

Zespół Matematyki, Wyższa Szkoła Inżynierska, Lublin

FRANCISZEK KUDELSKI

Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions subordonnées

O kilku problemach w teorii funkcji podporządkowanych

О некоторых вопросах в теории подчиненных функций

Dans le travail [2] Z. Lewandowski a étudié le problème de la détermination de la valeur exacte $r_0(r_0 \in (0, 1))$ du rayon du cercle dans lequel a lieu l'inégalité $|f'(z)| \leq |F'(z)|$, la fonction f étant supposée subordonnée en module à la fonction F dans le cercle unité et la fonction F étant univalente. En admettant une subordination en module dans le cercle unité le théorème 2 du travail mentionné établit une limitation supérieure du module de la première dérivée de la fonction $f(z)$.

Dans le présent travail je démontre des théorèmes analogues, en supposant que la fonction $f(z)$ est régulière et qu'elle admet au point $z = 0$ un zéro d'ordre au moins p .

Désignons par S la classe de toutes les fonctions $F(z)$ holomorphes et univalentes dans le cercle $|z| < 1$ et satisfaisant dans ce cercle aux conditions $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$.

Théorème 1. *Si les fonctions $f(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} \dots$, où $a_p \geq 0$ et $F(z) \in S$, satisfont à la condition $|f(z)| \leq |F(z)|$ dans le cercle $|z| < 1$, on a dans ce cercle la limitation*

$$(1) \quad |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \left[r^{p-1} + \frac{pr(1-r)}{(1+r)(1-r^{2p})} (1-r^{2(p-1)}) \right], |z| \leq r < 1$$

Démonstration. La fonction $f(z)$ peut être représentée sous la forme

$$(2) \quad f(z) = F(z) \omega(z),$$

où $\omega(z) = a_p z^{p-1} + a_{p+1} z^{p+1} \dots$ est une fonction quelconque satisfaisant aux hypothèses du lemme de Schwarz, c'est-à-dire régulière dans le cercle $|z| < 1$ et telle que $|\omega(z)| < 1$ dans ce cercle.

La fonction $\frac{\omega(z)}{z^{p-1}} = a_p + a_{p+1}z + \dots$ vérifie les conditions du lemme généralisé de Schwarz:

$$\left| \frac{\omega(z)}{z^{p-1}} \right| \leq 1 \text{ dans le cercle } |z| < 1.$$

D'où
$$\left| \frac{\omega(z)}{z^{p-1}} \right| \leq \frac{r + a_p}{1 + a_p r} \quad (|z| \leq r < 1)$$

et puisque

$$(3) \quad a_p = \frac{\omega^{(p-1)}(0)}{(p-1)!}$$

on a

$$(4) \quad |\omega(z)| \leq p^{p-1} \frac{r + \frac{1}{(p-1)!} |\omega^{(p-1)}(0)|}{1 + r \frac{1}{(p-1)!} |\omega^{(p-1)}(0)|}$$

On a, de plus, la limitation suivante:

$$(5) \quad |\omega'(z)| \leq \frac{pr^{p-1}}{1 - r^{2p}} (1 - |\omega(z)|^2)$$

[Golusin, p. 364, théorème 5].

En dérivant les deux membres de l'égalité (2) on obtient

$$f'(z) = F'(z)\omega(z) + F(z)\omega'(z)$$

En profitant de la limitation (5) on en tire

$$\begin{aligned} (6) \quad |f'(z)| &= |F'(z)\omega(z) + F(z)\omega'(z)| \\ &\leq |F'(z)| |\omega(z)| + |F(z)| |\omega'(z)| \\ &\leq \frac{1+r}{(1-r)^3} |\omega(z)| + \frac{r}{(1-r)^2} \frac{pr^{p-1}}{1-r^{2p}} (1 - |\omega(z)|^2) \\ &= \frac{1+r}{(1-r)^3} \left[-\frac{pr^p(1-r)}{(1-r^{2p})(1+r)} |\omega(z)|^2 + |\omega(z)| + \frac{pr^p(1-r)}{(1-r^{2p})(1+r)} \right] \end{aligned}$$

Pour obtenir une limitation de $|f'(z)|$ indépendante de $|\omega(z)|$ il faudra déterminer le maximum de second membre de l'expression (6) quand r est fixé et ω parcourt toute la classe des fonctions $\omega(z) = a_p z^p + \dots$ limitées par 1. Alors $|\omega(z)|$ varie au plus dans l'intervalle $[0, r^{p-1}]$. Pour déterminer

ce maximum considérons le trinôme carré

$$y = -ax^2 + x + a, \quad \text{où} \quad a = \frac{pr^\nu(1-r)}{(1-r^{2\nu})(1+r)}$$

$$\text{Comme } x_0 = \frac{1}{2a} = \frac{(1-r^{2\nu})(1+r)}{2pr^\nu(1-r)} = \frac{(1-r^2)(1+r^2+r^4+\dots+r^{2(\nu-1)})(1+p)}{2pr^\nu(1-r)}$$

$$\frac{2rpr_1^{2(p-1)}}{2pr^p} = r^{p-1}$$

ce trinôme admet sa valeur maximum à l'extrémité droite de l'intervalle $[0, r^{p-1}]$.

En remplaçant $|\omega(z)|$ par r^{p-1} dans (6) on obtient donc la conclusion du théorème 1.

Théorème 2. Soit $f(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots$, $0 \leq a_p < 1$, une fonction holomorphe dans le cercle $|z| < 1$ et soit $F(z) \in \mathcal{S}$. Si $|f(z)| \leq |F(z)|$ pour $|z| < 1$,

on a pour $|z| < s(a_p)$ l'inégalité

$$|f'(z)| \leq |F'(z)|$$

où $s(a_p)$ qui ne dépend ni de la fonction f , ni de la fonction F , est la plus petite racine positive de l'équation

$$(7) \quad a_p x^{2p+2} - (a_p + p - 1)x^{2p+1} - (p + a_p p + 1)x^{2p} - a_p p x^{2p-1} + \\ - a_p p x^{p+2} - (a_p + 1)p x^{p+1} - p x^p - a_p x^2 + (a_p - 1)x + 1 = 0$$

La constante $s(a_p)$ ne peut être remplacée par un nombre plus grand.

Démonstration. Pour établir le théorème il faut donc prouver que pour $|z| < s(a_p)$ a lieu l'inégalité

$$|F'(z)\omega(z) + F(z)\omega'(z)| \leq |F'(z)|$$

ou bien que l'on a, pour $|z| < s(a_p)$,

$$(8) \quad \left| \frac{F(z)}{F'(z)} \right| \leq \frac{1 - |\omega(z)|}{|\omega'(z)|}$$

Puisque

$$\left| \frac{F(z)}{F'(z)} \right| \leq r \frac{1+r}{1-r} \quad \text{pour } |z| \leq r$$

et

$$\frac{1 - |\omega(z)|}{|\omega'(z)|} \geq \frac{1 - |\omega(z)|}{1 - |\omega(z)|^2} \cdot \frac{1 - r^{2p}}{pr^{p-1}} = \frac{1 - r^{2p}}{p((1 + |\omega(z)|)r^{p-1})}$$

$$\geq \frac{1 - r^{2p}}{pr^{p-1} \left(1 + r^{p-1} \frac{r + a_p}{1 + ra_p} \right)}$$

il suffit, pour établir l'inégalité (8), de prouver que

$$(9) \quad r \frac{1+r}{1-r} \leq \frac{1-r^{2p}}{pr^{p-1} \left(1 + r^{p-1} \frac{r+a_p}{1+ra_p} \right)}$$

pourvu que $r < s(a_p)$.

Pour $r = 0$ l'inégalité (9) est évidente. Comme le premier membre est une fonction croissante et le second une fonction décroissante de r , l'inégalité restera vraie pour $r < s(a_p)$. La condition (9) peut s'écrire sous la forme

$$pr^p(1+r)(1+ra_p+r^p+a_p r^{p-1}) - (1-r)(1-r^{2p})(1+ra_p) \leq 0$$

ou, en effectuant les opérations,

$$a_p r^{2p+2} - (a_p + p - 1) r^{2p+1} - (p + a_p p + 1) r^{2p} - a_p p r^{2p-1} - a_p p r^{p+2} + \\ - (a_p + 1) p r^{p+1} - p r^p - a_p r^2 + (a_p - 1) + 1 \leq 0$$

Le nombre $s(a_p)$ ne peut être augmenté, car si

$$F_0(z) = \frac{z}{(1+z)^2}, \quad \omega_0(z) = z^{p-1} \frac{z+a_p}{1+a_p z}$$

$$f_0(z) = F_0(z) \omega_0(z) = \frac{z}{(1+z)^2} z^{p-1} \frac{z+a_p}{1+a_p z} = \frac{z+a_p}{(1+z)^2(1+a_p z)} z^p$$

on a pour tout $x > s(a_p)$

$$f'_0(x) > F'_0(x).$$

Soit S_0 la classe des fonctions $F(z)$, holomorphes et univalentes dans le cercle $|z| < 1$, qui y satisfont à la condition $\operatorname{Re} \frac{zF'(z)}{F(z)} > 0$. On a le

Théorème 3. Si $F(z) \in S_0$ et si $f(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots$ est une fonction holomorphe dans le cercle $|z| < 1$ et $|f(z)| \leq |F(z)|$ dans ce cercle, la condition $|f'(z)| \leq |F'(z)|$ est vérifiée dans la cercle $|z| < s(a_p)$ où $s(a_p)$ est la plus petite racine positive de l'équation (7) et le nombre $s(a_p)$ ne peut-être remplacé par un nombre plus grand.

Démonstration. En étendant le champ des majorantes F à la classe S_0 on n'augmentera pas le nombre $s(a_p)$, car $F_0 \in S_0$ et $S_0 \subset S$. Nous allons montrer que ces résultats ne peuvent être améliorés, même si l'on limite le champ des minorantes f aux fonctions étoilées par rapport à l'origine.

Théorème 4. Si $F(z) \in S_0$ et $f(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots$ est une fonction étoilée par rapport au point $z = 0$ dans le cercle $|z| < 1$ et si $|f(z)| < |F(z)|$ dans ce cercle, on a $|f'(z)| < |F'(z)|$ dans le cercle $|z| < s(a_p)$, la constante $s(a_p)$ étant la meilleure possible.

Démonstration. La première partie de la conclusion résultant du théorème 3, il suffit d'établir la seconde.

Admettons que l'on ait, pour tout couple de fonctions $f(z)$ et $F(z)$ satisfaisant aux hypothèses du théorème, $|f'(z)| < |F'(z)|$ dans le cercle $|z| < R$, où $R > s(a_p)$ et $s(a_p)$ est la plus petite racine positive de l'équation (7).

Les fonctions $F_k(z) = \frac{z}{(1+kz)^2}$ et $f_k(z) = F_k(z)\omega_k(z)$, où $\omega_k(k) = z^{n-1}$

$\frac{kz+a_p}{1+ka_pz}$, $0 < k < 1$, $a_p \in [0,1]$, vérifient les hypothèses de notre théorème.

De plus, on a

$$(10) \quad H_k(z) = \frac{zf'_k(z)}{f_k(z)} = \frac{p+(p-2)kz}{1+kz} + \frac{kz(1-a_p^2)}{(kz+a_p)(1+ka_pz)}$$

Puisque le premier terme du second membre de (4) admet une partie réelle au moins égale à $\frac{p(1-k)^2+2k(1-k)}{(1+k)^2}$ et que pour $a_p \rightarrow 1$ le second

terme tend uniformément vers zéro dans le cercle $|z| \leq 1$, il existe un nombre $t_0 \in (0, 1)$ tel que

$$\operatorname{Re} \frac{zf'_k(z)}{f_k(z)} > 0 \text{ pour } a_p \in [t_0, 1), z \in (|z| < 1).$$

Mais comme $H_k(0) = p$ cette fonction est étoilée dans le cercle $|z| < 1$ pour $a_p \in [t_0, 1)$. On vérifie aisément que $(f'_k(r_p)) = F'_k(r_p)$, où r_p est la plus petite racine positive l'équation (7) et $s(a_p) = kr_p$.

En tenant compte de la définition du nombre $s(a_p)$ on en déduit $r_p = \frac{s(a_p)}{k}$. Comme $s(a_p)$ décroît quand a_p croît jusqu'à 1, on peut fixer les nombres a_p dans l'intervalle $(t_0, 1]$ suffisamment proches de 1 et prendre k suffisamment proche de 1 pour que l'on ait $s(a_p) < r_p < R$. Mais $f'_k(r_p) \neq F'_k(r_p)$, en contradiction avec la définition de R , puisque $f_k \neq F_k$.

RÉFÉRENCES

- [1] Golusin, G. M. (Г. М. Голузин), *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Moscow 1966.
- [2] Lewandowski, Z., *Some Results Concerning Univalent Majorants*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska 18 (1964), 13-18.

STRESZCZENIE

Niech S oznacza klasę funkcji $F(z)$ holomorficznych i jednolistnych w kole $|z| < 1$ takich, że $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$. Niech S_0 oznacza klasę

funkcji $F(z)$ holomorficznych i jednolistnych w kole $|z| < 1$ i takich, że $\operatorname{Re}\{zF'(z)/F(z)\} > 0$ dla $|z| < 1$. Przez A_p wreszcie oznacza się klasę funkcji holomorficznych w kole $|z| < 1$ posiadających tamże rozwinięcie postaci

$$f(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots, \text{ gdzie } a_p \geq 0.$$

Przy założeniach, że $|f(z)| \leq |F(z)|$, $|z| < 1$ i $F \in S$ otrzymuje się oszacowanie z góry funkcjonału $|f'(z)|$ oraz koło $|z| < s(a_p)$ w którym $|f'(z)| \leq |F'(z)|$, gdzie stała $s(a_p)$, $0 \leq a_p < 1$ nie zależy od funkcji $f(z)$ i $F(z)$ i jest możliwie najlepsza. Ponadto przy założeniach, że $|f(z)| \leq |F(z)|$ dla $|z| < 1$ i $F \in S_0$ otrzymuje się koło $|z| < s(a_p)$, w którym $|f'(z)| \leq |F'(z)|$ (stała $s(a_p)$ jest najlepsza) oraz przy tych samych założeniach i dodatkowym założeniu, że $f(z)$ jest funkcją gwiazdzystą względem punktu $z = 0$ otrzymuje się koło $|z| < s(a_p)$, w którym $|f'(z)| \leq |F'(z)|$. I tym razem stała $s(a_p)$, $0 \leq a_p < 1$, jest najlepsza.

РЕЗЮМЕ

Пусть S обозначает класс голоморфных и однолистных функций в круге $|z| < 1$ таких, что $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$. Пусть S_0 обозначает класс голоморфных и однолистных функций $F(z)$ в круге $|z| < 1$ таких, что $\operatorname{Re}\{zF'(z)/F(z)\} > 0$ для $|z| < 1$. Наконец A_p мы обозначаем тот класс голоморфных функций в круге $|z| < 1$ которые обладают здесь же развертывание формы

$$f(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots, \text{ где } a_p \geq 0.$$

При предположении, что $|f(z)| \leq |F(z)|$, $|z| < 1$ и $F \in S$ мы получаем верхнюю оценку функционала $|f'(z)|$ а также круг $|z| < s(a_p)$ в котором $|f'(z)| \leq |F'(z)|$ где постоянная $s(a_p)$, $0 \leq a_p < 1$ не зависит от функции $f(z)$ и $F(z)$ и кроме того является возможно наилучшей.

При предположении, что $|f(z)| \leq |F(z)|$ для $|z| < 1$ и $F \in S_0$ получаем круг $|z| < s(a_p)$ в котором $|f'(z)| \leq |F'(z)|$, (постоянная $s(a_p)$ является наилучшей); при тех же предположениях и дополнительной предположении, что $f(z)$ является звездчатой функцией для пункта $z = 0$ мы получаем круг $|z| < s(a_p)$, в котором $|f'(z)| \leq |F'(z)|$. И теперь постоянная $s(a_p)$, $0 \leq a_p < 1$ является наилучшей.