

Z Katedry Matematyki Wydziału Ekonomicznego UMCS

Kierownik: doc. dr habil. Z. Lewandowski

ANDRZEJ WESOŁOWSKI

**Relations entre la subordination et l'inégalité des modules dans le cas des
majorantes appartenant à la classe $N_k(p, 0; q)$**

**Zależność między podporządkowaniem i nierównością modułów w przypadku majorant
należących do klasy $N_k(p, 0; q)$**

**Зависимость между подчинением и неравенством модулей в случае мажорант,
принадлежащих к классу $N_k(p, 0; q)$**

1. Introduction. Supposons que deux fonctions complexes

$$(1,1) \quad F(z) = z + A_2 z^2 + \dots$$

$$(1,2) \quad f(z) = az + a_2 z^2 + \dots, a \geq 0$$

soient holomorphes dans le cercle $C_\varrho = \{z: |z| < \varrho\}$, où $\varrho > 0$.

Nous appellerons la fonction $F(z)$ majorante en domaine de la fonction $f(z)$ dans C_ϱ (notation: $f(z) \prec_\varrho F(z)$ ou (f, F, ϱ)), s'il existe une fonction $w(z)$, $w(0) = 0$, holomorphe dans C_ϱ , qui remplit les conditions:

$$(1,3) \quad |w(z)| < \varrho \text{ pour } |z| < \varrho$$

$$(1,4) \quad f(z) = F(w(z)) \text{ pour } |z| < \varrho$$

Il est évident que dans ce cas $w(z) = az + a_2 z^2 + \dots$ pour $|z| < \varrho$.

Nous appellerons la fonction $F(z)$ majorante en module de la fonction $f(z)$ dans C_ϱ si $|f(z)| \leq |F(z)|$ pour tous les $z \in C_\varrho$ (notation: $|f(z)| \prec_\varrho |F(z)|$ ou $|f, F, \varrho|$).

Le premier qui a attiré l'attention sur la dépendance entre les deux types de majorisation a été M. Biernacki. Il a démontré en 1935 [3] que si les fonctions $F(z)$ et $f(z)$ sont univalentes dans C_1 et si $(f, F, 1)$, alors $|f, F, r|$, où $r = 0,390\dots$ est la plus petite racine positive d'une certaine équation transcendante. Biernacki a montré que le nombre $r = 0,390\dots$ ne peut être remplacé par un nombre plus grand. Le problème posé par M. Biernacki a été étudié avec différentes variantes par Biernacki lui —

même et aussi par beaucoup d'autres auteurs, par exemple [5], [6], [1], [2], [7], [8].

Z. Lewandowski [8] a posé un problème dans un certain sens inverse du problème de Biernacki: alors que dans le problème de Biernacki on admet entre les fonctions une relation de subordination en domaine dans le cercle unité entier et on cherche une constante absolue $\varrho > 0$ telle que dans le cercle $|z| < \varrho$ il y ait inégalité des modules entre ces fonctions, dans le problème de Lewandowski on suppose l'inégalité des modules entre les fonctions dans le cercle unité entier et on cherche une constante absolue ϱ_0 telle que dans le cercle de rayon ϱ_0 on ait une relation de subordination en domaine entre ces fonctions. Dans le problème de Biernacki aussi bien dans le problème inverse, les majorantes parcouraient toujours une certaine classe de fonctions univalentes.

Dans ce travail je m'occuperai aussi des relations entre la subordination en domaine des fonctions et l'inégalité des modules en admettant que la classe des majorantes est la classe des fonctions $N_k(p, 0; q)$, introduite par K. Sakaguchi [10], que je vais définir dans la suite. Il est à remarquer que la classe des majorantes dont il est question dans ce travail n'est plus la classe des fonctions univalentes.

Une fonction $F(z)$ de la forme

$$(1.5) \quad F(z) = z^q + \sum_{n=1}^{\infty} C_{q+nk} z^{q+nk}, \quad (q, k) = 1, \quad p \geq q \geq 0$$

s'appelle normée d'ordre p dans la direction des rayons k -symétriques:

a) si $F(z)$ est régulière pour $|z| < 1$ et $F(z) \neq 0$ pour $z \neq 0$, b) s'il

existe des rayons k -symétriques $\arg u = \beta + \frac{2n\pi}{k}$ (β — constante réelle)

$n = 0, 1, \dots, k-1$ tels que chacun d'eux soit coupé p fois par l'image de la courbe du cercle $|z| = 1$ par la fonction $u = F(z)$. Je désignerai la classe de toutes ces fonctions par $N_k(p, 0; q)$. Dans cette classe, pour $|z| = r < 1$, les limitations exactes suivantes sont connues [10]:

$$(1.6) \quad \left| \frac{zF'(z)}{F(z)} - \frac{q(1+r^{2k})}{1-r^{2k}} \right| \leq \frac{2sr^k}{1-r^{2k}}$$

$$(1.7) \quad \frac{q-2sr^k+qr^{2k}}{1-r^{2k}} \leq \left| z \frac{F'(z)}{F(z)} \right| \leq \frac{q+2sr^k+qr^{2k}}{1-r^{2k}}$$

$$(1.8) \quad \frac{q-2sr^k+qr^{2k}}{1-r^{2k}} \leq \operatorname{Re} \frac{zF'(z)}{F(z)} \leq \frac{q+2sr^k+qr^{2k}}{1-r^{2k}}$$

où la fonction extrémale est la fonction

$$(1.9) \quad F(z) = z^q \frac{(1+z^k)^{s-q/k}}{(1-z^k)^{s+q/k}}$$

pour (1.6) dans $|z| < 1$, et pour (1.7) dans $|z| < \left(\frac{s - \sqrt{s^2 - q^2}}{q} \right)^{1/k}$ $q \neq 0$ et $s = p + 2$. Sous ces hypothèses la fonction $F(z)$, où $p = q$, est étoilée d'ordre q par rapport à l'origine pour $|z| < \left(\frac{s - \sqrt{s^2 - q^2}}{q} \right)^{1/k}$ $q \neq 0$ et cette limitation est exacte.

Quand $k = 1$, je désignerai la classe $N_k(p, 0; q)$ par $N(p, 0; q)$. Entre ces classes on a la relation: $F(z)^k = G(z^k)$, quand $F(z) \in N_k(p, 0; q)$ et $G(z) \in N(p, 0; q)$.

Désignons ensuite par N la classe de toutes les fonctions $w(z)$ holomorphes dans C_1 qui vérifient l'inégalité $|w(z)| < 1$. Pour cette classe on a dans le cercle C_1 les limitations exactes, v. par exemple [4]:

$$(1.10) \quad |w'(z)| \leq \frac{1 - |w(z)|^2}{1 - |z|^2}$$

$$(1.11) \quad |w(z)| \leq \frac{|z| + |w(0)|}{1 + |w(0)| \cdot |z|}$$

2. Quelques théorèmes sur la subordinations dans la classe $N_k(p, 0; q)$.

Théorème 1. Si $F(z) \in N_k(p, 0; q)$, $f(z) = az^q + a_1 z^{q+1} + \dots$ $0 \leq a < 1$, est une fonction holomorphe dans C_1 et $|f, F, 1|$ alors $|f', F', r(a)|$, où $r(a)$ est la plus petite racine positive de l'équation $W(r, a) = aqr^{2k+2} + (q-1 - a - aq)r^{2k+1} - qr^{2k} - 2asr^{k+2} - (1-a)2sr^{k+1} + 2sr^k + aqr^2 + (a+q-aq + 1)r - q = 0$. Le nombre $r(a)$ ne peut être remplacé par un nombre plus grand.

Démonstration. D'après l'hypothèse il existe une fonction $w(z) \in N$, $w(0) = a$, telle que $f(z) = F(z)w(z)$. Pour $0 \leq r < r(a)$ le polynôme $W(r, a) < 0$. Puisque $W(0, a) = -q$, $W(r(a), a) = 0$, $W\left(\frac{s - \sqrt{s^2 - q^2}}{q}, a\right) > 0$, $W(1, a) = 0$, $W\left(\frac{s + \sqrt{s^2 - q^2}}{q}, a\right) < 0$ et $W(r, a) \rightarrow \infty$, pour $r \rightarrow \infty$, or, d'après le théorème de Descartes, [9] p. 230, sur le nombre des racines positives d'un polynôme, en fonction des variations de signe de la suite de ses coefficients, le polynôme $W(r, a)$ possède exactement trois racines positives: $r(a)$, 1 , $r_0 > 1$. Il en résulte que $r(a)$ est la seule racine du polynôme $W(r, a)$ telle que $0 \leq r(a) < \left(\frac{s - \sqrt{s^2 - q^2}}{q} \right)^{1/k}$.

De l'inégalité $W(r, a) < 0$ nous obtenons

$$(2.1) \quad \frac{r(1 - r^{2k})}{q - 2sr^k + qr^{2k}} \leq \frac{1 - r^2}{1 + \frac{r+a}{1+ar}}, \quad 0 \leq r < r(a).$$

De la relation (2.1) et (1.11) on tire

$$(2.2) \quad \frac{r(1-r^{2k})}{q-2sr^k+qr^{2k}} \leq \frac{1-r^2}{1+|w(z)|} \text{ pour } |z| = r < r(a).$$

De la relation (1.7) et (2.2) nous avons

$$(2.3) \quad \left| \frac{F(z)}{F'(z)} \right| \leq \frac{(1-r^2)(1-|w(z)|)}{1-|w(z)|^2}$$

En tenant compte de (1.10) avec (2.3) nous obtenons

$$\left| \frac{F(z)}{F'(z)} \right| \leq \frac{1-|w(z)|}{|w'(z)|}$$

d'où

$$|F'(z)w(z)| + |F(z)w'(z)| \leq |F'(z)|$$

c'est-à-dire $|f', F', r(a)|$, ce qui achève la démonstration. Ce résultat est exacte, car pour le couple des fonctions $F_0(z) = \frac{z^a(1+z^k)^{s-a/k}}{(1-z^k)^{s+a/k}}$, $w_0(z) = \frac{z+a}{1+az}$ (ce qui est facile à vérifier) si $f_0(z) = F_0(z)w_0(z)$ et $r = r(a)$, on a $|f'_0(r)| = |F'_0(r)|$.

Corollaire 1. Si $F(z) \in N(p, 0; q)$, $f(z) = az^2 + a_1z^{2+1} + \dots$, $0 \leq a < 1$ est une fonction holomorphe dans C_1 et si $|f, F, 1|$, alors $|f', F', r(a)|$ où $r(a)$ est la plus petite racine positive de l'équation $aqr^3 - (a+1-q+2as)r^2 - (1+a+2s-aq)r + q = 0$. Ce résultat est exact pour le couple des fonctions $F_0(z) = z^a \frac{(1+z)^{s-a}}{(1-z)^{s+a}}$, $w_0(z) = \frac{z+a}{1+az}$.

Soit Ω la classe des fonctions complexes de la variable complexe $z \in C_1$, et du paramètre réel $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, de la forme:

$$G(z, t) = a_1(t)z + a_2(t)z^2 + \dots, G(0, t) = 0, G(z, t) \neq 0 \text{ pour } z \neq 0,$$

où le coefficient $a_1(t)$ reste toujours réel et positif, qui ont les propriétés suivantes:

a) Pour chaque $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ fixé, $G(z, t)$ est une fonction holomorphe de la variable $z \in C_1$.

b) Pour chaque $z \in C_1$ fixé, $G(z, t)$ est une fonction continue du paramètre t admettant une dérivée $G'_t(z, t)$ continue dans l'intervalle $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Pour la classe des fonctions ainsi déterminée, analogue à la classe des fonctions introduites par A. Bielecki et Z. Lewandowski [2], dans laquelle j'ometts l'hypothèse de l'univalence de $G(z, t)$ qui figure au point a) [2], le lemme suivant est valable:

Lemme 1. Pour que la fonction $G(z, t) \in \Omega$ ou $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ soit croissante en module dans C_q , il faut et il suffit que

$$(2,4) \quad \left| \arg \frac{G'(z, t)}{G(z, t)} \right| \leq \frac{\pi}{2} \text{ pour } z \in C_q, t \in \langle t_1, t_2 \rangle.$$

La démonstration de ce lemme, qui utilise l'interprétation géométrique de l'inégalité (2,4), sous l'hypothèse que la fonction $G(z, t)$ est de classe $C^{(1)}$ par rapport au paramètre t , peut être omise car elle est identique à la démonstration de A. Bielecki et Z. Lewandowski [2].

Theorème 2. Si $F(z) \in N_k(p, 0; q)$, $(q, k) = 1$, si $f(z) = a_q z^q + a_{q+1} z^{q+1} + \dots$, $a_q > 0$, est une fonction holomorphe dans C_1 et $f(z) \neq 0$ pour $z \neq 0$, $z \in C_1$ et si $(f, F, 1)$, alors $|f, F, r_0|$, où r_0 est la plus petite racine positive de l'équation $\arcsin \frac{2sr^k}{q(1+r^{2k})} + \arcsin \frac{2r}{1+r^2} = \frac{\pi}{2}$, vérifiant la condition $r_0 < \left(\frac{s - \sqrt{s^2 - q^2}}{q} \right)^{1/k}$. Le nombre r_0 ne peut être remplacé par un nombre plus grand.

Démonstration. Comme $F(z) \in N_k(p, 0; q)$, l'inégalité suivante a lieu pour $|z| \leq \left(\frac{s - \sqrt{s^2 - q^2}}{q} \right)^{1/k}$

$$(2.5) \quad \left| \arg \frac{zF'(z)}{F(z)} \right| \leq \arcsin \frac{2s|z|^k}{q(1+|z|^{2k})}, \quad q \neq 0$$

ce qui résulte directement de (1,6).

De l'hypothèse $(f, F, 1)$ il résulte que dans C_1 il existe une fonction holomorphe $w(z) = bz + b_2 z^2 + \dots$, $b = \sqrt[q]{a_q}$, $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ telle que $f(z) = F(w(z))$. Mais de l'hypothèse que $f(z) \neq 0$ pour $z \neq 0$ on tire $0 < \left| \frac{w(z)}{z} \right| < 1$, donc $\frac{|z|}{|w(z)|} > 1$, qu'on résulte la limitation;

$$(2.6) \quad \left| \arg \log \frac{z}{w(z)} \right| \leq 2 \operatorname{arctg} |z| \text{ pour } |z| < 1.$$

J'introduis maintenant l'homotopie suivante

$$\gamma(z, t) = z \left(\frac{w(z)}{z} \right)^{1-t} = z \exp \left\{ (1-t) \ln \frac{w(z)}{z} \right\} \text{ pour } |z| < 1$$

et $t \in \langle 0, 1 \rangle$, où l'on prend la branche du logarithme qui s'annule au point 1. La fonction $\gamma(z, t)$ est, pour chaque $t \in \langle 0, 1 \rangle$ fixé, holomorphe dans C_1 par rapport à z et elle vérifie l'inégalité:

$$|\gamma(z, t)| \leq |z|, \quad z \in C_1.$$

Posons enfin $G(z, t) = F(\gamma(z, t))$ pour $z \in C_1, t \in \langle 0, 1 \rangle$. Nous avons alors

$$\left| \arg \frac{G'_t(z, t)}{G(z, t)} \right| \leq \left| \arg \frac{\gamma(z, t) F'(\gamma(z, t))}{F(\gamma(z, t))} \right| + \left| \arg \ln \frac{z}{w(z)} \right| \leq \\ \leq \arcsin \frac{2s|z|^k}{q(1+|z|^{2k})} + 2 \operatorname{arctg} |z|$$

pour $|z| \leq \left(\frac{s - \sqrt{s^2 - q^2}}{q} \right)^{1/k}$, $q \neq 0$ ce qui résulte directement de (2.5) et (2.6). D'après le lemme 1, $G(z, t)$ croît avec t , $t \in \langle 0, 1 \rangle$, quand

$$\arcsin \frac{2sr^k}{q(1+r^{2k})} + 2 \operatorname{arctg} r \leq \frac{\pi}{2} \text{ pour } r = |z| < \left(\frac{s - \sqrt{s^2 - q^2}}{q} \right)^{1/k}.$$

Donc $|f(z)| = |G(z, 0)| \leq |G(z, 1)| = |F(z)|$, c'est-à-dire $|f, F, r_0|$, où r_0 satisfait à l'équation du théorème 2.

Je vais démontrer que le nombre r_0 ne peut pas être augmenté. Supposons que $\zeta = \varphi(z)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$ représente le cercle $|z| < 1$ sur le cercle $|\zeta| < 1$ avec une coupure radiale qui part du point $\zeta = e^{-i\theta}$. On détermine cette fonction à partir de l'équation

$$\frac{\zeta e^{i\theta}}{(1 + \zeta e^{i\theta})^2} = (1 - \eta) \frac{ze^{i\theta}}{(1 + ze^{i\theta})^2}, \quad 0 < \eta < 1$$

Si la coupure est assez petite c'est-à-dire si $\eta > 0$ est suffisamment petit nous avons dans C_1

$$\varphi(z) = z - \eta z \frac{1 + ze^{i\theta}}{1 - ze^{i\theta}} + O(\eta^2).$$

Si $F(z) \in N_k(p, 0; q)$ et $f(z) = F(\varphi(z))$, alors $f(z)$ et $F(z)$ satisfont aux conditions du théorème pour θ et η arbitraires. Pour $\eta > 0$ arbitraire suffisamment petit et $|z| < 1$ nous avons

$$f(z) = F(z) - \eta z F'(z) \frac{1 + ze^{i\theta}}{1 - ze^{i\theta}} + O(\eta^2).$$

et évidemment

$$(2.7) \quad |f(z)| = |F(z)| \left[1 - \eta \operatorname{Re} \left(\frac{z F'(z)}{F(z)} \cdot \frac{1 + ze^{i\theta}}{1 - ze^{i\theta}} \right) \right] + O(\eta^2)$$

De la limitation (1,6) il résulte que le domaine de variation de l'expression $\frac{z F'}{F}$ dans la classe $N_k(p, 0; q)$ est un cercle symétrique par rapport à l'axe réel positif pour $|z| < \left(\frac{s - \sqrt{s^2 - q^2}}{q} \right)^{1/k}$. Par conséquent pour un

$z_1, |z_1| < \left(\frac{s - \sqrt{s^2 - q^2}}{q} \right)^{1/k}$, et pour une fonction $F(z) \in N_k(p, 0; q)$ dans l'inégalité (2,5) on aura l'égalité:

$$\arg \frac{z_1 F'(z_1)}{F(z_1)} = \arcsin \frac{2s \varrho^k}{q(1 + \varrho^{2k})}, \quad |z_1| = \varrho.$$

Ensuite, nous choisissons θ de manière que

$$\arg \frac{1 + z_1 e^{i\theta}}{1 - z_1 e^{i\theta}} = 2 \operatorname{arctg} \varrho$$

alors, si

$$\frac{\pi}{2} < \arcsin \frac{2s \varrho^k}{q(1 + \varrho^{2k})} + 2 \operatorname{arctg} \varrho < \pi,$$

il est évident que $\varrho > r_0$ et nous avons

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z_1 F'(z_1)}{F(z_1)} \cdot \frac{1 + z_1 e^{i\theta}}{1 - z_1 e^{i\theta}} \right) < 0, \text{ or}$$

$$1 - \eta \operatorname{Re} \left(\frac{z_1 F'(z_1)}{F(z_1)} \cdot \frac{1 + z_1 e^{i\theta}}{1 - z_1 e^{i\theta}} \right) + O(\eta^2) > 1.$$

De là et de la relation (2,7) il résulte que $|f(z_1)| > |F(z_1)|$. Le nombre r_0 ne peut être remplacé par un nombre plus grand.

Corollaire 2. Si $F(z) \in N(p, 0; q)$, $f(z) = a_q z^q + a_{q+1} z^{q+1} + \dots$, $a_q > 0$, est une fonction holomorphe dans C_1 , $f(z) \neq 0$ pour $z \neq 0$, $z \in C_1$ et si $(f, F, 1)$, alors $|f, F, r|$, où r est la plus petite racine positive de l'équation

$$\arcsin \frac{2sr}{q(1 + r^2)} + 2 \operatorname{arctg} r = \frac{\pi}{2} \text{ et } r < \frac{s - \sqrt{s^2 - q^2}}{q}, \quad q \neq 0.$$

Le rayon de subordination en module des fonctions cette classe est égal à

$$r = \frac{\sqrt{2s^2 + q^2 - 2s\sqrt{s^2 + q^2}}}{q}, \quad q \neq 0 \text{ ce qui donne pour } q = 1 \text{ et } p = 1$$

$$r = 0,161\dots$$

En admettant l'hypothèse supplémentaire de l'univalence des fonctions de la classe $N_k(p, 0; q)$, nous obtenons, en posant $q = 1$:

Théorème 3. Si $F(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} C_{1+nk} z^{1+nk} \in N_k(p, 0; 1)$ et $f(z) = az + a_{k+1} z^{k+1} + \dots$, $\frac{f(z)}{a} \in N_k(p, 0; 1)$, $a > 0$ sont univalentes dans C_1 et si $|f, F, 1|$, alors (f, F, r) , où r est la plus petite racine positive de l'équation

$$\arcsin \frac{2sr^k}{1 + r^{2k}} + \operatorname{arctg} r = \frac{\pi}{2} \text{ et } r < (s - \sqrt{s^2 - 1})^{1/k}.$$

Démonstration: Introduisons l'homotopie

$$G(z, t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } z = 0 \\ z \left[\frac{f(z)}{z} \right]^{1-t} \cdot \left[\frac{F(z)}{z} \right]^t & \text{pour } z \neq 0 \text{ et } z \in C_1, t \in \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$$

telle que $G(z, 0) = f(z)$, $G(z, 1) = F(z)$. Il est facile de voir que, pour chaque $t \in \langle 0, 1 \rangle$ fixé, $G(z, t)$ est une fonction holomorphe et univalente de la variable $z \in C_1$ et pour chaque $z \in C_1$ fixé, $G(z, t)$ est une fonction de classe $C^{(1)}$ du paramètre t . De plus pour $t \in \langle 0, 1 \rangle$, $G(0, t) = 0$, $G'_z(0, t) = a^{1-t} > 0$. Pour $|z| \leq (s - \sqrt{s^2 - 1})^{1/k}$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$ l'inégalité (1,8) donne:

$$\operatorname{Re} \frac{zG'_z(z, t)}{G(z, t)} = \operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} (1-t) + t \frac{zF'(z)}{F(z)} \right] \geq 0$$

De l'hypothèse $|f, F, 1|$ il résulte que $|G(z, t)|$ est croissante avec t , $t \in \langle 0, 1 \rangle$, $z \in C_1$. Donc $\left| \frac{F(z)}{f(z)} \right| > 1$ et pour $z \neq 0$ on a $\operatorname{Re} \frac{G'_z(z, t)}{G(z, t)} = \operatorname{Re} \ln \frac{F(z)}{f(z)} > 0$. En utilisant la limitation (2,5) avec $q = 1$ et la limitation connue de l'argument d'une fonction de partie réelle positive, nous avons

$$\begin{aligned} \left| \arg \frac{G'_t(z, t)}{zG'_z(z, t)} \right| &\leq \left| \arg \frac{zG'_z(z, t)}{G(z, t)} \right| + \left| \arg \frac{G'_t(z, t)}{G(z, t)} \right| \leq \\ &\leq \arcsin \frac{2s|z|^k}{1 + |z|^{2k}} + 2 \operatorname{arctg} |z|. \end{aligned}$$

pour $|z| \leq (s - \sqrt{s^2 - 1})^{1/k}$ et $t \in \langle 0, 1 \rangle$, En vertu du lemme 1 et 2 [2], l'homotopie $G(z, t)$ est une fonction croissante en domaine dans C_r , pour le plus petit r positif qui satisfait à l'équation

$$\arcsin \frac{2sr^k}{1 + r^{2k}} + 2 \operatorname{arctg} r = \frac{\pi}{2}$$

c'est-à-dire (f, F, r) , ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire 3. Si $F(z) \in N(p, 0:1)$, $f(z) = az + a_2z^2 + \dots$, $\frac{f(z)}{a} \in N(p, 0:1)$, $a > 0$ sont des fonctions univalentes dans C_1 et si $|f, F, 1|$, alors (f, F, r) , où r est la plus petite racine positive de l'équation $\arcsin \frac{2sr}{1 + r^2} + 2 \operatorname{arctg} r = \frac{\pi}{2}$ et $r < (s - \sqrt{s^2 - 1})$.

Un calcul facile donne $r = \sqrt{1 + 2s^2 - 2s\sqrt{s^2 + 1}}$, d'où par exemple pour $p = 1$ on obtient $r = 0,161\dots$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bielecki, A., Lewandowski, Z., *Sur une generalisation de quelques theoremes de M. Biernacki sur les fonctions analytiques*, Annales Polonici Math., 12 (1962), p. 65-70.
- [2] Bielecki, A., Lewandowski, Z., *Sur certaines familles de fonctions α -etoilees*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 15 (1961).
- [3] Biernacki, M., *Sur quelques majorantes de la theorie des fonctions univalentes*, C.R. Acad. Sci. Paris, 201, (1935), p. 256-258.
- [4] Голувин, Г. М., *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Москва—Ленинград, 1952.
- [5] — *О мажорации подчиненных аналитических функций I*, Мат. Сб. 29 (95), Нр.
- [6] — *О мажорации подчиненных аналитических функций II*, Мат. Сб. 29 (95), Нр. 3.
- [7] Lewandowski, Z., *Some Results Concerning Univalent Majorants*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sectio A, 18 (1964).
- [8] — *Sur les majorantes des fonctions holomorphe dans le cercle $|s| < 1$* , Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 15 (1961).
- [9] Окунев, Л. Я., *Высшая алгебра*, Москва—Ленинград.
- [10] Sakaguchi, K., *On certain Multivalent Functions*, The Journal of Nara Gakugoi University, 5 (1959),nr 2.

Streszczenie

W pracy tej zajmuję się zaganiemieniem wyznaczenia dokładnej wartości r_0 z przedziału $(0, 1)$ promienia koła, w którym zachodzi $|f', F', r_0|$ przy założeniu $|f, F, 1|$, jak również $|f, F, t_0|$ przy założeniu $(f, F, 1)$. O funkcji F zakłada się, że należy do klasy $N_k(p, 0: q)$ funkcji niejednoznacznych w C_1^* wprowadzonej przez K. Sagakuchi. Przy dodatkowym założeniu jednoznaczności funkcji F i f klasy $N_k(p, 0: q)$ przy $q = 1$, wyznaczam r_0 , w którym (f, F, r_0) gdy $|f, F, 1|$.

Резюме

В этой работе автор занимается определением радиуса $r_0 \in (0, 1)$ круга, в котором выполняется $|f', F', r_0|$, если $|f, F, 1|$, а также $|f, F, r_0|$, если $(f, F, 1)$, где F принадлежит к классу $N_k(p, 0: q)$ многолистных функций в C_1 , введенному К. Сагакучи. На основании однолиственности функции F и f класса $N_k(p, 0: q)$ при $q = 1$ определяется r_0 , в котором (f, F, r_0) , если $|f, F, 1|$.

