

ANNA ŻMUREK

Sur la torsion intégrale du type III

O skręceniu integralnym typu III

Об интегральном кручении III типа

Introduction

Dans ce travail nous allons définir la torsion intégrale du type III (seconde torsion intégrale du type III) d'une courbe faiblement régulière plongée dans l'espace euclidien à trois dimensions et nous établirons les conditions sous lesquelles cette torsion existe. Nous trouverons ensuite les conditions de convergence d'une suite de courbes de classe de régularité suffisamment élevée pour que les torsions intégrales de ces courbes tendent vers la torsion intégrale du type III d'une courbe donnée. Les torsions intégrales d'une courbe étant généralement définies comme la déviation (courbure géodésique intégrale) de son image sphérique, nous étudierons d'abord la déviation d'une courbe sur la surface d'une sphère.

1. Déviation d'une courbe (Courbure géodésique intégrale)

Soit dans l'espace euclidien à trois dimensions E^3 une surface lisse P , c'est-à-dire telle qu'en tout point X^* de cette surface il existe un plan tangent variant d'une manière continue. Supposons encore que la surface P soit convexe. La convexité de la surface sera entendue dans le sens suivant: X^* étant un point quelconque de la surface P , celle-ci est entièrement située d'un côté du plan tangent à la surface au point X^* .

Sur la surface P nous choisissons l'orientation induite par le sens de son vecteur normal.

Si l'on prend pour origine du vecteur normal $N(X^*)$ à la surface orientée P au point X^* un point fixe O , son extrémité déterminera sur la sphère unité K de centre O un point X'^* que nous appellerons image sphérique du point X^* de la surface P . Si le point X^* parcourt un domaine $G \subset P$, son image sphérique X'^* déterminera sur la sphère K un ensemble $G' \subset K$. L'aire de l'ensemble G' sera appelée courbure intégrale du domaine $G \subset P$ et désignée par $\omega(G)$ (A. D. Alexandrov [1], p. 153).

Désignons par $\langle A^* * B^* \rangle$ une courbe sur la surface P donnée par l'équation paramétrique

$$X^* = X^*(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

où $X^*(t)$ désigne le rayon-vecteur du point de la courbe qui correspond à la valeur t du paramètre, $A^* = X^*(0)$, $B^* = X^*(1)$, et telle que les conditions suivantes soient remplies:

- 1° $X^*(t_1) \neq X^*(t_2)$ pour $t_1 \neq t_2$, c'est-à-dire que la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ n'admet pas de points multiples;
- 2° dans un système de coordonnées le vecteur $X^*(t)$ possède les coordonnées $x^1(t)$, $x^2(t)$, $x^3(t)$ qui sont des fonctions réelles continues de la variable t ;
- 3° les limites unilatères suivantes existent:

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{X^*(0+h) - X^*(0)}{h} \neq 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{X^*(1-h) - X^*(1)}{h} \neq 0,$$

c'est-à-dire qu'aux points A^* et B^* de la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ les tangentes unilatères existent. Nous les nommerons respectivement $T^+(A^*)$, $T^-(B^*)$;

$$4^\circ \quad \sup \sum_{i=1}^{k-1} |X^*(t_{i+1}) - X^*(t_i)| < \infty,$$

existe, la borne supérieure étant prise par rapport à toutes les subdivisions possibles de l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$ par un nombre fini de points $t_1, t_2, \dots, t_k$ tels que $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = 1$. C'est-à-dire que la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ est rectifiable.

De la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ qui remplit ces conditions nous dirons qu'elle appartient à la classe $S^{(0)}$.

Désignons par $s^*(t)$ la longueur de l'arc $\langle A^* * B^* \rangle$, $X^* = X^*(t)$, t étant un nombre arbitraire de l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$. Il est aisé de montrer

que la longueur de la courbe ainsi définie est une fonction additive de l'arc, c'est-à-dire que $C^* \in \langle A^* * B^* \rangle$ entraîne

$$s^*(\langle A^* * B^* \rangle) = s^*(\langle A^* * C^* \rangle) + s^*(\langle C^* * B^* \rangle),$$

et une fonction croissante continue du paramètre numérique t .

On peut donc, sur la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$, prendre pour paramètre la longueur de l'arc s^* . Alors l'équation de la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ peut s'écrire sous la forme

$$X^* = Y^*(s^*), 0 \leq s^* \leq s_0^*, Y^*(0) = A^*, Y^*(s_0^*) = B^*.$$

Nous avons ainsi déterminé une orientation sur la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$.

Pour une courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ sur la surface orientée P nous définissons deux côtés que nous appellerons respectivement côtés droit et gauche. Soit, sur la surface P , U_ε un voisinage de la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ de largeur 2ε , où $\varepsilon > 0$. Désignons par K^1, K^2 les arcs de grands cercles situés entièrement dans le domaine U_ε et satisfaisant aux conditions suivantes:

- 1) les arcs K^1, K^2 sont issus respectivement des points A^* et B^* et s'étendent jusqu'à leur intersection avec le bord du domaine U_ε ,
- 2) les arcs K^1, K^2 ont avec la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ des vecteurs tangents communs respectivement aux points A^* et B^* : $T^+(A^*), T^-(B^*)$,
- 3) l'orientation des arcs K^1, K^2 est induite par l'orientation de la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$.

La courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ avec les arcs K^1, K^2 partage le domaine U_ε en deux parties $U'_\varepsilon, U''_\varepsilon$. Nous dirons que la courbe $\langle C^* * D^* \rangle \subset U_\varepsilon$ est située d'un côté de la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ si elle ne coupe ni la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ ni les arcs K^1 et K^2 .

Soit $L_i^* = \{M_i^{1*}, M_i^{2*}, \dots, M_i^{m_i^*}\}$, $i = 1, 2, \dots$ une suite de lignes brisées géodésiques sur la surface P , sans points multiples, joignant les points A^* et B^* , situées du côté droit de la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ et tendant vers la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$. La portion de la surface P limitée par les courbes $\langle A^* * B^* \rangle$ et par L_i^* sera désignée par D_i .

Nous appellerons déviation ou déviation droite de la ligne brisée L_i^* le nombre φ_i :

$$(1) \quad \varphi_i = \sum_{p=1}^{m_i-2} (\pi - \alpha_i^p),$$

où

$$\alpha_i^p = \sphericalangle (M_i^{p+1*} M_i^{p*}, M_i^{p+1*} M_i^{p+2*}),$$

$M_i^{p+1*} M_i^{p*}, M_i^{p+1*} M_i^{p+2*}$ — étant les segments les plus courts contenus entre les points correspondants; l'angle α_i^p est compté du côté droit de la ligne brisée L_i^* , c'est-à-dire à partir de l'extérieur du domaine D_i .

Désignons par γ_i et δ_i les angles, de sommets A^* et B^* , que fait la ligne brisée L_i^* avec la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ dans le domaine D_i .

Nous appellerons déviation droite ou déviation à droite de la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ le nombre φ :

$$(2) \quad \varphi = \lim_{L_i^* \rightarrow \langle A^* * B^* \rangle} (\varphi_i + \gamma_i + \delta_i).$$

D'une façon analogue nous définissons la déviation à gauche de la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$:

$$(3) \quad \psi = \lim_{L_i'^* \rightarrow \langle A^* * B^* \rangle} (\psi_i + \gamma_i' + \delta_i')$$

où $L_i'^*$ tend vers $\langle A^* * B^* \rangle$ à gauche et

$$(4) \quad \psi_i = \sum_{q=1}^{m-2} (\pi - \beta_i^q),$$

$$\beta_i^q = \sphericalangle (M_i'^{q+1*} M_i'^{q*} M_i'^{q+1*} M_i'^{q+2*})$$

cet angle étant compté du côté gauche de la ligne brisée $L_i'^*$; γ_i' , δ_i' sont les angles que fait la ligne brisée $L_i'^*$ avec la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ aux points A^* et B^* .

A. D. Alexandrov ([1], p. 283), a démontré que si la courbe admet en ses extrémités des tangentes unilatères, les limites qui figurent dans les formules (2) et (3) existent et ne dépendent pas des suites de lignes brisées L_i^* , $L_i'^*$ qui tendent vers $\langle A^* * B^* \rangle$ respectivement du côté droit et du côté gauche. Il a prouvé, en outre, que si le point $C^* \in \langle A^* * B^* \rangle$ et les arcs $\langle A^* * C^* \rangle$, $\langle C^* * B^* \rangle$ admettent au point C^* des tangentes unilatères, on a

$$(5) \quad \varphi(\langle A^* * B^* \rangle) = \varphi(\langle A^* * C^* \rangle) + \varphi(\langle C^* * B^* \rangle) + \varphi(C^*)$$

où

$$\varphi(C^*) = \pi - \gamma,$$

l'angle γ entre les tangentes unilatères à la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ au point C^* est compté du côté droit par rapport à la courbe.

Une relation analogue a lieu pour la déviation à gauche.

Une courbe admet une déviation si les tangentes unilatères en ses extrémités existent; l'existence de la déviation de la courbe entière n'entraîne donc pas l'existence de la déviation de tous ses arcs.

En s'appuyant sur la notion de la déviation d'une courbe A. D. Alexandrov a introduit dans sa monographie [1], pp. 283-6, une définition, un peu différente de la définition classique, de la courbure géodésique d'une courbe en un point, admettant que tout arc de la courbe admet une déviation. Notamment, il a défini la courbure géodésique droite (ou gauche

d'une courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ au point X^* comme la limite du rapport de la déviation droite (ou gauche) de l'arc de la courbe qui contient le point X^* à la longueur de cet arc lorsque cet arc se réduit au point X^* . Évidemment cette limite peut ne pas exister. Pour les surfaces suffisamment régulières (de classe $C^{(2)}$ au moins) cette définition se confond avec la définition classique et les courbures droites et gauches ne diffèrent que par leurs signes. Dans ce cas on trouve que la déviation est l'intégrale de la courbure géodésique par rapport à la longueur de l'arc. La déviation est donc une généralisation de la courbure géodésique intégrale (intégrale de la courbure géodésique).

Sur une surface convexe lisse la somme des angles aux sommets d'une ligne brisée quelconque L_i^* à droite et à gauche est 2π :

$$\alpha_i^p + \beta_i^p = 2\pi,$$

donc $\varphi_i = -\psi_i$, d'où il s'ensuit que $\varphi = -\psi$.

Dans la suite nous admettrons donc comme déviation de la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ sa déviation à droite.

Désignons par $\{\langle A_n^* * B_n^* \rangle\}$ une suite de courbes sur la surface P donnée par les équations paramétriques:

$$X_n^* = X_n^*(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

les courbes étant de classe $S^{(0)}$ et telles que les coordonnées des vecteurs $X_n^*(t)$, $n = 1, 2, \dots$ soient des fonctions de classe C^2 .

Les courbes $\{\langle A_n^* * B_n^* \rangle\}$ seront appelées courbes de classe $S^{(2)}$.

Par $s_n^*(t)$ désignons la longueur de l'arc $\langle A_n^* * X_n^* \rangle$ où $X_n^* = X_n^*(t)$ et t est un nombre quelconque de l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$.

Les coordonnées des vecteurs $X_n^*(t)$ étant des fonctions de classe C^2 , les courbes $\langle A_n^* * B_n^* \rangle$, $n = 1, 2, \dots$ ont sur la surface P une courbure géodésique déterminée pour toute valeur $t \in \langle 0, 1 \rangle$. La déviation de l'arc $\langle X_n'^* * X_n''^* \rangle$, $X_n'^* = X_n^*(t')$, $X_n''^* = X_n^*(t'')$, $0 \leq t' < t'' \leq 1$, est donc l'intégrale de la courbure géodésique par rapport à la longueur de cet arc.

Nous dirons que la suite de courbes $\{\langle A_n^* * B_n^* \rangle\}$ d'équation $X_n^* = X_n^*(t)$, $n = 1, 2, \dots$, tend vers la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ d'équation $X^* = X^*(t)$, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un indice n_0 et une paramétrisation des courbes $\langle A_n^* * B_n^* \rangle$ $n = 1, 2, \dots$, $\langle A^* * B^* \rangle$ telle que pour $n > n_0$ on ait

$$|X_n^*(t) - X^*(t)| < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs de t en même temps.

Lemme 1. Soit sur la surface d'une sphère une suite $\{\langle A_n^* * B_n^* \rangle\}$ de courbes de classe $S^{(2)}$ tendant vers la courbe $\langle A^* * B^* \rangle \in S^{(0)}$. Si $T^+(A_n^*) \rightarrow T^+(A^*)$, $T^-(B_n^*) \rightarrow T^-(B^*)$, les déviations (droites) des courbes $\{\langle A_n^* * B_n^* \rangle\}$ tendent vers la déviation (droite) de la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$.

Démonstration. De l'hypothèse et du théorème de A. D. Alexandrov ([1], p. 283) il résulte que les courbes $\{\langle A_n^* B_n^* \rangle\}$ aussi bien que la courbe $\langle A^* B^* \rangle$ ont des déviations déterminées.

Considérons d'abord le cas où les courbes $\{\langle A_n^* B_n^* \rangle\}$ ne coupent pas la courbe $\langle A^* B^* \rangle$ et supposons que les courbes $\{\langle A_n^* B_n^* \rangle\}$ soient constamment situées du côté droit de la courbe $\langle A^* B^* \rangle$. (Si les courbes de la suite $\{\langle A_n^* B_n^* \rangle\}$ étaient situées de part et d'autre de la courbe $\langle A^* B^* \rangle$, il existerait au moins une suite partielle $\{\langle A_{n_1}^* B_{n_1}^* \rangle\}$ comptant une infinité d'éléments et située d'un côté de la courbe $\langle A^* B^* \rangle$. Alors la démonstration serait faite pour cette suite partielle.)

Soit U un voisinage de la courbe $\langle A^* B^* \rangle$ de largeur 2ε , où ε est un nombre positif quelconque. Il existe un indice n_0 tel que pour tous les $n > n_0$ les courbes $\{\langle A_n^* B_n^* \rangle\} \subset U$. Joignons les points A^* et A_n^* ainsi que B^* et B_n^* par les courbes K_n^1 et K_n^2 de classe $S^{(2)}$, entièrement situées dans le domaine U et ne coupant pas les courbes $\langle A^* B^* \rangle$, $\langle A_n^* B_n^* \rangle$ (grâce à l'existence des tangentes unilatères aux extrémités des courbes $\langle A^* B^* \rangle$, $\langle A_n^* B_n^* \rangle$ il est possible de mener de telles courbes K_n^1 et K_n^2). En effet, si la courbe $\langle A^* B^* \rangle$ sur la surface P admet au point A^* une tangente à droite $T^+(A^*)$ et si $U_\varepsilon(A^*)$ est un entourage du point A^* de rayon $\varepsilon > 0$, on peut joindre tout point $Y^* \in U_\varepsilon(A^*)$ au point A^* par une ligne brisée géodésique entièrement située dans le domaine $U_\varepsilon(A^*)$ et ne coupant pas la courbe $\langle A^* B^* \rangle$. Il en est de même du point B^* . Les courbes $\langle A_n^* B_n^* \rangle$, $n = 1, 2, \dots$ tendant par hypothèse vers la courbe $\langle A^* B^* \rangle$, il existe un n_0 tel que pour tous les $n > n_0$ les points A^* et B^* seront contenus respectivement dans les entourages $U_\varepsilon(A^*)$, $U_\varepsilon(B^*)$. En tenant compte de ce fait et des remarques précédentes on voit qu'il existe des courbes K_n^1, K_n^2 satisfaisant aux conditions données.)

Sur la courbe K_n^1 nous déterminons une orientation telle que le point A_n^* soit le point — origine de la courbe, le point A^* — son extrémité. La courbe K_n^2 , par contre, est orientée en sorte que le point B_n^* soit son point — origine, le point B^* — son extrémité.

Sur la surface de la sphère nous aurons ainsi un domaine H_n limité par les courbes $\langle A^* B^* \rangle$, $\langle A_n^* B_n^* \rangle$, K_n^1 et K_n^2 , tel que $H_n \subset U$. Comme la courbure est continue, la courbure $\omega(H_n)$ du domaine H_n tend vers zéro lorsque les courbes $\{\langle A_n^* B_n^* \rangle\}$ tendent vers la courbe $\langle A^* B^* \rangle$.

Soient $L_i, L_{in}, L_{in}^1, L_{in}^2$ des lignes brisées sphériques (géodésiques) sans points multiples et ne se coupant pas mutuellement, contenues à l'intérieur du domaine H_n , joignant les couples de points A^* et B^* , A_n^* et B_n^* , A_n^* et A^* , B_n^* et B^* et tendant respectivement vers les courbes $\langle A^* B^* \rangle$, $\langle A_n^* B_n^* \rangle$, K_n^1, K_n^2 lorsque $i \rightarrow \infty$. Elles limitent le domaine $H_{in} \subset H_n$.

Désignons par

$\varphi_i, \varphi_{in}^1$ — les déviations à droite des lignes brisées L_i, L_{in}^1 ,
 ψ_{in}, ψ_{in}^2 — les déviations à gauche des lignes brisées L_{in}, L_{in}^2 ,
 $\gamma_i^1, \gamma_i^2, \gamma_{in}^1, \gamma_{in}^2$ — les angles, de sommets A^*, B^*, A_n^*, B_n^* ,
 entre les lignes brisées correspondantes sont comptés du côté du domaine H_{in} .

La courbure $\omega(H_{in})$ du domaine H_{in} s'exprime par la formule

$$\omega(H_{in}) = 2\pi - [\varphi_i + \psi_{in} + \varphi_{in}^1 + \psi_{in}^2 + (\pi - \gamma_i^1) + (\pi - \gamma_{in}^1) + (\pi - \gamma_{in}^2) + (\pi - \gamma_i^2)]$$

(A. D. Alexandrov [1], p. 282).

Introduisons les notations:

α_i, β_i — les angles que la ligne brisée L_i forme avec la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ respectivement aux points A^* et B^* ;
 α_{in}, β_{in} — les angles que la ligne brisée L_{in} forme avec la courbe $\langle A_n^* * B_n^* \rangle$ respectivement aux points A_n^* et B_n^* ;
 $\alpha_{in}^1, \beta_{in}^1$ — les angles entre la ligne brisée L_{in}^1 et la courbe K_n^1 respectivement aux points A_n^* et A^* ;
 $\alpha_{in}^2, \beta_{in}^2$ — les angles entre la ligne brisée L_{in}^2 et la courbe K_n^2 respectivement aux points B_n^* et B^* .

La courbure $\omega(H_{in})$ du domaine H_{in} peut être écrite sous la forme:

$$\omega(H_{in}) = 2\pi - [(\varphi_i + \alpha_i + \beta_i) + (\psi_{in} + \alpha_{in} + \beta_{in}) + (\varphi_{in}^1 + \alpha_{in}^1 + \beta_{in}^1) + (\psi_{in}^2 + \alpha_{in}^2 + \beta_{in}^2) + (\pi - \gamma_i^1 - \alpha_i - \beta_{in}^1) + (\pi - \gamma_i^2 - \beta_i - \beta_{in}^2) + (\pi - \gamma_{in}^1 - \alpha_{in}^1 - \alpha_{in}) + (\pi - \gamma_{in}^2 - \beta_{in} - \alpha_{in}^2)].$$

Désignons encore par $\gamma^1, \gamma^2, \gamma_n^1, \gamma_n^2$ les angles de sommets aux points A^*, B^*, A_n^*, B_n^* , dont les côtés sont les tangentes unilatérales aux courbes correspondantes $\langle A^* * B^* \rangle, \langle A_n^* * B_n^* \rangle, K_n^1, K_n^2$ en ces points, comptés du côté du domaine H_n . Alors

$$\gamma^1 = \gamma_i^1 + \alpha_i + \beta_{in}^1$$

$$\gamma^2 = \gamma_i^2 + \beta_i + \beta_{in}^2$$

$$\gamma_n^1 = \gamma_{in}^1 + \alpha_{in}^1 + \alpha_{in}$$

$$\gamma_n^2 = \gamma_{in}^2 + \beta_{in} + \alpha_{in}^2$$

En passant à la limite avec $i \rightarrow \infty$ et en tenant compte de ces relations on obtient:

$$\omega(H_n) = 2\pi - [\varphi + \psi_n + \varphi_n^1 + \psi_n^2 + (\pi - \gamma^1) + (\pi - \gamma^2) + (\pi - \gamma_n^1) + (\pi - \gamma_n^2)],$$

où

φ, φ_n^1 désignent les déviations à droite de courbes $\langle A^* * B^* \rangle, K_n^1$;
 ψ_n, ψ_n^2 désignent les déviations à gauche de courbes $\langle A_n^* * B_n^* \rangle, K_n^2$.

Soit

$$\gamma_n'^1 = \pi - \gamma_n^1$$

$$\gamma_n'^2 = \pi - \gamma_n^2$$

et tenant compte des relations

$$\psi_n = -\varphi_n$$

$$\psi_n^2 = -\varphi_n^2$$

on obtient:

$$\omega(H_n) = \varphi_n - \varphi + \varphi_n^2 - \varphi_n^1 + (\gamma^1 - \gamma_n'^1) + (\gamma^2 - \gamma_n'^2).$$

Si donc $\varepsilon \rightarrow 0$, les courbes $\langle A_n^* * B_n^* \rangle$ tendent vers la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$,
 $\omega(H_n) \rightarrow 0, \varphi_n^1 \rightarrow 0, \varphi_n^2 \rightarrow 0$ comme fonctions d'arcs qui se réduisent à des points et

$$|\varphi_n - \varphi + (\gamma^1 - \gamma_n'^1) + (\gamma^2 - \gamma_n'^2)| \rightarrow 0.$$

Comme nous avons supposé que $T^+(A_n^*) \rightarrow T^+(A^*), T^-(B_n^*) \rightarrow T^-(B^*)$
et que les tangentes unilatérales aux courbes K_n^1, K_n^2 respectivement aux points A_n^*, A^* et B_n^*, B^* font, quand on passe à la limite avec $n \rightarrow \infty$, un angle égal à π , il s'ensuit que

$$|\gamma^1 - \gamma_n'^1| \rightarrow 0, |\gamma^2 - \gamma_n'^2| \rightarrow 0,$$

donc

$$|\varphi_n - \varphi| \rightarrow 0.$$

Considérons maintenant le cas où les courbes $\langle A_n^* * B_n^* \rangle$ coupent la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ en un nombre de points fini ou infini.

Soit U_ε le voisinage de la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$, de largeur 2ε , où ε est un nombre positif quelconque. La courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ étant rectifiable et la courbure ω étant continue, la courbure $\omega(U_\varepsilon)$ du domaine U_ε tend vers zéro lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Il existe un indice n_0 tel que pour toutes les valeurs de $n > n_0$ les courbes $\langle A_n^* * B_n^* \rangle \subset U_\varepsilon$.

Les courbes $\langle A^* * B^* \rangle, \langle A_n^* * B_n^* \rangle$ partagent le domaine U_ε en 4 ensembles $U_\varepsilon^+, U_\varepsilon^-, U_{n\varepsilon}^+, U_{n\varepsilon}^-$ tels que l'ensemble U_ε^+ est constamment situé du côté droit de la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$; l'ensemble U_ε^- — du côté gauche; l'ensemble $U_{n\varepsilon}^+$ est situé du côté droit, l'ensemble $U_{n\varepsilon}^-$ — du côté gauche de la courbe $\langle A_n^* * B_n^* \rangle$.

Soit G_n l'ensemble défini comme il suit:

$$G_n = U_\varepsilon^- \cup (U_\varepsilon^+ \cap U_{n\varepsilon}^-).$$

La partie du bord de l'ensemble G_n qui est composée de points des courbes $\langle A^* * B^* \rangle$ et $\langle A_n^* * B_n^* \rangle$ est une courbe. Nous la désignerons par $\langle A_n'^* * B_n'^* \rangle$.

Soit $U_{\varepsilon'}^+$ le voisinage droit de la courbe $\langle A_n'^* * B_n'^* \rangle$ de largeur $2\varepsilon'$, où ε' est un nombre positif. La courbure étant continue, on a $\omega(U_{\varepsilon'}^+) \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon' \rightarrow 0$.

Construisons une ligne brisée sphérique L_n , entièrement contenue dans le voisinage $U_{\varepsilon'}^+$, joignant les points $A_n'^*$ et $B_n'^*$, située du côté droit de la courbe $\langle A_n'^* * B_n'^* \rangle$ et telle que les angles α_n' , β_n' que font aux points $A_n'^*$, $B_n'^*$ la ligne brisée L_n et la courbe $\langle A_n'^* * B_n'^* \rangle$ soient inférieurs à ε :

$$(6) \quad \alpha_n' < \varepsilon, \quad \beta_n' < \varepsilon.$$

En vertu de la définition des ensembles U_{ε} , $U_{\varepsilon'}^+$ on a:

$$(7) \quad \omega(U_{\varepsilon} \cup U_{\varepsilon'}^+) \rightarrow 0$$

lorsque $\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0$.

Joignons les points A^* et $A_n'^*$ ainsi que B^* et $B_n'^*$ par les courbes K_n^1 et K_n^2 , de classe $S^{(2)}$, entièrement situées dans le domaine $U_{\varepsilon} \cup U_{\varepsilon'}^+$ (dans le cas où $A_n'^* = A^*$ ou $B_n'^* = B^*$, les arcs K_n^1 ou K_n^2 se réduisent à un point). Nous obtenons ainsi sur la sphère un domaine H_n limité par la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$, la ligne brisée L_n et les courbes K_n^1 , K_n^2 . Comme $H_n \subset U_{\varepsilon} \cup U_{\varepsilon'}^+$, on a

$$(8) \quad \omega(H_n) \rightarrow 0.$$

Désignons par $T^+(A_n'^*)$, $T^-(B_n'^*)$ les tangentes à droite respectivement à gauche aux points $A_n'^*$, $B_n'^*$ de la courbe $\langle A_n'^* * B_n'^* \rangle$. L'existence de ces tangentes unilatères aux extrémités de la courbe $\langle A_n'^* * B_n'^* \rangle$ résulte de la construction même de cette courbe; de plus on a $T^+(A_n'^*) = T^+(A_n^*)$ ou bien $T^+(A_n'^*) = T^+(A^*)$ et $T^-(B_n'^*) = T^-(B_n^*)$ ou bien $T^-(B_n'^*) = T^-(B^*)$. Il résulte donc de l'hypothèse du lemme que $T^+(A_n'^*) \rightarrow T^+(A^*)$ et $T^-(B_n'^*) \rightarrow T^-(B^*)$.

Désignons par $\gamma^1, \gamma^2, \gamma_n^1, \gamma_n^2$, de même que dans la première partie de la démonstration les angles de sommets $A^*, B^*, A_n'^*, B_n'^*$, dont les côtés sont les tangentes unilatères aux courbes correspondantes $\langle A^* * B^* \rangle$, L_n , K_n^1 , K_n^2 en ces points, ces angles étant comptés du côté du domaine H_n . En tenant compte de (8) on obtient, de même qu'à la p. 70:

$$|\varphi_{nL_n} - \varphi + (\gamma^1 - \gamma_n^1) + (\gamma^2 - \gamma_n^2)| \rightarrow 0,$$

où

$$\gamma_n^1 = \pi - \gamma_n^1, \quad \gamma_n^2 = \pi - \gamma_n^2,$$

et où φ_{nL_n} , φ désignent les déviations à droite de la ligne brisée L_n respectivement de la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$.

Les tangentes unilatères aux extrémités des courbes $\langle A_n^* * B_n^* \rangle$, $n = 1, 2, \dots$ ayant des limites, on obtient en profitant de la condition (6):

$$|\gamma^1 - \gamma_n'^1| \rightarrow 0, \quad |\gamma^2 - \gamma_n'^2| \rightarrow 0,$$

donc

$$(9) \quad |\varphi_{nL_n} - \varphi| \rightarrow 0.$$

En répétant le même raisonnement pour la courbe $\langle A_n^* * B_n^* \rangle$ et la ligne brisée L_n on démontre que

$$(10) \quad |\varphi_{nL_n} - \varphi_n| \rightarrow 0,$$

quand $n \rightarrow \infty$ (φ_n désignant la déviation à droite de la courbe $\langle A_n^* * B_n^* \rangle$).

De (9) et (10) on tire

$$|\varphi_n - \varphi| \leq |\varphi_n - \varphi_{nL_n}| + |\varphi_{nL_n} - \varphi|,$$

donc

$$|\varphi_n - \varphi| \rightarrow 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Supposons maintenant que la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ admette en chacun de ses points un vecteur tangent au sens ordinaire $T(X^*)$, défini comme

$$T(X^*) = \frac{dX^*(t)}{dt} \bigg/ \left| \frac{dX^*(t)}{dt} \right|$$

Lemme 1'. *Supposons donnée sur la surface de la sphère une suite de courbes $\{\langle A_n^* * B_n^* \rangle\}$ de classe $S^{(2)}$ et une courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ de classe $S^{(0)}$, celle-ci admettant en tout point un vecteur tangent. Si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un indice n_0 et une paramétrisation des courbes $\langle A^* * B^* \rangle$, $\{\langle A_n^* * B_n^* \rangle\}$ telle que pour $n > n_0$ on ait*

$$|X_n^*(t) - X^*(t)| < \varepsilon$$

et

$$|T(X_n^*(t)) - T(X^*(t))| < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs de t en même temps, les déviations des arcs $\{\langle X_n^*(t_1) * X_n^*(t_2) \rangle\}$ tendent pour tout couple de nombres $t_1, t_2 \in \langle 0, 1 \rangle$, $t_1 < t_2$, vers la déviation de l'arc $\langle X^*(t_1) * X^*(t_2) \rangle$.

La démonstration de ce lemme est analogue à celle du lemme 1, puisque la convergence des courbes qu'on y admet est sur tout arc une convergence dans le sens précisé plus haut (p. 67).

2. La torsion intégrale du type III

Désignons par $\langle A * B \rangle$ une courbe dans l'espace euclidien à trois dimensions E^3 , dont l'équation paramétrique est

$$X = X(t) \quad 0 \leq t \leq 1,$$

où $X(t)$ est le rayon-vecteur du point de la courbe qui correspond à la valeur t du paramètre, $X(0) = A$, $X(1) = B$ et telle que les conditions suivantes soient remplies:

- 1° $X(t_1) \neq X(t_2)$ pour $t_1 \neq t_2$, c'est-à-dire que la courbe n'a pas de points multiples;
- 2° dans un système de coordonnées le vecteur $X(t)$ a les coordonnées $x^1(t)$, $x^2(t)$, $x^3(t)$, fonctions réelles continues de la variable t , dont les dérivées $\frac{dx^i(t)}{dt}$, $i = 1, 2, 3$, sont continues dans l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$

et ne s'y annulent pas simultanément, c'est-à-dire qu'en tout point de la courbe il existe un vecteur tangent continu non nul.

De la condition 2° il résulte que la courbe $\langle A * B \rangle$ est rectifiable.

Le vecteur tangent unité au point X de la courbe $\langle A * B \rangle$, déterminé par la condition 2°, sera désigné par $T(X)$, donc

$$T(X) = \frac{dX(t)}{dt} / \left| \frac{dX(t)}{dt} \right|$$

où

$$\left| \frac{dX(t)}{dt} \right| = \left[\left(\frac{dx^1(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^2(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^3(t)}{dt} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Si l'on place l'origine du vecteur tangent $T(X)$ de la courbe $\langle A * B \rangle$ à l'origine 0 des coordonnées, son extrémité décrira sur la sphère-unité de centre 0 une courbe continue d'équation

$$(11) \quad X^* = X^*(t) = \frac{dX(t)}{dt} / \left| \frac{dX(t)}{dt} \right|$$

appelée indicatrice sphérique ou image sphérique de la courbe $\langle A * B \rangle$. Nous la désignerons par $\langle A^* * B^* \rangle$.

Supposons encore:

- 1) que la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ n'ait pas de points multiples,
- 2) que la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ soit rectifiable.

Pour la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ sur la sphère on peut déterminer, de même qu'on l'a fait aux p. 65, deux côtés, les appelant respectivement côté droit et côté gauche.

Une courbe $\langle A * B \rangle$ satisfaisant à toutes ces conditions sera dorénavant appelée courbe de classe $K^{(1)}$.

Notons

$$(12) \quad s(t) \text{ la longueur de l'arc } \langle A * B \rangle, X = X(t), t \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$(13) \quad k(t) \text{ la longueur de l'arc } \langle A^* * B^* \rangle, X^* = X^*(t), t \in \langle 0, 1 \rangle$$

La fonction $k(t)$ est appelée courbure intégrale de l'arc $\langle A * B \rangle$.

Pour les courbes de classe C^2 la courbure intégrale est intégrale — au sens classique — de la courbure de la courbe en un point par rapport à la longueur de l'arc $\langle A * B \rangle$, $X = X(t)$. La fonction $k(t)$ est une fonction additive d'intervalle (d'arc). De là et des hypothèses 2° et 2) il résulte que $s(t)$ et $k(t)$ admettent pour tout $t \in \langle 0, 1 \rangle$ des valeurs positives finies.

Supposons encore que la courbe $\langle A * B \rangle$ admet aux points A et B des plans osculateurs unilatères du type III. (On appelle plan osculateur du type III de la courbe $\langle A * B \rangle$ au point $X_0 = X(t_0)$, $0 \leq t_0 \leq 1$, la limite vers laquelle tendent les plans $\pi(X_0; T(X_0), T(X))$ passant par le point X_0 et parallèles aux vecteurs tangents $T(X_0), T(X)$ de la courbe $\langle A * B \rangle$, $X = X(t)$, quand le point X tend arbitrairement vers X_0 , c'est-à-dire quand $t \rightarrow t_0$; E. J. van der Waag [4]).

L'existence des plans osculateurs du type III aux points A et B de la courbe $\langle A * B \rangle$ implique l'existence des tangentes unilatères aux points A^* et B^* de la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$.

Comme la correspondance entre les points de la courbe $\langle A * B \rangle$ et les points de son image sphérique $\langle A^* * B^* \rangle$ est biunivoque, l'existence des tangentes unilatères aux points A^* et B^* de la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ entraîne, inversement, l'existence des plans osculateurs du type III aux points A et B de la courbe $\langle A * B \rangle$.

Définition 1. On appellera torsion intégrale droite du type III, en abrégé: torsion intégrale du type III de la courbe $\langle A * B \rangle$ de classe $K^{(1)}$ la déviation à droite (la courbure géodésique intégrale à droite) de son image sphérique $\langle A^* * B^* \rangle$.

La torsion intégrale à droite du type III de la courbe $\langle A * B \rangle$ sera désignée par $\tau_3(\langle A * B \rangle)$.

Théorème 1. Si la courbe $\langle A * B \rangle$ de classe $K^{(1)}$ admet aux points A et B des plans osculateurs unilatères du type III, la torsion intégrale du type III de la courbe $\langle A * B \rangle$ existe.

Ce théorème résulte directement du théorème 1 de A. D. Alexandrov [1], p. 283.

Nous nous occuperons maintenant du problème de la convergence des torsions intégrales des courbes de classe $K^{(3)}$ quand ces courbes tendent vers la courbe $\langle A * B \rangle$.

Dans le travail [3] K. Radziszewski a établi les conditions sous lesquelles les courbures intégrales des courbes $\{\langle A_n * B_n \rangle\}$ tendent vers la courbure intégrale de la courbe $\langle A * B \rangle$.

Nous établirons maintenant les conditions sous lesquelles les torsions intégrales des courbes $\{\langle A_n * B_n \rangle\}$ tendent vers la torsion intégrale du type III de la courbe $\langle A * B \rangle$.

Désignons par $\{\langle A_n * B_n \rangle\}$ une suite de courbes dans l'espace euclidien à trois dimensions, données par les équations paramétriques:

$$X_n = X_n(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

courbes de classe $K^{(1)}$ telles que les coordonnées de leurs points soient des fonctions de classe C^3 . Les courbes $\{\langle A_n * B_n \rangle\}$ seront appelées courbes de classe $K^{(3)}$.

Désignons respectivement par $s_n(t)$, $k_n(t)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$ la longueur et la courbure intégrale de l'arc $\langle A_n * B_n \rangle$, $X_n = X_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$.

La condition de régularité des coordonnées des vecteurs $\{X_n(t)\}$ implique que les fonctions $\{X_n^*(t)\}$ sont de classe C^2 . Les courbes $\{\langle A_n^* * B_n^* \rangle\}$ ont donc sur la sphère une courbure géodésique bien déterminée en tout point $\{X_n^*\}$, $X_n^* \in \langle A_n^* * B_n^* \rangle$. La torsion intégrale de l'arc $\langle A_n * X_n \rangle$ est donc intégrale de la courbure géodésique de son image sphérique $\langle A_n^* * X_n^* \rangle$ par rapport à la longueur de l'arc $\langle A_n^* * X_n^* \rangle$ (p. 67).

La torsion intégrale de l'arc $\langle A_n * X_n \rangle$ sera désignée par $\tau(\langle A_n * X_n \rangle)$. Observons que

$$\tau(\langle A_n * X_n \rangle) = \tau_3(\langle A_n * X_n \rangle).$$

La convergence de la suite des courbes $\{\langle A_n * B_n \rangle\}$ vers la courbe $\langle A * B \rangle$ sera entendue ainsi: pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un indice n_0 et une paramétrisation des courbes $\{\langle A_n * B_n \rangle\}$ et de la courbe $\langle A * B \rangle$ telle que pour $n > n_0$ $|X_n(t) - X(t)| < \varepsilon$ pour toutes les valeurs de t en même temps.

Théorème 2. Soit dans l'espace euclidien à trois dimensions une suite de courbes $\{\langle A_n * B_n \rangle\}$ de classe $K^{(3)}$, convergeant vers la courbe $\langle A * B \rangle$ de classe $K^{(1)}$ et admettant aux points A et B des plans osculateurs unilatères du type III. Si les images sphériques $\{\langle A_n^* * B_n^* \rangle\}$ des courbes $\{\langle A_n * B_n \rangle\}$ (ensembles des vecteurs tangents) tendent vers l'image sphérique $\langle A^* * B^* \rangle$ de la courbe $\langle A * B \rangle$ et si les plans osculateurs unilatères des courbes $\{\langle A_n * B_n \rangle\}$ aux points $\{A_n\}$ et $\{B_n\}$ tendent vers les plans osculateurs unilatères du type III aux points A et B de la courbe $\langle A * B \rangle$, les torsions intégrales $\{\tau(\langle A_n * B_n \rangle)\}$ tendent vers la torsion intégrale du type III $\tau_3(\langle A * B \rangle)$, c'est-à-dire

$$\lim \tau(\langle A_n * B_n \rangle) = \tau_3(\langle A * B \rangle),$$

quand $\langle A_n * B_n \rangle \rightarrow \langle A * B \rangle$.

Démonstration. De l'hypothèse et du théorème 1 résulte l'existence des torsions intégrales du type III $\tau_3(\langle A_n * B_n \rangle)$, $n = 1, 2, \dots$ et $\tau_3(\langle A * B \rangle)$. Les images sphériques $\{\langle A_n^* * B_n^* \rangle\}$, $\langle A^* * B^* \rangle$ des courbes $\{\langle A_n * B_n \rangle\}$, $\langle A * B \rangle$ vérifient les hypothèses du lemme 1 (p. 67), donc leurs déviations droites sur la sphère satisfont à la condition:

$$\lim \varphi(\langle A_n^* * B_n^* \rangle) = \varphi(\langle A^* * B^* \rangle),$$

quand $\langle A_n^* B_n^* \rangle \rightarrow \langle A^* B^* \rangle$. Puisque les déviations des images sphériques $\{\langle A_n^* B_n^* \rangle\}$, $\langle A^* B^* \rangle$ sont, en vertu de la définition 1, les torsions intégrales du type III des courbes $\{\langle A_n B_n \rangle\}$, $\langle A B \rangle$, on en déduit immédiatement la conclusion du théorème.

Les derniers théorèmes ainsi que les résultats de A. D. Alexandrov cités à les pp. 66-67 entraînent les théorèmes suivants:

Théorème 1'. *Si la courbe $\langle A B \rangle$ de classe $K^{(1)}$ admet en tout point un plan osculateur du type III, la torsion intégrale du type III est déterminée pour tous les arcs et elle est une fonction additive de l'arc.*

Théorème 2'. *Soit une suite de courbes $\{\langle A_n B_n \rangle\}$ de classe $K^{(3)}$ convergeant avec leurs tangentes vers une courbe $\langle A B \rangle$ de classe $K^{(1)}$ admettant en tout point $X \in \langle A B \rangle$ un plan osculateur $\pi_{III}(X)$ du type III. Si pour tout $t \in \langle 0, 1 \rangle$ $\pi_{III}(X_n) \rightarrow \pi_{III}(X)$ quand $n \rightarrow \infty$, $X_n = X_n(t)$, $X = X(t)$ et si t_1, t_2 sont des nombres quelconques de l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$, $t_1 < t_2$, les torsions intégrales $\tau(\langle X_n^1 * X_n^2 \rangle)$ tendent vers la torsion intégrale du type III $\tau_3(\langle X^1 * X^2 \rangle)$, $X_n^i = X_n(t_i)$, $X^i = X(t_i)$, $i = 1, 2$; c'est-à-dire*

$$\lim \tau(\langle X_n^1 * X_n^2 \rangle) = \tau_3(\langle X^1 * X^2 \rangle)$$

quand $\langle X_n^1 * X_n^2 \rangle \rightarrow \langle X^1 * X^2 \rangle$.

La démonstration, analogue à celle du théorème 2, résulte directement du lemme 1'.

Les considérations précédentes permettent de définir la torsion intégrale du type III de la courbe $\langle A B \rangle$ (distributivement) ainsi:

Définition 2. On dit que le nombre $\tau_3(\langle A B \rangle)$ est la torsion intégrale du type III de la courbe $\langle A B \rangle$ de classe $K^{(1)}$, admettant aux points A et B des plans osculateurs unilatères du type III, si $\tau_3(\langle A B \rangle)$ est la limite des torsions intégrales $\{\tau(\langle A_n B_n \rangle)\}$ de la suite des courbes $\{\langle A_n B_n \rangle\}$ de classe $K^{(3)}$ qui satisfont aux conditions:

- 1° les courbes $\{\langle A_n B_n \rangle\}$ tendent vers la courbe $\langle A B \rangle$,
- 2° les images sphériques $\{\langle A_n^* B_n^* \rangle\}$ des courbes $\{\langle A_n B_n \rangle\}$ tendent vers l'image sphérique $\langle A^* B^* \rangle$ de la courbe $\langle A B \rangle$,
- 3° les plans osculateurs des courbes $\langle A_n B_n \rangle$, $n = 1, 2, \dots$ aux points A_n et B_n tendent vers les plans osculateurs unilatères du type III de la courbe $\langle A B \rangle$ respectivement aux points A et B .

Du théorème 2 il résulte que pour une courbe de classe $K^{(1)}$ cette définition est équivalente à la définition de la torsion intégrale du type III comme la déviation de l'image sphérique de la courbe donnée (définition 1, p. 74).

Remarque. Il reste encore à établir l'existence de la suite des courbes $\{\langle A_n B_n \rangle\}$ de classe $K^{(3)}$ qui satisfont aux conditions de la définition 2.

Dans tout voisinage $U_{1/n}^*$ de largeur $2/n$ de l'image sphérique $\langle A^* B^* \rangle$ de la courbe $\langle A B \rangle$ il existe une ligne brisée sphérique $L_n^* = \{X_{1n}^*, X_{2n}^*, \dots$

$\dots, X_{mn}^*$, $X_{in}^* \in \langle A^* * B^* \rangle$, $i = 1, 2, \dots, m$, $X_{1n}^* = A^*$, $X_{mn}^* = B^*$, inscrite dans la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ et entièrement située à l'intérieur du domaine $U_{1/n}^*$.

Soient X_{in}^* , $X_{in}^{''*}$ des points quelconques situés respectivement sur les côtés $(X_{i-1,n}^*, X_{in}^*)$, $(X_{in}^*, X_{i+1,n}^*)$ de la ligne brisée sphérique L_n^* , $i = 1, 2, \dots, m-1$. Remplaçons l'arc $\langle X_{in}^{''*} * X_{in}^* \rangle$ de la ligne brisée L_n^* par un arc de classe $K^{(3)}$ ayant avec celle-ci un contact d'ordre au moins 2 aux points X_{in}^* et $X_{in}^{''*}$ et entièrement contenu dans le voisinage $U_{1/n}^*$. En répétant cette construction pour chaque $i = 2, 3, \dots, m-1$ et en prenant $X_{n+1,n}^* \in (X_{in}^{''*} * X_{n+1,n}^*)$, on obtiendra ainsi une suite des courbes $\{\langle A_n^* * B_n^* \rangle\}$ convergeant vers la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ et telle que les tangentes aux courbes $\langle A_n^* * B_n^* \rangle$, $n = 1, 2, \dots$ aux points A_n^* et B_n^* tendent vers les tangentes aux points A^* et B^* à la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$. Si $X_n^* \in \langle A_n^* * B_n^* \rangle$, $X_n^* = X_n^*(t)$, on définit la courbe $\langle A_n^* * B_n^* \rangle$ comme l'ensemble des points $X_n = X_n(t)$ tels que

$$X_n(t) = \int_0^t X_n(u) du$$

la condition initiale étant déterminée en sorte que $X_n(0) \rightarrow A$.

En vertu du théorème 11 (K. Kuratowski [2], p. 168) les courbes $\{\langle A_n^* * B_n^* \rangle\}$ tendent vers la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$. Nous avons ainsi obtenu la suite de courbes $\{\langle A_n^* * B_n^* \rangle\}$ satisfaisant aux conditions de la définition 2.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Alexandrov, A. D., *Vnutriennaja geometria vypuklych povierchnostiej*, Moskwa — Leningrad 1948.
- [2] Kuratowski, K., *Rachunek różniczkowy i całkowity*, Warszawa 1964.
- [3] Radziszewski, K., *Sur la courbure intégrale d'une classe de courbes*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, 16 (1962), 19–39.
- [4] Van der Waag, E. J., *Sur les plans osculateurs*, I, II, Indagationes Mathematicae, 14 (1952), 41–62.

STRESZCZENIE

W pracy tej zostało zdefiniowane skręcenie integralne typu III (druga krzywizna integralna typu III) krzywej mało regularnej zanurzonej w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej oraz określone zostały warunki istnienia tego skręcenia. Następnie podano warunki na zbieżność ciągu krzywych odpowiednio wysokiej klasy regularności, by skręcenia integralne tych krzywych dążyły do skręcenia integralnego typu III danej krzywej.

РЕЗЮМЕ

В этой работе введено определение интегрального кручения типа III (второй интегральной кривизны типа III) слабо регулярной кривой в трехмерном евклидовом пространстве и определены условия его существования. Далее даны условия сходимости последовательностей кривых, при которых интегральные кручения стремятся к интегральному кручению типа III этой кривой.