I, II*, Warszawa 1958, 1959.

STRESZCZENIE

Niech A oznacza klasę funkcji określonych w $\Delta = \{z: |z| < 1\}$ wzorem

$$f(z) = \int_a^b J(z, t) da(t),$$

gdzie $J(z, t)$ jest przy każdym t , $a < t < b$, pewną funkcją holomorficzną w Δ , zaś $a(t)$ jest dowolną funkcją niemalejącą w $[a, b]$ taką, że $a(b) - a(a) = 1$.

Praca dotyczy klasy A i jej podklas $A(g)$ funkcji $f \in A$ spełniających związek

$$f(z) - f(-z) = 2g(z), \quad z \in \Delta.$$

W rozdziale 2 wyznaczono zbiór punktów ekstremalnych klasy $A(g)$, przy czym g jest ustaloną, nieparzystą funkcją klasy A oraz otrzymano funkcje ekstremalne dla pewnych funkcjonalów w tej klasie.

Ostatni rozdział zawiera bardziej szczegółowe wyniki dotyczące znanych klas funkcji.

РЕЗЮМЕ

Пусть A обозначает класс функций, определенных в $\Delta = \{z: |z| < 1\}$ формулой

$$f(z) = \int_a^b J(z, t) da(t),$$

где $J(z, t)$ при любом t , $a < t < b$ является некоторой голоморфной функцией в Δ , а $a(t)$ —любой неубывающей в $[a, b]$, такой, что $a(b) - a(a) = 1$.

Работа касается класса A и его подклассов $A(g)$ функций $f \in A$, удовлетворяющих соотношению

$$f(z) - f(-z) = 2g(z), \quad z \in \Delta.$$

Во второй части определяется семейство экстремальных точек класса $A(g)$, где g — фиксированная, нечетная функция класса A , а также получены экстремальные функции для некоторых функционалов в этом классе.

Последняя часть содержит более подробные результаты касающиеся известных классов функций.

