ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XXII/XXIII/XXIV, 5 SECTIO A 1968/1969/1970

Instytut Matematyki, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin

ZBIGNIEW BOGUCKI AND JÓZEF WANIURSKI

On Univalent Functions whose Values Cover a Fixed Disk

Funkcje jednolistne których wartości pokrywają ustalone koło

Однолистные функции, значения которых покрывают фиксированный круг

In this paper we present some results whose detailed proofs will be published in vol. XXVI of this journal.

Let S be the class of functions

(1) $$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots,$$

regular and univalent in the unit disk K_1 and let S^*, C be the classes of sunctions $f \in S$ such that the corresponding image domains $f(K_1)$ are ftarlike w.r.t. the origin, resp. convex. Suppose that $K_r = \{z: |z| < r\}$. We also introduce the following subclasses of S. Let $S(R, M)$ be the class of all $f \in S$ such that

(2) $$K_R \subset f(K_1) \subset K_M$$

for some real R, M such that $0 < R < 1 < M$.

The intersections $S^* \cap S(R, M), C \cap S(R, M)$ will be denoted $S^*(R, M)$ and $C(R, M)$, resp. If we replace the condition (2) by

(3) $$f(K_1) \subset K_M, \quad M > 1,$$

we obtain the well known classes $S(M)$ ($S^*(M)$, $C(M)$) of bounded (starlike, convex) univalent functions. For each class $S(M)$ ($S^*(M)$ and $C(M)$, resp.) there exists a constant δ_M (δ_M^* and δ_M^c, resp.), or the Koebe constant, which is the radius of the largest disk with centre at the origin contained in $f(K_1)$ for each f of the relevant class. Obviously $S(R, M) = S(M)$ for $R \leqslant \delta_M$ and analogous relations hold for $S^*(M)$ and $C(M)$.

We now state some distortion theorems for the classes introduced above and sketch briefly the method of proof.

Theorem 1. *If* $R > \delta_M^*$ *and* $f \in S^*(R, M)$, *then*

(4) $$-F_*(-r) \leqslant |f(z)| \leqslant F_*(r), \ |z| = r,$$

where $F_* \in S^*(R, M)$ *maps* K_1 *onto the domain*

(5) $$G^* = K_M \setminus W,$$

$$W = \{w: R \leqslant |w| \leqslant M, \ \theta \leqslant \arg w \leqslant 2\pi - \theta\}, \ \theta \in (0, \pi).$$

Theorem 2. *If* $R > \delta_M^c$ *and* $f \in C(R, M)$, *then*

(6) $$-F_c(-r) \leqslant |f(z)| \leqslant F_c(r), \ |z| = r,$$

where $F_c \in C(R, M)$ *maps* K_1 *onto the convex circular quadrilateral* G_c *symmetric w.r.t. the real axis whose boundary consists of two arcs on* ∂K_R *and* ∂K_M, *resp., and two straight-line segments joining their end points and tangent to* ∂K_R.

The proofs of Theorems 1,2 are based on a method given by J. Krzyż in [1]. In order to determine the extremal values of $|f(z)|$, we consider an equivalent extremal problem for the Green's function in a class of domains whose boundaries consist of the finite number circular arcs and whose Robin's constant at the origin is fixed. The latter problem can be solved by means of Hadamard's variational formula for the Green's function and for the Robin's constant. In particular, the right hand side inequality in (4) can be proved in the following manner.

Let U be the family of closed regions G, starlike w.r.t. $w = 0$ containing two fixed points $0, \eta \, (0 < \eta < M)$ such that $K_R \subset G \subset K_M$ and the inner radius $r(0, G)$ of G at the origin has a constant value 1. We assume that $\delta_M^* < R < 1 < M$. Let $g(w, w_0; G)$ denote the classical Green's function of the domain G with the pole w_0. If η is the maximal value of $|f(z)|$ on $|z| = r$ for all $f \in S^*(R, M)$ and F_* is the extremal function then

(7) $$\sup_{G \in U} g(0, \eta; G) = g(0, \eta; G_*),$$

where $G_* = F_*(K_1)$.

As soon as G_* is the same for all $\eta \in (0, M)$ then the extremal function F_* for the maximum of the modulus on $|z| = r$ is the same for all $r \in (0, 1)$.

In order to determine G_* we introduce the family $U_n \subset U$ of circular polygons G_n, such that

(8) $$G_n = K_M \setminus \bigcup_{i=1}^{p} W_i, \quad 1 \leqslant p \leqslant n,$$

where $W_j = \{w: r_j \leqslant |w| \leqslant M, \ a_j \leqslant \arg w \leqslant \beta_j\}$,

$$a_j, \beta_j \in (0, 2\pi), \ R \leqslant r_j, \quad \text{and for } j \neq k \ W_i \cap W_k = \emptyset.$$

Evidently $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ is dense in U. We now solve the extremal problem (7) within the class U_n by using Hadamard's variational formulas [1]:

$$\delta g(w,\eta;G) = \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{\partial}{\partial n_\zeta} g(\zeta,w;G)\frac{\partial}{\partial n_\zeta} g(\zeta,\eta;G)\,\delta n(s)\,ds,$$

$$\delta\gamma(w,G) = \frac{1}{2\pi}\int_L \left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta} g(\zeta,w;G)\right]^2 \delta n(s)\,ds,$$

where $\gamma(w,G) = \log r(w,G)$ is the Robin's constant.

Similarly as in [1] we can show that the polygon (5) yields the maximum of $g(0,\eta;G)$ within U_n for any fixed η and any n. This implies the right hand side inequality in (4). The left hand side inequality in (4) can be proved in a similar way. The proof of Theorem 2 is similar. As corollaries of Theorems 1, 2 the bounds of $|a_2|$ are obtained. Again the functions F_*, F_c are extremal. The bounds $(1-|z|^2)|f'(z)|$ which depend on $|z|$ and $|f(z)|$ are obtained in a similar way.

Let R_f be the distance of $w=0$ from the set $C\setminus f(K_1)$, where $f(z) = z+a_2(f)z^2+\ldots \in S$. E. Netanyahu proved [2] that

$$\sup_{f\in S}(|a_2(f)|\,R_f) = \frac{2}{3}.$$

Using the estimates of $|a_2(f)|$ in $S^*(R,M)$ we obtain

Theorem 3. *We have:*

$$\sup_{f\in S^*}(|a_2(f)|\,R_f) = 0.6554\ldots .$$

The extremal function realizes the maximal value of $|f|$ for $S^*(R,+\infty)$ with $R = 0.4945\ldots$. The corresponding value of $a_2(f)$ is equal to $1.3253\ldots$.

Theorem 4. *Suppose that G_0 is the convex domain whose boundary consists of the left half of the circle $|w| = R_0$ and two rays $\{w\colon \mathrm{re}\,w \geqslant 0,\ \mathrm{im}\,w = \mp R_0\}$; R_0 is chosen so that $r(0,G_0) = 1$. If $f\in C$ and $K_{R_0}\subset f(K_1)$ then f is bounded.*

REFERENCES

[1] Krzyż, J., *Distortion theorems for bounded convex functions II*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 14 (1960), 7–18.

[2] Netanyahu, E., *Un problème d'extremum concernant les functions univalentes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B 267 (1968), 261–263.

STRESZCZENIE

Praca zawiera twierdzenia o zniekształceniu dla funkcji należących do klas $S^*(R, M)$, $C(R, M)$, odpowiednio gwiaździstych i wypukłych spełniających dodatkowo warunek

$$K_R \subset f(K_1) \subset K_M, \text{ gdzie } R < 1 < M.$$

Twierdzenie 1. *Jeśli* $R > \delta_M^*$ *i* $f \in S^*(R, M)$, *wtedy*

$$-F_*(-r) \leqslant |f(z)| \leqslant F_*(r), \ |z| = r,$$

gdzie $F_* \in S^*(R, M)$ *i odwzorowuje koło* K_1 *na obszar* G_* *określony warunkiem* (5), *zaś* δ_M^* *oznacza stałą Koebego dla klasy* $S^*(M)$.

Twierdzenie 2. *Jeśli* $R > \delta_M^c$ *i* $f \in C(R, M)$, *wtedy*

$$-F_c(-r) \leqslant |f(z)| \leqslant F_c(r), \ |z| = r,$$

gdzie $F_c \in C(R, M)$ *i odwzorowuje koło* K_1 *na pewien czworobok kołowy* G_c.

Dowody twierdzeń 1, 2, są oparte na pewnej metodzie podanej przez J. Krzyża w [1] i polegającej na sprowadzeniu problemu oszacowania $|f|$ do rozwiązania zagadnienia ekstremalnego dla funkcji Greena w pewnej klasie obszarów. Zagadnienie to można rozwiązać stosując wzory Hadamarda na wariację funkcji Greena i stałej Robina. Jako wnioski z twierdzeń 1, 2, otrzymuje się oszacowanie $|a_2|$. Ta sama metoda pozwala na oszacowanie w rozważanych klasach wyrażenia $(1-|z|^2)|f'(z)|$, które jednak zależy od $|f(z)|$.

Opierając się na twierdzeniach 1, 2, dowodzi się dwóch następujących twierdzeń:

Twierdzenie 3.

$$\sup_{f \in S^*} (|a_2(f)| R_f) = 0{,}6554 \ldots,$$

gdzie R_f *oznacza odległość punktu* $w = 0$ *od zbioru* $C \setminus f(K_1)$, *dla* $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \in S^*$.

Twierdzenie 4. *Niech* G_0 *oznacza obszar wypukły, którego brzeg składa się z lewego półokręgu* $|w| = R_0$, *oraz dwóch półprostych* $\{w: \operatorname{re} w \geqslant 0, \operatorname{im} w = \pm R_0\}$; R_0 *jest tak dobrane, że* $r(0, G_0) = 1$. *Jeśli* $f \in C$ *i* $K_{R_0} \subset f(K_1)$, *to funkcja* f *jest ograniczona.*

РЕЗЮМЕ

Работа содержит теоремы о деформации для функций, принадлежащих к классам $S^*(R, M)$, $C(R, M)$, соответственно звездных и выпуклых, выполняющих условие:

$$K_R \subset f(K_1) \subset K_M, \quad R < 1 < M.$$

Теорема 1. *Если* $R > \delta^*_M$ $f \in S^*(R, M)$, *то*

$$-F_*(-r) \leqslant |f(z)| \leqslant F_*(r), \quad |z| = r,$$

где $F_* \in S^*(R, M)$ *и отображает окружность* K_1 *на область определенную условием* (5), *а* δ^*_M *обозначает константу Коебе класса* $S^*(M)$.

Теорема 2. *Если* $R > \delta^c_M$ $f \in C(R, M)$, *то*

$$-F_c(-r) \leqslant |f(z)| \leqslant F_c(r), \quad |z| = r,$$

где $F_c \in C(R, M)$ *и отображает окружность* K_1 *на некоторый круговой четырехугольник* G_c.

Доказательства теорем 1, 2 опираются на некотором методе, данном Й. Кжижем 1 и основанном на приведении проблемы оценки $|f|$ к решению экстремальной задачи для функции Грина в некотором классе областей. Эти задачи можно решить, применяя вариационную формулу Адамара для функций Грина и константы Робина. Из теорем 1, 2 получена оценка $|a_2|$. Этот метод позволяет оценить в рассматриваемых классах также выражение $(1-|z|^2)\,|f'(z)|$, которое, однако, зависит от $|f(z)|$.

Опираясь на теоремы 1, 2, доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.

$$\sup_{f \in S^*} (|a_2(f)|\, R_f) = 0{,}6554\ldots$$

где R_f *обозначает расстояние точки* $w = 0$ *от множества* $C \setminus f(K_1)$ *для* $f(z) = z + Q_2 z^2 + \ldots \in S^*$.

Теорема 4. *Пусть* G_0 *будет выпуклой областью, контур которой состоит из левой полуокружности* $|w| = R_0$ и 2—*x полупрямых* $\{w\colon \operatorname{re} w \geqslant 0, \quad w = \pm R_0\}$; R_0 *подобрано так, что* $r(0, G_0) = 1$. *Если* $f \in C$ и $K_{R_0} \subset f(K_1)$, *то функция* f *будет ограничена*.