

Z Katedry Geometrii Wydziału Mat. Fiz. Chem. UMCS

Kierownik: prof. dr Konstanty Radziszewski

ANNA ŻMUREK

**Sur les relations entre les plans osculateurs à k -dimensions d'une courbe
dans l'espace euclidien à n -dimensions**

**Zależności między k -wymiarowymi płaszczyznami ściśle stycznymi krzywej
w przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej**

**Зависимости между k -мерными соприкасающимися плоскостями кривой в n -мерном
эвклидовом пространстве**

Introduction

Dans ce travail nous allons introduire les définitions des plans osculateurs orientés à k dimensions des types VI et VIII pour une courbe plongée dans l'espace euclidien à n dimensions, généralisant ainsi les types correspondants des plans osculateurs dans la classification de Van der Waag [4]. La dimension k d'un plan osculateur est un nombre naturel quelconque fixé telque $2 \leq k \leq n-1$. En admettant qu'en tout point donné de la courbe il existe un vecteur tangent continu nous allons démontrer que les plans osculateurs orientés des deux types sont équivalents. L'orientation d'un plan osculateur à k dimensions sera introduite en utilisant la notion du produit extérieur de k vecteurs.

Le problème de l'équivalence des plans osculateurs se rattache au problème de l'étude des courbures d'une courbe dans l'espace euclidien à n dimensions que K. Radziszewski a traité dans le travail [1].

L'orientation des plans à k dimensions

Soient $a_1, a_2, \dots, a_k$ des vecteurs dans l'espace euclidien à n dimensions E_n . L'objet géométrique

$$v = \text{vers}(a_1, a_2, \dots, a_k) = \frac{[a_1, a_2, \dots, a_k]}{\| [a_1, a_2, \dots, a_k] \|},$$

où $[a_1, a_2, \dots, a_k]$ désigne le produit extérieur des vecteurs $a_1, a_2, \dots, a_k$ et $\|[a_1, a_2, \dots, a_k]\|$ la norme de ce produit extérieur, sera appelé verseur de la suite de vecteurs $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Par $\pi(M; a_1, a_2, \dots, a_k)$ nous désignerons le plan à k dimensions passant par le point M de l'espace E_n et parallèle aux vecteurs $a_1, a_2, \dots, a_k$; par $^*\pi(M; a_1, a_2, \dots, a_k)$ nous désignerons le plan $\pi(M; a_1, a_2, \dots, a_k)$ avec le verseur qui lui est associé $v = \text{vers}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ que nous appellerons verseur de ce plan. Le verseur d'un plan orienté $^*\pi$ sera noté $\text{vers } ^*\pi$. Enfin, $^*\pi(M; v)$ désignera le plan orienté passant par le point M et muni du verseur v .

Les courbes et les plans osculateurs

Supposons donnée dans l'espace E_n rapportée à un système de coordonnées orthonormal une courbe dont l'équation paramétrique est

$$X = X(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

où $X(t)$ désigne le rayon-vecteur du point de la courbe qui correspond à la valeur t du paramètre et où $A = X(0), B = X(1), X(t_1) \neq X(t_2)$ pour $t_1 \neq t_2$. Une telle courbe sera désignée simplement $\langle A * B \rangle$.

Nous admettrons de plus que le vecteur $X(t)$ déterminant la courbe $\langle A * B \rangle$ possède les coordonnées $x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)$, celles-ci étant des fonctions réelles continues de la variable t , dont les dérivées $\frac{dx^i(t)}{dt}$, $i = 1, 2, \dots, n$, sont continues dans l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$ et y satisfont à la condition:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i(t)}{dt} \right)^2 > 0.$$

Désignons par $T(X)$ le vecteur unité tangent à la courbe $\langle A * B \rangle$ au point $X = X(t)$. Une courbe $\langle A * B \rangle$ remplissant ces conditions sera appelée courbe régulière.

Une suite de points $X_j = X(t_j), j = 1, 2, \dots, k+1$, sera dite croissante si $t_1 < t_2 < \dots < t_{k+1}$; nous dirons qu'elle est linéairement indépendante si, de plus, les vecteurs

$$X_p X_{p+1} = \frac{X(t_{p+1}) - X(t_p)}{|X(t_{p+1}) - X(t_p)|}$$

$p = 1, 2, \dots, k$, où

$$|X(t_{p+1}) - X(t_p)| = \left[\sum_{i=1}^n (x^i(t_{p+1}) - x^i(t_p))^2 \right]^{1/2}$$

sont linéairement indépendants.

Nous appellerons entourage $U(X_0)$ du point $X_0 = X(t_0)$ l'ensemble des points $X = X(t)$ tels que $|t - t_0| < \delta$, δ étant un nombre positif.

La courbe $\langle A * B \rangle$ sera dite k -convexe au point $X_0 = X(t_0)$ s'il existe un entourage $U(X_0)$ du point X_0 tel que pour toute suite croissante de points $X_j \in U(X_0)$, $j = 1, 2, \dots, k+1$ toute suite: $T(X_1), \dots, T(X_{s-1}), X_s X_{s+1}, \dots, X_k X_{k+1}$; $T(X_1), \dots, T(X_{s-1}), X_{s-1} X_s, \dots, X_{k-1} X_k$; $s = 2, 3, \dots, k$ et $T(X_1), \dots, T(X_{k-2}), X_{k-1} X_k, T(X_k)$ est une suite de vecteurs linéairement indépendants.

Le point X_0 de la courbe $\langle A * B \rangle$ et la suite linéairement indépendante de ses points déterminent univoquement le plan à k dimensions $\pi(X_0; X_1 X_2, X_2 X_3, \dots, X_k X_{k+1})$ et le plan orienté correspondant $^*\pi(X_0; X_1 X_2, X_2 X_3, \dots, X_k X_{k+1})$.

Soit sur la courbe k -convexe $\langle A * B \rangle$ un point fixé $X_0 = X(t_0)$, $0 \leq t_0 \leq 1$ et une suite variable croissante de points $X_i = X(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, k+1$.

Désignons par $\pi(X_0; X_1 X_2, X_2 X_3, \dots, X_k X_{k+1})$ le plan à k dimensions passant par le point X_0 et construit sur les vecteurs $X_1 X_2, X_2 X_3, \dots, X_k X_{k+1}$. Si le plan $\pi(X_0; X_1 X_2, X_2 X_3, \dots, X_k X_{k+1})$ tend vers un plan π , quand $t_1, t_2, \dots, t_{k+1}$ tendent vers t_0 (en respectant la condition $t_1 < t_2 < \dots < t_{k+1}$), nous dirons que le plan π est un plan osculateur du type VI de la courbe $\langle A * B \rangle$ au point X_0 et nous le désignerons par $\pi_{VI}(X_0)$. Par conséquent

$$(1) \quad \pi_{VI}(X_0) = \lim_{\substack{t_1, t_2, \dots, t_{k+1} \rightarrow t_0 \\ t_1 < t_2 < \dots < t_{k+1}}} \pi(X_0; X_1 X_2, \dots, X_k X_{k+1})$$

Un plan osculateur orienté du type VI $^*\pi_{VI}(X_0)$ est défini comme il suit:

$$(2) \quad ^*\pi_{VI}(X_0) = \lim_{\substack{t_1, t_2, \dots, t_{k+1} \rightarrow t_0 \\ t_1 < t_2 < \dots < t_{k+1}}} ^*\pi(X_0; X_1 X_2, \dots, X_k X_{k+1})$$

Cette condition signifie que l'égalité (1) est vérifiée et que l'on a, en outre:

$$(3) \quad \text{vers } ^*\pi_{VI}(X_0) = \lim_{\substack{t_1, t_2, \dots, t_{k+1} \rightarrow t_0 \\ t_1 < t_2 < \dots < t_{k+1}}} \text{vers } ^*\pi(X_0; X_1 X_2, \dots, X_k X_{k+1})$$

Les conditions (1) et (3) peuvent être remplacées par les conditions équivalentes:

$$(4) \quad ^*\pi_{VI}(X_0) = ^*\pi(X_0; v_{VI}),$$

où

$$(5) \quad v_{VI}(X_0) = \lim_{\substack{t_1, t_2, \dots, t_{k+1} \rightarrow t_0 \\ t_1 < t_2 < \dots < t_{k+1}}} \text{vers}(X_1 X_2, \dots, X_k X_{k+1})$$

Pour que la limite figurant au second membre de l'égalité (5) existe il est nécessaire que pour les t_i suffisamment proches de t_0 la suite des points $X_1, X_2, \dots, X_{k+1}$ soit déjà linéairement indépendante.

Le plan osculateur du type VIII de la courbe $\langle A * B \rangle$ au point X_0 sera défini par l'égalité:

$$(6) \quad \pi_{\text{VIII}}(X_0) = \lim_{\substack{t_1, t_2, \dots, t_k \rightarrow t_0 \\ t_1 < t_2 < \dots < t_k}} \pi(X_0; T(X_1), \dots, T(X_k))$$

où l'on admet l'existence de la limite figurant au second membre de l'égalité (6) et où $\pi(X_0; T(X_1), \dots, T(X_k))$ désigne le plan à k dimensions passant par le point X_0 et construit sur les vecteurs $T(X_1), \dots, T(X_k)$.

Le plan osculateur orienté du type VIII de la courbe $\langle A * B \rangle$ au point X_0 sera défini par l'égalité

$$(7) \quad {}^*\pi_{\text{VIII}}(X_0) = {}^*\pi_{\text{VIII}}(X_0; v_{\text{VIII}}),$$

où

$$(8) \quad v_{\text{VIII}} = \lim_{\substack{t_1, \dots, t_k \rightarrow t_0 \\ t_1 < \dots < t_k}} \text{vers}(T(X_1), \dots, T(X_k)).$$

Évidemment cette limite ne peut exister que si les vecteurs $T(X_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$ sont linéairement indépendants pour les nombres $t_1, \dots, t_k$ suffisamment proches de t_0 .

Un lemme auxiliaire sur les verseurs

Lemme. Dans l'espace E_n on suppose données les suites de vecteurs: $d_1^m, d_2^m, \dots, d_i^m, a^m, b^m, c^m, d_{i+1}^m, \dots, d_{k-2}^m$, $m = 1, 2, \dots$, $|a^m| = |b^m| = |c^m| = |d_p^m| = 1$, $p = 1, 2, \dots, k-2$, $2 \leq k \leq n-3$. Si

$$(9) \quad \begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} a^m &= \lim_{m \rightarrow \infty} b^m = \lim_{m \rightarrow \infty} c^m = \lim_{m \rightarrow \infty} d_p^m = e, \quad |e| = 1, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(d_1^m, \dots, d_i^m, a^m, b^m, d_{i+1}^m, \dots, d_{k-2}^m) &= v, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(d_1^m, \dots, d_i^m, b^m, c^m, d_{i+1}^m, \dots, d_{k-2}^m) &= v, \end{aligned}$$

pour $i = 0, 1, \dots, k-2$, $v \neq 0$ et si les vecteurs $d_1^m, \dots, d_i^m, a^m, c^m, d_{i+1}^m, \dots, d_{k-2}^m$ sont linéairement indépendants, $m = 1, 2, \dots$, la limite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \pi(0; d_1^m, \dots, d_i^m, a^m, c^m, d_{i+1}^m, \dots, d_{k-2}^m) = \pi(0),$$

existe, ou l'on a $\text{vers } {}^*\pi(0) = v$ ou bien $\text{vers } {}^*\pi(0) = -v$, 0 étant un point quelconque de l'espace.

Démonstration. Des conditions (9) il résulte que les vecteurs $d_1^m, \dots, d_i^m, a^m, b^m, d_{i+1}^m, \dots, d_{k-2}^m$ et $d_1^m, \dots, d_i^m, b^m, c^m, d_{i+1}^m, \dots, d_{k-2}^m$ sont linéairement indépendants pour toutes les valeurs de m .

Les conditions (9) sont équivalentes aux suivantes:

$$(10) \quad \begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(a^m, b^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m) &= v, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(b^m, c^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m) &= v, \end{aligned}$$

puisque l'on obtient (10) de (9) au moyen de $2i$ transpositions dans les suites de vecteurs correspondantes. Il suffit donc de prouver que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \pi(0; a^m, c^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m) = \pi(0),$$

où vers $\pi(0) = v$ ou bien vers $\pi(0) = -v$ et 0 est un point quelconque de l'espace.

La démonstration sera faite par récurrence.

Soient les suites de vecteurs a^m, b^m, c^m , $m = 1, 2, \dots$, $|a^m| = |b^m| = |c^m| = 1$, telles que

$$(11) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} a^m = \lim_{m \rightarrow \infty} b^m = \lim_{m \rightarrow \infty} c^m = e, \quad |e| = 1,$$

et

$$(12) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(a^m, b^m) = v, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(b^m, c^m) = v, \quad v \neq 0.$$

Nous allons prouver que si ces conditions sont remplies et si les vecteurs a^m, c^m , $m = 1, 2, \dots$, sont linéairement indépendants, on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(a^m, c^m) = v.$$

Choisissons un système orthonormal de coordonnées tel que $e = (1, 0, \dots, 0)$. Désignons les coordonnées du vecteur a^m dans ce système par $(a^{1m}, a^{2m}, \dots, a^{nm})$, celles du vecteur b^m par $(b^{1m}, b^{2m}, \dots, b^{nm})$, celles du vecteur c^m par $(c^{1m}, c^{2m}, \dots, c^{nm})$. Les coordonnées des verseurs vers (a^m, b^m) , vers (b^m, c^m) , vers (a^m, c^m) sont respectivement

$$[\text{vers}(a^m, b^m)]^{pq} = \frac{a^{pm} b^{qm} - a^{qm} b^{pm}}{\| [a^m, b^m] \|}$$

$$[\text{vers}(b^m, c^m)]^{pq} = \frac{b^{pm} c^{qm} - b^{qm} c^{pm}}{\| [b^m, c^m] \|}$$

$$[\text{vers}(a^m, c^m)]^{pq} = \frac{a^{pm} c^{qm} - a^{qm} c^{pm}}{\| [a^m, c^m] \|}$$

$p, q = 1, 2, \dots, n$.

De l'hypothèse il résulte que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [\text{vers}(a^m, b^m)]^{pq} = \lim_{m \rightarrow \infty} [\text{vers}(b^m, c^m)]^{pq} = v^{pq},$$

où v^{pq} désigne une coordonnée du verseur v , toutes les coordonnées v^{pq} ne s'annulant pas simultanément.

Observons que pour les m supérieurs à un m_0 la coordonnée $a^{1m} \neq 0$ et $[\text{vers}(a^m, b^m)]^{pq}$ peut s'écrire sous la forme:

$$(13) \quad [\text{vers}(a^m, b^m)]^{pq} = \frac{a^{pm}}{a^{1m}} [\text{vers}(a^m, b^m)]^{1q} - \frac{a^{qm}}{a^{1m}} [\text{vers}(a^m, b^m)]^{1p}$$

En tenant compte de (11) et du choix du système de coordonnées on obtient:

$$(14) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a^{sm}}{a^{1m}} = 0 \quad \text{pour } s = 2, 3, \dots, n.$$

Des conditions (13) et (14) on déduit donc:

$$(15) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} [\text{vers}(a^m, b^m)]^{pq} = 0 \quad \text{pour } p, q \neq 1.$$

On démontre de même que

$$(16) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} [\text{vers}(b^m, c^m)]^{pq} = 0 \quad \text{pour } p, q \neq 1.$$

Considérons le verseur $\text{vers}(a^m, c^m)$. Sa coordonnée $[\text{vers}(a^m, c^m)]^{1s}$, $s = 2, 3, \dots, n$ peut être écrite comme il suit:

$$(17) \quad [\text{vers}(a^m, c^m)]^{1s} = \frac{c^{1m}}{b^{1m}} \cdot \frac{\| [a^m, b^m] \|}{\| [a^m, c^m] \|} \cdot [\text{vers}(a^m, b^m)]^{1s} + \\ + \frac{a^{1m}}{b^{1m}} \cdot \frac{\| [b^m, c^m] \|}{\| [a^m, c^m] \|} \cdot [\text{vers}(b^m, c^m)]^{1s}$$

La coordonnée $[\text{vers}(a^m, c^m)]^{pq}$ peut être représentée sous la forme suivante analogue à (13):

$$(18) \quad [\text{vers}(a^m, c^m)]^{pq} = \frac{a^{pm}}{a^{1m}} [\text{vers}(a^m, c^m)]^{1q} - \frac{a^{qm}}{a^{1m}} [\text{vers}(a^m, c^m)]^{1p}$$

La condition (11) entraîne:

$$(19) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a^{1m}}{b^{1m}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c^{1m}}{b^{1m}} = 1.$$

Les vecteurs a^m et c^m étant, par hypothèse, linéairement indépendants, le verseur $\text{vers}(a^m, c^m)$ existe. En outre, en vertu de la définition du verseur on a:

$$(20) \quad \|\text{vers}(a^m, c^m)\| = 1$$

pour toutes les valeurs $m = 1, 2, \dots$

Considérons les limites des quotients:

$$(21) \quad \frac{\| [a^m, b^m] \|}{\| [a^m, c^m] \|}, \quad \frac{\| [b^m, c^m] \|}{\| [a^m, c^m] \|}$$

Si ces quotients tendaient simultanément vers zéro, on aurait, en profitant de la condition

$$(22) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} [\text{vers}(a^m, b^m)]^{1s} = \lim_{m \rightarrow \infty} [\text{vers}(b^m, c^m)]^{1s} = v^{1s},$$

et des égalités (14), (17), (18) et (19):

$$(23) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} [\text{vers}(a^m, c^m)]^{pq} = 0$$

pour tous les $p, q = 1, 2, \dots, n$, en contradiction avec la condition (20).

D'autre part, si au moins un de ces quotients tendait vers l'infini, on aurait, en vertu de (17), (19) et (22):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [\text{vers}(a^m, c^m)]^{pq} = \infty \quad \text{pour } s = 2, 3, \dots, n$$

ce qui est aussi en contradiction avec la condition (20).

Par conséquent les limites des quotients (21) sont des nombres non négatifs, finis, ne s'annulant pas simultanément et, en vertu de (17), (19) et (22), on a:

$$(24) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} [\text{vers}(a^m, c^m)]^{1s} = v^{1s} \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{\| [a^m, b^m] \|}{\| [a^m, c^m] \|} + \frac{\| [b^m, c^m] \|}{\| [a^m, c^m] \|} \right]$$

$s = 2, 3, \dots, n$; en vertu de (18), (14) et (24) on a encore

$$(25) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} [\text{vers}(a^m, c^m)]^{pq} = 0, \quad p, q \neq 1.$$

En outre, on déduit des conditions (20), (24) et (25),

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{\| [a^m, b^m] \|}{\| [a^m, c^m] \|} + \frac{\| [b^m, c^m] \|}{\| [a^m, c^m] \|} \right] = 1.$$

Nous avons ainsi démontré que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(a^m, c^m) = v.$$

Supposons maintenant que ce lemme soit vrai pour un $k < n-1$. Considérons les suites de vecteurs: $a'^m, b'^m, c'^m, d_1'^m, \dots, d_{k-1}'^m, |a'^m| = |b'^m| = |c'^m| = |d_q'^m| = 1, \quad q = 1, 2, \dots, k-1$ telles que $\lim_{m \rightarrow \infty} a'^m = \lim_{m \rightarrow \infty} b'^m = \lim_{m \rightarrow \infty} c'^m = \lim_{m \rightarrow \infty} d_q'^m = e', \quad |e'| = 1$ et supposons que

$$(26) \quad \begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(a'^m, b'^m, d_1'^m, \dots, d_{k-1}'^m) = v', \\ & \lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(b'^m, c'^m, d_1'^m, \dots, d_{k-1}'^m) = v', \quad v' \neq 0. \end{aligned}$$

Admettons enfin que les vecteurs $a'^m, c'^m, d_1^m, \dots, d_{k-1}^m$ soient linéairement indépendants. On peut donc former le verseur $\text{vers}(a'^m, c'^m, d_1^m, \dots, d_{k-1}^m)$.

Soit 0 un point quelconque fixé de l'espace E_n . Le point 0, ainsi que les verseurs v' et $v_1^m = \text{vers}(a'^m, b'^m, d_1^m, \dots, d_{k-1}^m)$, $v_2^m = \text{vers}(b'^m, c'^m, d_1^m, \dots, d_{k-1}^m)$, $v_3^m = \text{vers}(a'^m, c'^m, d_1^m, \dots, d_{k-1}^m)$ déterminent univoquement les plans orientés à $(k+1)$ dimensions ${}^*\pi'(0) = {}^*\pi'(0; v')$, ainsi que

$$(27) \quad \begin{aligned} {}^*\pi_1^m(0) &= {}^*\pi'(0; v_1^m) \\ {}^*\pi_2^m(0) &= {}^*\pi'(0; v_2^m) \\ {}^*\pi_3^m(0) &= {}^*\pi'(0; v_3^m) \end{aligned}$$

De là et des conditions (26) il résulte que

$$(28) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} {}^*\pi_i^m(0) = {}^*\pi'(0) \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

En outre, tout couple de plans (27) contient un plan à k dimensions commun, déterminé par le point 0 et par les vecteurs correspondants. D'autre part, tous les trois plans contiennent un plan à $(k-1)$ dimensions commun construit sur les vecteurs $d_1^m, \dots, d_{k-1}^m$.

Soit π^{n-1} un hyperplan quelconque fixé à $(n-1)$ dimensions orthogonal au vecteur e' et ne passant pas par le point 0. L'hyperplan π^{n-1} est en même temps orthogonal au plan $\pi'(0)$ et le coupe „suivant” un plan à k dimensions π . Il en résulte que pour toutes les valeurs m supérieures à un m_1 les plans $\pi_1^m(0)$, $\pi_2^m(0)$, $\pi_3^m(0)$ coupent l'hyperplan π^{n-1} „suivant” les plans à k dimensions π_1^m , π_2^m , π_3^m , tout couple de ces plans contenant un plan à $(k-1)$ dimensions commun déterminé par les points d'intersection de l'hyperplan π^{n-1} avec les droites qui passent par le point 0 et sont parallèles aux vecteurs correspondants. En outre, tous les trois plans π_1^m , π_2^m , π_3^m contiennent un plan à $(k-2)$ dimensions commun $\pi^{k-2,m}$, passant par les points d'intersection de l'hyperplan π^{n-1} avec les droites qui passent par le point 0 et sont parallèles aux vecteurs $d_1^m, \dots, d_{k-1}^m$.

De la condition (28) il résulte donc que

$$(29) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \pi_i^m = \pi \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Soient $a^m, b^m, c^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m$, $|a^m| = |b^m| = |c^m| = |d_s^m| = 1$, $s = 1, 2, \dots, k-2$, des vecteurs parallèles à π^{n-1} et aux plans correspondants π_1^m , π_2^m , π_3^m et tels que les suites $a^m, b^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m$; $b^m, c^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m$; $a^m, c^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m$ soient linéairement indépendantes pour toutes les valeurs $m = 1, 2, \dots$. Les suites de ces vecteurs et le point $A^m \in \pi^{k-2,m}$ déterminent donc les plans $\pi_1^m, \pi_2^m, \pi_3^m$, c'est-à-dire

$$(30) \quad \begin{aligned} \pi_1^m &= \pi(A^m; a^m, b^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m) \\ \pi_2^m &= \pi(A^m; b^m, c^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m) \\ \pi_3^m &= \pi(A^m; a^m, c^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m) \end{aligned}$$

Supposons de plus que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a^m = \lim_{m \rightarrow \infty} b^m = \lim_{m \rightarrow \infty} c^m = \lim_{m \rightarrow \infty} d_s^m = e, \quad |e| = 1,$$

$s = 1, 2, \dots, k-2$.

Nous allons prouver que les vecteurs $a^m, b^m, c^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m$ qui satisfont à ces conditions peuvent être choisis en sorte que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(a^m, b^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(b^m, c^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m)$$

Des conditions (29) et (30) il résulte:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(a^m, b^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(b^m, c^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m)$$

ou bien

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(a^m, b^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m) = -\lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(b^m, c^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m)$$

Les vecteurs $a^m, b^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m$, étant parallèles au plan π_1^m , sont parallèles au plan $\pi_1^m(0)$ et peuvent être représentés comme des combinaisons linéaires des vecteurs $a'^m, b'^m, d_1'^m, \dots, d_{k-1}'^m$. En outre, puisque le vecteur $d_{k-1}'^m \notin \pi_1^m$, les vecteurs $a^m, b^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m$ peuvent être choisis en sorte que

$$(31) \quad \text{vers}(a^m, b^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m, d_{k-1}'^m) = \text{vers}(a'^m, b'^m, d_1'^m, \dots, d_{k-1}'^m)$$

Choisissons un vecteur c^m parallèle à π_2^m et tel que

$$(32) \quad \text{vers}(b^m, c^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m, d_{k-1}'^m) = \text{vers}(b'^m, c'^m, d_1'^m, \dots, d_{k-1}'^m)$$

et que la suite composée des vecteurs $a^m, c^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m$ soit linéairement indépendante. Cette dernière condition peut être réalisée puisque les vecteurs $a^m, c^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m$ déterminent le plan π_3^m .

Fixons un système orthonormal de coordonnées. En vertu d'un théorème de Laplace ([6], p. 122) la coordonnée $[\text{vers}(a^m, b^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m, d_{k-1}'^m)]^{i_1 i_2 \dots i_{k+1}}$ peut être mise sous la forme

$$(33) \quad [\text{vers}(a^m, b^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m, d_{k-1}'^m)]^{i_1 i_2 \dots i_{k+1}} = \sum_{l=1}^{k+1} \frac{(-1)^{i_l+1} d_{k-1}'^{i_l m} [a^m, b^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m]^{i_1 \dots i_{l-1} i_{l+1} \dots i_{k+1}}}{\|[a^m, b^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m, d_{k-1}'^m]\|}$$

où $d_{k-1}'^{i_l m}$ désigne la coordonnée du vecteur $d_{k-1}'^m$ dans le système de coordonnées considéré.

D'une façon analogue on exprime

$$(34) \quad [\text{vers}(b^m, c^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m, d_{k-1}'^m)]^{i_1 i_2 \dots i_{k+1}} = \sum_{l=1}^{k+1} \frac{(-1)^{i_l+1} d'^{i_l m} [b^m, c^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m]^{i_1 \dots i_{l-1} i_{l+1} \dots i_{k+1}}}{\|[b^m, c^m, d_1^m, \dots, d_{k-2}^m, d_{k-1}'^m]\|}$$

Si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(a^m, b^m, \bar{a}_1^m, \dots, \bar{a}_{k-2}^m) = - \lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(b^m, c^m, \bar{a}_1^m, \dots, \bar{a}_{k-2}^m),$$

les coordonnées

$$[a^m, b^m, \bar{a}_1^m, \dots, \bar{a}_{k-2}^m]^{j_1 j_2 \dots j_k}, [b^m, c^m, \bar{a}_1^m, \dots, \bar{a}_{k-2}^m]^{j_1 j_2 \dots j_k}$$

auraient, pour toutes les valeurs de m supérieures à un m_2 , des signes contraires pour toutes les suites partielles $j_1, j_2, \dots, j_k$ extraites de la suite des indices $1, 2, \dots, n$. De là et des égalités (33) et (34) il résulterait donc que les coordonnées

$$[\text{vers}(a^m, b^m, \bar{a}_1^m, \dots, \bar{a}_{k-2}^m, \bar{a}'_{k-1}^m)]^{i_1 i_2 \dots i_{k+1}}$$

$$[\text{vers}(b^m, c^m, \bar{a}_1^m, \dots, \bar{a}_{k-2}^m, \bar{a}'_{k-1}^m)]^{i_1 i_2 \dots i_{k+1}}$$

sont de signes contraires; mais, en vertu de (31) et (32), cela est en contradiction avec l'hypothèse (26). Par conséquent

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(a^m, b^m, \bar{a}_1^m, \dots, \bar{a}_{k-2}^m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(b^m, c^m, \bar{a}_1^m, \dots, \bar{a}_{k-2}^m) = v,$$

$v \neq 0$. De là, et du fait que les vecteurs $a^m, c^m, \bar{a}_1^m, \dots, \bar{a}_{k-2}^m$ sont linéairement indépendants, résulte, en vertu de l'hypothèse de récurrence, l'existence de la limite:

$$(35) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \pi(A^m; a^m, c^m, \bar{a}_1^m, \dots, \bar{a}_{k-2}^m) = \pi.$$

Comme le plan $\pi(A^m; a^m, c^m, \bar{a}_1^m, \dots, \bar{a}_{k-2}^m)$ est une partie commune du plan $\pi'(0; a'^m, c'^m, \bar{a}'_1^m, \dots, \bar{a}'_{k-1}^m)$ et de l'hyperplan π^{n-1} qui ne passe pas par le point 0, on déduit immédiatement de la condition (35) l'existence de la limite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \pi'(0; a'^m, c'^m, \bar{a}'_1^m, \dots, \bar{a}'_{k-1}^m) = \pi'(0)$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Remarque. Les hypothèses du lemme n'entraînent pas, dans le cas général, l'existence de la limite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(a^m, c^m, \bar{a}_1^m, \dots, \bar{a}_{k-2}^m) = v.$$

A titre de contre-exemple considérons les vecteurs $a^m = (1, 0, 0, 0)$, $b^m = (1, 2/m, 0, 0)$, $c^m = (1, 4/m, 3/m, 0)$, $\bar{a}^m = (1, 3/m, 2/m, 0)$ dans l'espace euclidien à quatre dimensions E_4 . Ces vecteurs vérifient bien les hypothèses du lemme, et cependant

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(a^m, b^m, \bar{a}^m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(b^m, c^m, \bar{a}^m) = - \lim_{m \rightarrow \infty} \text{vers}(a^m, c^m, \bar{a}^m)$$

L'équivalence des plans osculateurs à k dimensions des types VI et VIII

Théorème 1. *Si la courbe régulière $\langle A * B \rangle$ est k -convexe au point X_0 et si elle admet en ce point un plan osculateur orienté du type VI $*\pi_{VI}(X_0)$, elle admet aussi un plan osculateur orienté du type VIII identique à $*\pi_{VI}(X_0)$, c'est-à-dire $*\pi_{VIII}(X_0) = *\pi_{VI}(X_0)$.*

Démonstration. Sur la courbe $\langle A * B \rangle$ prenons une suite quelconque croissante de $(k+1)$ points $X_1^m, X_2^m, \dots, X_{k+1}^m$ et admettons que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} X_i^m = X_0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, k+1.$$

Dans la suite nous écrirons X_i au lieu de X_i^m et nous désignerons cette limite simplement par

$$(36) \quad \lim X_i = X_0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, k+1.$$

En vertu de l'hypothèse du théorème la limite

$$(37) \quad \lim *\pi(X_0; X_1 X_2, X_2 X_3, \dots, X_k X_{k+1}) = *\pi_{VI}(X_0)$$

existe pourvu que soit remplie la condition (36). Puisque la courbe $\langle A * B \rangle$ est k -convexe au point X_0 et que le plan $*\pi(X_0; X_1 X_2, X_2 X_3, \dots, X_k X_{k+1})$ varie d'une manière continue lorsque la suite croissante de points varie continûment, le plan $*\pi(X_0; T(X_1), X_1 X_3, \dots, X_k X_{k+1})$ prend une position proche de celle du plan $*\pi(X_0; X_1 X_2, X_2 X_3, \dots, X_k X_{k+1})$ lorsque X_2 est suffisamment proche de X_1 . Il en résulte l'existence de la limite

$$(38) \quad \lim *\pi(X_0; T(X_1), X_1 X_2, \dots, X_{k-1} X_k) = *\pi_{VI}(X_0).$$

Soit X'_2 un point quelconque sur l'arc $(X_2 * X_3)$, c'est-à-dire $X'_2 = X(t'_2)$, $t_2 < t'_2 < t_3$. Considérons le plan $*\pi(X_0; X_1 X_2, X_2 X'_2, X'_2 X_3, \dots, X_{k-1} X_k) = *\pi(X_0; X_1 X_2, X_2 X'_2, X'_2 X_3, \dots, X_{k-1} X_k)$. En vertu de l'hypothèse la limite

$$(39) \quad \lim *\pi(X_0; X_1 X_2, X_2 X'_2, X'_2 X_3, \dots, X_{k-1} X_k) = *\pi_{VI}(X_0)$$

existe.

Les conditions (38) et (39), la k -convexité de la courbe $\langle A * B \rangle$ au point X_0 et enfin le lemme entraînent l'existence de la limite

$$(40) \quad \begin{aligned} \lim \pi(X_0; T(X_1), X_2 X'_2, X'_2 X_3, \dots, X_{k-1} X_k) = \\ = \lim \pi(X_0; T(X_1), X_2 X'_2, X'_2 X_3, \dots, X_{k-1} X_k) = \pi_{VI}(X_0). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant prouver que l'on associe au plan $\pi(X_0; T(X_1), X_2 X'_2, X'_2 X_3, \dots, X_{k-1} X_k)$ le verseeur vers $(T(X_1), X_2 X'_2, X'_2 X_3, \dots, X_{k-1} X_k)$, la limite suivante existe:

$$(41) \quad \lim *\pi(X_0; T(X_1), X_2 X'_2, X'_2 X_3, \dots, X_{k-1} X_k) = *\pi_{VI}(X_0).$$

Supposons que cette condition ne soit pas remplie. Il existe donc deux suites croissantes de points $X_1, X_2, X'_2, X_3, \dots, X_k$ et $Y_1, Y_2, Y'_2, Y_3, \dots, Y_k$, convergeant vers le point X_0 et telles que

$$\lim \text{vers}(T(X_1), X_2 X'_2, X'_2 X_3, \dots, X_{k-1} X_k) = v,$$

$$\lim \text{vers}(T(Y_1), Y_2 Y'_2, Y'_2 Y_3, \dots, Y_{k-1} Y_k) = -v.$$

Il en résulte que si la coordonnée $v^{j_1 j_2 \dots j_k} \neq 0$, il existe un entourage $U(X_0)$ du point X_0 tel que si $X_1, X_2, X'_2, X_3, \dots, X_k \in U(X_0)$ et $Y_1, Y_2, Y'_2, Y_3, \dots, Y_k \in U(X_0)$, les coordonnées

$$[\text{vers}(T(X_1), X_2 X'_2, X'_2 X_3, \dots, X_{k-1} X_k)]^{j_1 j_2 \dots j_k},$$

$$[\text{vers}(T(Y_1), Y_2 Y'_2, Y'_2 Y_3, \dots, Y_{k-1} Y_k)]^{j_1 j_2 \dots j_k}$$

sont de signes contraires.

Si $v^{j_1 j_2 \dots j_k} = 0$, il existe un entourage $U_0(X_0) \subset U(X_0)$ tel que si $X_1, X_2, X'_2, X_3, \dots, X_k \in U_0(X_0)$ et $Y_1, Y_2, Y'_2, Y_3, \dots, Y_k \in U_0(X_0)$, on a

$$(42) \quad |[\text{vers}(T(X_1), X_2 X'_2, X'_2 X_3, \dots, X_{k-1} X_k)]^{l_1 l_2 \dots l_k}| < \delta$$

$$|[\text{vers}(T(Y_1), Y_2 Y'_2, Y'_2 Y_3, \dots, Y_{k-1} Y_k)]^{l_1 l_2 \dots l_k}| < \delta$$

pour toutes les suites partielles $l_1, l_2, \dots, l_k$ extraites de la suite $1, 2, \dots, n$ pour lesquelles a lieu l'égalité $v^{l_1 l_2 \dots l_k} = 0$, (δ est un nombre positif arbitrairement donné à l'avance).

Grâce à la k -convexité de la courbe $\langle A * B \rangle$ au point X_0 on peut considérer, au lieu des verseurs $\text{vers}(T(X_1), X_2 X'_2, X'_2 X_3, \dots, X_{k-1} X_k)$, $\text{vers}(T(Y_1), Y_2 Y'_2, Y'_2 Y_3, \dots, Y_{k-1} Y_k)$, les tenseurs correspondants

$$(43) \quad [T(X_1), X_2 X'_2, X'_2 X_3, \dots, X_{k-1} X_k]$$

$$[T(Y_1), Y_2 Y'_2, Y'_2 Y_3, \dots, Y_{k-1} Y_k]$$

Soient $a_i = a_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$, $i = 1, 2, \dots, n-k$ des vecteurs satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(44) \quad a_i \cdot a_j = \delta_{ij}$$

$$a_i \cdot T(X_1) = a_i \cdot X_2 X'_2 = a_i \cdot X'_2 X_3 = \dots = a_i \cdot X_{k-1} X_k = 0$$

$i, j = 1, 2, \dots, n-k$, δ_{ij} désignant le symbole de Kronecker. Ces vecteurs déterminent un plan à $(n-k)$ dimensions $\pi(X_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-k})$ orthogonal au plan $\pi(X_0; T(X_1), X_2 X'_2, X'_2 X_3, \dots, X_{k-1} X_k)$.

Remarquons que l'égalité $\lim \pi(X_0; T(X_1), X_2 X'_2, X'_2 X_3, \dots, X_{k-1} X_k) = \lim \pi(X_0; T(Y_1), Y_2 Y'_2, Y'_2 Y_3, \dots, Y_{k-1} Y_k)$ entraîne $\lim \pi(X_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-k}) = \lim \pi(X_0; b_1, b_2, \dots, b_{n-k})$, où b_i , $i = 1, 2, \dots, n-k$ sont des vecteurs orthogonaux au plan $\pi(X_0; T(Y_1), Y_2 Y'_2, Y'_2 Y_3, \dots, Y_{k-1} Y_k)$, construits de la même façon que les vecteurs $a_1, a_2, \dots, a_{n-k}$.

Les vecteurs a_i et b_i peuvent être choisis en sorte que les coordonnées des tenseurs $[a_1, a_2, \dots, a_{n-k}]$, $[b_1, b_2, \dots, b_{n-k}]$ aient le même signe (ce qui est toujours possible, sinon le vecteur a_i pourrait être remplacé par le vecteur $-a_i$).

Formons le tenseur — produit extérieur des n vecteurs $T(P_1), P_2P'_2, P'_2P_3, \dots, P_{k-1}P_k, q_1, q_2, \dots, q_{n-k}$, où $P_1, P_2, P'_2, P_3, \dots, P_k$ est une suite variable de points de la courbe $\langle A * B \rangle$; $q_1, q_2, \dots, q_{n-k}$ sont des vecteurs orthogonaux au plan $\pi(X_0; T(P_1), P_2P'_2, P'_2P_3, \dots, P_{k-1}P_k)$ construits de la même manière que les vecteurs $a_1, a_2, \dots, a_{n-k}$. Ce tenseur est une fonction de vecteurs et n'a qu'une seule coordonnée essentielle. Etudions les valeurs de la coordonnée de ce tenseur sur les vecteurs suivants:

$$(45) \quad [T(X_1), X_2X'_2, X'_2X_3, \dots, X_{k-1}X_k, a_1, a_2, \dots, a_{n-k}]$$

$$(46) \quad [T(Y_1), Y_2Y'_2, Y'_2Y_3, \dots, Y_{k-1}Y_k, b_1, b_2, \dots, b_{n-k}]$$

Considérons encore le produit extérieur

$$(47) \quad [T(Y_1), Y_2Y'_2, Y'_2Y_3, \dots, Y_{k-1}Y_k, a_1, a_2, \dots, a_{n-k}]$$

En vertu théorème de Laplace sur le développement d'un déterminant (A. Mostowski, M. Stark [6], p. 122) et des conditions imposées aux coordonnées des verseurs vers $(T(X_1), X_2X'_2, X'_2X_3, \dots, X_{k-1}X_k)$, vers $(T(Y_1), Y_2Y'_2, Y'_2Y_3, \dots, Y_{k-1}Y_k)$, le nombre $\delta > 0$ dans l'hypothèse (42) peut être choisi en sorte que (45) et (47) soient de signes contraires (car les coordonnées (42) n'auront pas d'influence sur les signes de (45) et (47), ces signes dépendant des coordonnées qui ne s'annulent pas à la limite). D'une façon analogue il résulte du théorème de Laplace (46) et (47) ont même signe. Par conséquent les coordonnées des tenseurs (45) et (46) sont de signes contraires si $X_1, X_2, X'_2, X_3, \dots, X_k, Y_1, Y_2, Y'_2, Y_3, \dots, Y_k \in U_0(X_0)$.

En passant d'une façon continue des vecteurs $T(X_1), X_2X'_2, X'_2X_3, \dots, X_{k-1}X_k$ aux vecteurs $T(Y_1), Y_2Y'_2, Y'_2Y_3, \dots, Y_{k-1}Y_k$, on peut choisir les vecteurs $a_1, a_2, \dots, a_{n-k}$ et $b_1, b_2, \dots, b_{n-k}$ en sorte qu'il y ait une transition continue entre la suite de vecteurs $T(X_1), X_2X'_2, X'_2X_3, \dots, X_{k-1}X_k, a_1, a_2, \dots, a_{n-k}$ et la suite $T(Y_1), Y_2Y'_2, Y'_2Y_3, \dots, Y_{k-1}Y_k, b_1, b_2, \dots, b_{n-k}$. Alors la coordonnée du n -vecteur varie continûment; en vertu du théorème de la moyenne il existe donc une suite de points $Z_1, Z_2, Z'_2, Z_3, \dots, Z_k \in U_0(X_0)$ telle que $[T(Z_1), Z_2Z'_2, Z'_2Z_3, \dots, Z_{k-1}Z_k, c_1, c_2, \dots, c_{n-k}] = 0$, d'où il résulte que les vecteurs $T(Z_1), Z_2Z'_2, Z'_2Z_3, \dots, Z_{k-1}Z_k, c_1, c_2, \dots, c_{n-k}$ sont linéairement dépendants. De là on conclut, en tenant compte des conditions (44), que les vecteurs $T(Z_1), Z_2Z'_2, Z'_2Z_3, \dots, Z_{k-1}Z_k$ sont linéairement dépendants, ce qui est impossible puisque la courbe $\langle A * B \rangle$ est k -convexe au point X_0 . L'existence de la limite (41) est ainsi établie.

X'_2 étant un point quelconque sur l'arc $(X_2 * X_3)$ et le plan ${}^*\pi(X_0; T(X_1), X_2 X'_2, X'_2 X_3, \dots, X_{k-1} X_k)$ variant d'une manière continue quand la suite croissante de points varie continûment, on aura, en admettant $X'_2 \rightarrow X_2$ et en tenant compte du fait que la courbe est k -convexe:

$$(48) \quad \lim {}^*\pi(X_0; T(X_1), T(X_2), X_2 X_3, \dots, X_{k-1} X_k) = {}^*\pi_{\text{VI}}(X_0).$$

D'autre part, la condition (41) entraîne:

$$(49) \quad \lim {}^*\pi(X_0; T(X_1), X_2 X_3, X'_2 X_3, \dots, X_{k-1} X_k) = {}^*\pi_{\text{VI}}(X_0).$$

En appliquant le lemme aux conditions (48) et (49) on obtient

$$(50) \quad \lim \pi(X_0; T(X_1), T(X_2), X'_2 X_3, \dots, X_{k-1} X_k) = \pi_{\text{VI}}(X_0).$$

De même que précédemment on établit l'existence de la limite

$$(51) \quad \lim {}^*\pi(X_0; T(X_1), T(X_2), X'_2 X_3, X_3 X_4, \dots, X_{k-1} X_k) = {}^*\pi_{\text{VI}}(X_0).$$

Comme $X'_2, X_3, X_4, \dots, X_k$ est une suite croissante quelconque de points sur la courbe $\langle A * B \rangle$, on peut admettre $X'_2 = X_3$ et pour X_3 prendre un point quelconque $X'_3 \in (X_3 * X_4)$, c'est-à-dire $X'_3 = X(t'_3)$, $t_3 < t'_3 < t_4$. Donc la limite

$$\lim {}^*\pi(X_0; T(X_1), T(X_2), X_3 X'_3, X'_3 X_4, \dots, X_{k-1} X_k) = {}^*\pi_{\text{VI}}(X_0)$$

existe.

En répétant le même raisonnement on obtient

$$\lim {}^*\pi(X_0; T(X_1), T(X_2), \dots, T(X_{k-2}), X'_{k-1} X'_{k-1}, X'_{k-1} X_k) = {}^*\pi_{\text{VI}}(X_0)$$

où $X'_{k-1} = X(t'_{k-1})$, $t_{k-1} < t'_{k-1} < t_k$. En tenant compte du fait que la courbe est k -convexe et que le plan ${}^*\pi(X_0; T(X_1), \dots, T(X_{k-2}), X_{k-1} X'_{k-1}, X'_{k-1} X_k)$ est continu, on déduit de là l'existence de des limites

$$(52) \quad \lim {}^*\pi(X_0; T(X_1), \dots, T(X_{k-2}), X_{k-1} X_k, T(X_k)) = {}^*\pi_{\text{VI}}(X_0)$$

$$(53) \quad \lim {}^*\pi(X_0; T(X_1), \dots, T(X_{k-2}), T(X_{k-1}), X_{k-1} X_k) = {}^*\pi_{\text{VI}}(X_0)$$

De (53) et (52) on tire, en vertu du lemme,

$$\lim \pi(X_0; T(X_1), \dots, T(X_{k-2}), T(X_{k-1}), T(X_k)) = \pi_{\text{VI}}(X_0)$$

Par un raisonnement analogue à celui de la première partie de la démonstration on prouve l'existence de la limite

$$\lim {}^*\pi(X_0; T(X_1), \dots, T(X_{k-1}), T(X_k)) = {}^*\pi_{\text{VI}}(X_0)$$

Par conséquent il existe un plan osculateur orienté du type VIII ${}^*\pi_{\text{VIII}}(X_0) = {}^*\pi_{\text{VI}}(X_0)$.

Théorème 2. Si la courbe régulière $\langle A * B \rangle$ est k -convexe au point X_0 et si elle admet en ce point un plan osculateur orienté du type VIII, elle admet

aussi un plan osculateur orienté du type VI identique à ${}^*\pi_{\text{VIII}}(X_0)$, c'est-à-dire ${}^*\pi_{\text{VI}}(X_0) = {}^*\pi_{\text{VIII}}(X_0)$.

Démonstration. Nous allons d'abord prouver qu'il existe un plan osculateur du type VI $\pi_{\text{VI}}(X_0) = \pi_{\text{VIII}}(X_0)$. La démonstration sera faite par réduction à l'absurde.

Supposons qu'il existe un plan osculateur orienté du type VIII ${}^*\pi_{\text{VIII}}(X_0)$, tandis qu'il n'existe pas de plan osculateur du type VI $\pi_{\text{VI}}(X_0)$ tel que l'on ait $\pi_{\text{VI}}(X_0) = \pi_{\text{VIII}}(X_0)$.

Soit $X_1, X_2, \dots, X_{k+1}$ une suite croissante de points de la courbe $\langle A * B \rangle$ telle que

$$\lim X_i = X_0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, k+1$$

et que

$$\lim \pi(X_0; X_1 X_2, X_2 X_3, \dots, X_k X_{k+1}) = \pi(X_0) \neq \pi_{\text{VIII}}(X_0).$$

Menons $(n-k)$ hyperplans à $(n-1)$ dimensions $a_1, a_2, \dots, a_{n-k}$ tels que $a_i \neq a_j$ pour $i \neq j$, $\pi(X_0; X_1 X_2, X_2 X_3, \dots, X_k X_{k+1}) \subset a_i$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n-k$ et qu'aucun autre plan à k ou à plus de dimensions ne soit leur partie commune. Sur les arcs $(X_1 * X_2), (X_2 * X_3), \dots, (X_k * X_{k+1})$ il existe des points $X'_{1i}, X'_{2i}, \dots, X'_{ki}$ tels que les vecteurs tangents $T(X'_{1i}), T(X'_{2i}), \dots, T(X'_{ki})$ sont parallèles à l'hyperplan correspondant a_i , $i = 1, 2, \dots, n-k$.

L'hypothèse du théorème assure l'existence de

$$\lim \pi_i(X_0; T(X'_{1i}), T(X'_{2i}), \dots, T(X'_{ki})) = \pi_{\text{VIII}}(X_0)$$

pour $i = 1, 2, \dots, n-k$; il en résulte que les hyperplans à $(n-1)$ dimensions $a_1, a_2, \dots, a_{n-k}$ auront en commun (après un passage à la limite avec les points $X_1, X_2, \dots, X_{k+1}$) non seulement un plan à k dimensions $\pi(X_0)$, mais encore un plan à k dimensions $\pi_{\text{VIII}}(X_0) \neq \pi(X_0)$, puisque les hyperplans a_i , $i = 1, 2, \dots, n-k$ peuvent être choisis en sorte qu'ils soient encore distincts à la limite et déterminent univoquement un plan à k dimensions. Par conséquent $\pi(X_0) = \pi_{\text{VIII}}(X_0)$ et la contradiction ainsi obtenue prouve que les plans osculateurs à k dimensions $\pi_{\text{VIII}}(X_0)$ et $\pi_{\text{VI}}(X_0)$ sont équivalents.

Si l'on associe au plan $\pi(X_0; X_1 X_2, X_2 X_3, \dots, X_k X_{k+1})$ le verseur vers $(X_1 X_2, X_2 X_3, \dots, X_k X_{k+1})$, on aura, en répétant le raisonnement des pages 105-107:

$$\lim {}^*\pi(X_0; X_1 X_2, X_2 X_3, \dots, X_k X_{k+1}) = {}^*\pi_{\text{VIII}}(X_0).$$

Il existe donc un plan osculateur orienté à k dimensions du type VI tel que ${}^*\pi_{\text{VI}}(X_0) = {}^*\pi_{\text{VIII}}(X_0)$, ce qu'il fallait démontrer.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Radziszewski, K., *Sur la congruence des courbes*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, XVII, 1963, p. 95–104.
- [2] Radziszewski, K., *Sur les plans osculateurs orientés*, Ann. Pol. Math., XII, 1962, p. 159–169.
- [3] Radziszewski, K., *Sur les relations entre les plans osculateurs orientés*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, XVII, 1963, p. 85–93.
- [4] Van der Waag, E. J., *Sur les plans osculateurs*, I, II, Indagationes Mathematicae, 14, 1952, p. 41–62.
- [5] Raszewski, P. K., *Geometria Riemanna i analiza tensorowa*, Warszawa 1958.
- [6] Mostowski, A., Stark, M., *Elementy algebry wyższej*, Warszawa 1958.
- [7] Żmurek, A., *Deux remarques sur les plans osculateurs orientés*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, XVII, 1963, p. 81–83.

Streszczenie

W pracy tej zostały wprowadzone definicje k -wymiarowych zorientowanych płaszczyzn ściśle stycznych typu VI i VIII dla krzywej zanurzonej w n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej stanowiące uogólnienie odpowiednich typów płaszczyzn ściśle stycznych w klasyfikacji Van der Waaga [4] oraz odpowiednich typów zorientowanych płaszczyzn ściśle stycznych wprowadzonych i badanych przez K. Radziszewskiego [2]. Przy założeniu istnienia w każdym punkcie badanej krzywej ciągłego wektora stycznego została wykazana równoważność płaszczyzn obu typów.

Резюме

В этой работе введены определения k -мерных ориентируемых соприкасающихся плоскостей типа VI и VIII кривой в n -мерном евклидовом пространстве, которые являются обобщением соответствующих типов соприкасающихся плоскостей в классификации Ван дер Ваага и соответствующих типов ориентируемых соприкасающихся плоскостей, введенных К. Радишевским. Предполагая существование в каждой точке кривой непрерывного касательного вектора доказывается, что эти плоскости эквивалентны.

**UNIWERSYTET MARII
CURIE-SKŁODOWSKIEJ**

*

Nakład 700 egz. Ark. wyd. 8.5.
Ark. druk. 7. Papier druk. sat.
kl. III 80 g. Oddano do składania
22 XII 1970 r. Druk ukończono
w styczniu 1971 r.
Zam. nr 1391/70

*

**WROCŁAWSKA
DRUKARNIA NAUKOWA**

1. D. Szyal: A Note on Qualitative Conditions for the Strong Law of Large Numbers.
Uwaga o jakościowych warunkach dla mocnego prawa wielkich liczb.
2. L. Izdebski: A Contribution to the Theory of Subordination.
Pewien przyczynek do teorii podporządkowania.
3. Z. Lewandowski: Some Results Concerning Univalent Majorants.
Kilka wyników dotyczących majorant jednolistnych.
4. Z. Lewandowski: Modular and Domain Majorants of Regular Functions.
Majoranty modułowe i obszarowe funkcji holomorficznych.
5. J. Ławrynowicz: On the Parametrization of Quasiconformal Mappings in an Annulus.
O parametryzacji odwzorowań quasi-konforemnych w pierścieniu.
6. B. Piłat: On Typically Real Functions with Montel's Normalization.
O pewnych podklasach funkcji typowo rzeczywistych z unormowaniem Montela.
7. E. Złotkiewicz: Sur les domaines des valeurs de certaines fonctionnelles dans la classe $U(p)$.
O obszarach zmienności pewnych funkcyjonałów w klasie $U(p)$.
8. K. Radziszewski: Sur une propriété des transformations isométriques.
O pewnej własności przekształceń izometrycznych.
9. K. Radziszewski: Sur la coincidence des surfaces dans l'espace projectif.
O przystawianiu powierzchni w przestrzeni rzutowej.
10. K. Radziszewski i J. Sowiński: Quelques remarques sur les plans osculateurs orientés.
Kilka uwag o zorientowanych płaszczyznach ściśle stycznych.
11. A. Żmurek: Sur les hyperplans osculateurs orientés d'une courbe dans l'espace euclidien à n -dimensions.
O zorientowanych hiperpłaszczyznach ściśle stycznych krzywej w przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej.
12. E. Niedokos: On Mathematical Models of Split-Plot Design.
Modele matematyczne układów z rozszczepionymi jednostkami.

4050 20

CZASOPISMA

1966

ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE
VOL. XIX
SECTIO A

1. Z. Bogucki: On a Theorem of M. Biernacki
O twierdzeniu M. Biernackiego dot.
2. Z. Bogucki and J. Waniurski: On a
Convex Majorants.
O twierdzeniu M. Biernackiego dotyczącym majorant wypukłych.
3. R. M. Goel: On the Partial Sums of a Class of Univalent Functions.
O sumach częściowych pewnej klasy funkcji jednoliatnych.
4. F. F. Jabłoński et Z. Lewandowski: Caractérisation de certaines classes de fonctions holomorphes par la subordination modulaire.
Charakteryzowanie pewnych klas funkcji holomorficznych w terminach podporządkowania modułowego.
5. Z. Lewandowski: On some Problems of M. Biernacki Concerning Subordinate Functions and on some Related Topics.
O pewnych zagadnieniach M. Biernackiego dotyczących podporządkowania funkcji i pewnych problemach pokrewnych.
6. Z. Lewandowski and J. Stankiewicz: On Mutually Adjoint Close-to-Convex Functions.
O wzajemnie sprzężonych funkcjach prawie — wypukłych.
7. J. Stankiewicz: Some Remarks on Functions Starlike with Respect to Symmetric Points.
Pewne uwagi o funkcjach gwiazdzystych względem punktów symetrycznych.
8. M. Maksym: Relations entre les plans osculateurs orientés de 15 types.
Zależności między zorientowanymi płaszczyznami ściśle stycznymi 15 typów.
9. M. Maksym: Les familles d'éléments plans $P(M)$, généralisation des plans osculateurs d'une courbe.
Rodziny elementów płaskich $P(M)$, stanowiących uogólnienie płaszczyzn ściśle stycznych krzywej.
10. M. Maksym: Sur la continuité des paratingens plans osculateurs d'une courbe.
O ciągłości paratingensów płaszczyzn ściśle stycznych do krzywej.
11. J. Sowiński: Sur la congruence des surfaces dans l'espace équiaffine.
O przystawianiu powierzchni w przestrzeni ekwiafinicznej.
12. D. Szynal: Certaines inégalités pour les sommes de variables aléatoires et leur application dans l'étude de la convergence de séries et de suites aléatoires.
Pewne nierówności dla sum zmiennych losowych i ich zastosowanie w badaniu zbieżności szeregów i ciągów losowych.

Adresse:

UNIwersytet MARII CURIE-SKŁODOWSKIEJ
BIURO WYDAWNICTW
LUBLIN Plac Litewski 5 POLOGNE