

Z Katedry Matematyki Wydziału Ekonomicznego UMCS

Kierownik: doc. dr Zdzisław Lewandowski

JAN STANKIEWICZ

Quelques problèmes extrémaux dans les classes des fonctions α -angulairement étoilées

Pewne problemy ekstremalne w klasach funkcji α -kątowno gwiaździstych

Некоторые экстремальные проблемы в классах α -углово-звездных функций

1. Introduction

Désignons par S la classe des fonctions $f(z)$ de la forme

$$(1) \quad f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

analytiques et univalentes dans le cercle K_1 , K_r désignant le cercle $\{z: |z| < r\}$.

Soit S^* la sous-classe de la classe S formée par les fonctions qui représentent le cercle K_1 sur des domaines étoilés par rapport à l'origine. On sait que $f \in S^*$ si et seulement si f est de la forme (1) et si elle satisfait à la condition

$$(2) \quad \operatorname{re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0 \quad \text{pour } z \in K_1,$$

ou à la condition équivalente

$$(3) \quad \left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \frac{\pi}{2} \quad \text{pour } z \in K_1.$$

De nombreux auteurs (entre autres: J. Zamorski, A. Bielecki, Z. Lewandowski, T.H. Mac Gregor) ont étudié les classes des fonctions α -étoilées, c'est-à-dire des fonctions de la forme (1) qui vérifient la condition

$$(4) \quad \operatorname{re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha,$$

pour $z \in K_1$ et α fixé, $0 \leq \alpha < 1$, cette condition constituant un renforcement de la condition (2). En posant $\alpha = 0$ on obtient la classe S^* .

On peut de même renforcer la condition (3).

Définition 1. Une fonction $f(z)$ sera dite fonction α -angulairement étoilée, si elle est de la forme (1) et si elle vérifie la condition

$$(5) \quad \left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \alpha \frac{\pi}{2}$$

pour $z \in K_1$ et α fixé, $0 < \alpha \leq 1$. La classe de toutes les fonctions α -angulairement étoilées sera désignée par S_α .

Observons que, si $0 < \alpha \leq \gamma \leq 1$, on a

$$S_\alpha \subset S_\gamma \subset S_1 = S^*.$$

Cela signifie que les classes S_α sont sous-classes de la classe S^* . Désignons encore par $\check{S}_\beta$ la classe des fonctions β -spirales au sens de Špaček, c'est-à-dire des fonctions de la forme (1) satisfaisant à la condition

$$(6) \quad \operatorname{re} \left\{ e^{-i\beta} \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0,$$

pour $z \in K_1$ et β fixé, $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Dans ce travail je vais étudier les classes S_α . J'y donne une interprétation géométrique de ces classes par l'intermédiaire de leur rapport aux domaines α -angulairement étoilés. J'y établis les rapports entre les classes S_α et $\check{S}_\beta$. Je démontre aussi que la symétrisation circulaire conserve la propriété de l'étoilement α -angulaire et, en m'appuyant sur ce théorème je résous quelques problèmes extrémaux pour la classe S_α .

2. Interprétation géométrique de la classe S_α

Soit α un nombre fixé de l'intervalle $[0, 1]$.

Définition 2. Le domaine D sera appelé α -angulairement étoilé par rapport à l'origine s'il contient l'origine et si, w_0 étant un point quelconque w_0 n'appartenant pas au domaine D , celui-ci ne contient pas tout l'angle de sommet w_0 et d'ouverture $(1-\alpha)\pi$ et tel que sa bissectrice prolongée passe par l'origine.

Pour un α fixé, $\alpha \in [0, 1]$, l'ensemble de tous ces domaines sera appelé famille de domaines α -angulairement étoilés et désigné par G_α . On voit facilement que la condition $0 \leq \alpha \leq \gamma \leq 1$ entraîne la condition

$$G_\alpha \subset G_\gamma \subset G_1.$$

Cela signifie que les domaines de la famille G_α , étant fixé, sont des domaines étoilés par rapport à l'origine. Si $\alpha < 1$, la frontière d'un tel domaine est une courbe étoilée sans points multiples.

Certaines propriétés des domaines de la famille G_α , où α est fixé, sont mises en évidence par les théorèmes suivants:

Théorème 1. *Si $D \in G_\alpha$, $\alpha \in [0, 1)$ et $w_0 \notin D$, on a*

$$D \subset H(w_0, \alpha),$$

où $H(w_0, \alpha)$ est un domaine de Jordan limité par des arcs de spirales logarithmiques de foyers à l'origine, faisant avec les rayons vecteurs l'angle $(1-\alpha)\pi/2$ et joignant les points w_0 et $-w_0 \exp\{\pi \operatorname{tg}(\alpha\pi/2)\}$.

Démonstration. Supposons que le domaine D ne soit pas contenu dans le domaine $H(w_0, \alpha)$ pour un $w_0 \notin D$. Cela signifie qu'il existe un point w_1 du domaine D extérieur au domaine $H(w_0, \alpha)$. Avec le point w_1 un certain entourage de ce point est situé à l'extérieur du domaine $H(w_0, \alpha)$. On peut donc choisir un nombre $\varepsilon > 0$ assez petit pour que le point w_1 soit situé à l'extérieur de la fermeture du domaine $H(w_0, \alpha + \varepsilon)$. La frontière du domaine $H(w_0, \alpha + \varepsilon)$ est formée des arcs L_+^* et L_-^* de spirales logarithmiques dont les équations sont respectivement

$$w = w_0 \exp\{it + t \operatorname{tg}[(\alpha + \varepsilon)\pi/2]\} \quad t \in [0, \pi]$$

et

$$w = w_0 \exp\{-it + t \operatorname{tg}[(\alpha + \varepsilon)\pi/2]\} \quad t \in [0, \pi].$$

En décrivant la frontière δD du domaine D on doit couper l'un des arcs L_+^* ou L_-^* .

Comme le domaine D est étoilé lorsque $\alpha < 1$ et que sa frontière δD n'admet pas de points multiples, il existe sur le rayon $(0; w_0)$ un seul point w'_0 situé sur δD . Si en décrivant δD à partir du point w'_0 dans le sens positif par rapport au domaine on sort du domaine $H(w_0, \alpha + \varepsilon)$ au point w_2 situé sur l'arc L_+^* , alors:

1° En décrivant δD dans le sens positif à partir du point w_2 on restera pour quelque temps en dehors du domaine $H(w_0, \alpha + \varepsilon)$.

2° En décrivant l'arc L_+^* dans le sens positif par rapport au domaine $H(w_0, \alpha + \varepsilon)$ à partir du point w_2 on restera pour quelque temps dans l'intérieur du domaine D .

3° Quand t croît, le vecteur tangent à l'arc L_+^* fait avec le rayon vecteur du point de contact un angle d'ouverture $(1-\alpha-\varepsilon)\pi/2$; si l'on fait donc tourner le vecteur tangent à L_+^* au point w_2 de l'angle $\varepsilon\pi/2$, il deviendra un vecteur sécant qui fera avec le rayon vecteur du point w_2 un angle d'ouverture $(1-\alpha)\pi/2$.

4° L'angle formé par le prolongement du rayon vecteur du point w_2 avec le vecteur sécant déterminé précédemment contient la partie de l'arc L_+^* qui est intérieure au domaine D .

De ces remarques il résulte que D n'est pas un domaine α -angulairement étoilé, contrairement à l'hypothèse. En suivant D dans le sens positif on ne peut donc couper l'arc L_+^* .

On peut démontrer tout pareillement qu'en décrivant la frontière δD à partir de w_2 dans le sens négatif on ne coupera pas l'arc L_-^* .

Il en résulte que les courbes δD et $\delta H(w_0, \alpha + \varepsilon)$ ne se coupent pas et que, par conséquent, le domaine D est situé dans l'intérieur du domaine $H(w_0, \alpha + \varepsilon)$, en contradiction avec le fait que le point w_1 du domaine D est extérieur à la fermeture du domaine $H(w_0, \alpha + \varepsilon)$. Cela prouve qu'il n'existe pas de point $w_1 \in D$ n'appartenant pas à $H(w_0, \alpha)$. On a donc bien

$$D \subset H(w_0, \alpha).$$

Du théorème 1 on déduit le

Corollaire 1. *Si le domaine $D \in G_\alpha$ pour un $\alpha \in [0, 1)$ et si le point $w_0 \notin D$, on a*

$$D \subset K_\varrho, \text{ où } \varrho = |w_0| \exp \{ \pi \operatorname{tg}(\alpha\pi/2) \}.$$

Démonstration. Il résulte du théorème 1 que $D \subset H(w_0, \alpha)$. Si $\alpha < 1$, le domaine $H(w_0, \alpha)$ est borné et est contenu dans le cercle K_ϱ .

Le théorème suivant se rapporte aux suites de domaines de la famille G_α .

Théorème 2. *Si $\{D_n\}$ est une suite ascendante de domaines de la famille G_α convergente au sens de Carathéodory vers le domaine D , le domaine D appartient aussi à la famille G_α .*

Démonstration. Supposons que le domaine D n'appartienne pas à la famille G_α , c'est-à-dire qu'il existe un point w_0 n'appartenant pas à D , tel que l'angle d'ouverture $(1-\alpha)\pi$, de sommet au point w_0 et dont la bissectrice prolongée passe par l'origine, contienne des points intérieurs du domaine D . Soit w_1 un de ces points. Comme la suite $\{D_n\}$ converge vers D , on a, à partir d'un n_0 $w_1 \in D_n$ pour $n > n_0$. La suite $\{D_n\}$ étant une suite ascendante de domaines, le point w_0 n'appartient pas aux domaines D_n , $n = 1, 2, \dots$, tandis que l'angle de sommet w_0 , d'ouverture $(1-\alpha)\pi$ et dont la bissectrice prolongée passe par l'origine, contient le point w_1 appartenant à tous les domaines D_n , $n > n_0$. Cela est en contradiction avec l'hypothèse que les domaines D_n sont des domaines de la famille G_α . Par conséquent le domaine D doit appartenir à la famille G_α .

Le théorème suivant fournit une interprétation géométrique des fonctions de la classe S_α :

Théorème 3. Si la fonction $f(z)$ appartient à la classe S_a , le domaine $f(K_r)$ appartient à la famille G_a pour tout $t \in (0, 1]$.

Démonstration. Soit $f(z) \in S_a$ et $r \in (0, 1]$. Les courbes $f(C_r)$, où $C_r = \{z: |z| = r\}$, sont des courbes analytiques. Il résulte de la condition (4) que l'angle que fait le rayon vecteur d'un point de la courbe $f(C_r)$ avec le vecteur normal dirigé vers l'extérieur du domaine $f(K_r)$ est inférieur en module à $a\pi/2$ et que, par conséquent, l'angle du vecteur tangent avec le rayon vecteur est supérieur en module à $(1-a)\pi/2$. Soit r un nombre quelconque fixé de l'intervalle ouvert $(0, 1)$. Supposons que $f(K_r)$ n'appartienne pas à la famille G_a . Alors il existe un point $z_0 \in C_r$ tel que l'angle de sommet $w_0 = f(z_0)$, d'ouverture $(1-a)\pi$ et dont la bissectrice prolongée passe par l'origine, contient des points intérieurs du domaine $f(K_r)$. Un côté de cet angle contient donc un point w_1 où la courbe $f(C_r)$ pénètre dans l'intérieur de cet angle (il peut arriver que $w_1 = w_0$). Au point w_1 l'angle que fait le rayon vecteur avec le vecteur tangent doit être inférieur ou égal en module à $(1-a)\pi/2$; par conséquent l'angle du vecteur normal et du rayon vecteur doit être en module supérieur ou égal à $a\pi/2$. Au point $z_1 = f^{-1}(w_1)$ appartenant à C_r la condition (4) n'est pas remplie, car l'expression $\arg\{z_1 f'(z_1)/f(z_1)\}$, égale à l'angle du vecteur normal à $f(C_r)$ avec rayon vecteur du point w_1 , est supérieure ou égale en module à $a\pi/2$. De cette contradiction il résulte que pour $r \in (0, 1)$ les domaines $f(K_r)$ appartiennent à la famille G_a .

Considérons maintenant une suite croissante quelconque $\{r_n\}$ de nombres positifs convergeant vers 1. Pour tout n on a: $r_n < 1$, donc $f(K_{r_n}) \in G_a$. La suite de domaines $\{f(K_{r_n})\}$ est une suite ascendante convergeant vers le domaine $f(K_1)$. En vertu du Théorème 2 le domaine $f(K_1)$ appartient aussi à la famille G_a .

Par conséquent pour tout $r \in (0, 1]$ le domaine appartient bien à la famille G_a .

3. Relations mutuelles entre les classes de fonctions α -angulairement étoilées et les classes de fonctions β -spirales

Définition 3. Un domaine D s'appelle domaine β -spirale par rapport à l'origine s'il contient l'origine et si avec tout point w_0 lui appartenant le domaine D contient une partie de la spirale logarithmique

$$w = w_0 \exp(it + t \operatorname{ctg} \beta)$$

de coefficient de pente $m = \operatorname{ctg} \beta$, passant par le point w_0 et contenue dans le cercle $|w| < |w_0|$.

Si $\beta > 0$ et $w_0 \in D$, le domaine D contient les points:

$$w = w_0 \exp(it + t \operatorname{ctg} \beta) \text{ pour tout } t \leq 0.$$

Si $\beta < 0$ et $w_0 \in D$, le domaine D contient les points:

$$w = w_0 \exp(it + t \operatorname{ctg} \beta) \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Si $\beta = 0$ et $w_0 \in D$, le domaine D contient les points:

$$w = w_0 e^t \quad \text{pour tout } t \leq 0,$$

c'est-à-dire les points $w = \eta w_0$, η étant un nombre quelconque de l'intervalle $[0, 1]$.

Théorème 4. Si la fonction $w = f(z)$ appartient à la classe S_α , elle représente les cercles K_r , $0 < r < 1$, sur des domaines $f(K_r)$ β -spirales.

Démonstration. Supposons que $f(K_r)$ ne soit pas un domaine β -spirale. Alors il existe un point w_0 sur $f(C_r)$ où une spirale logarithmique pénètre dans le domaine $f(K_r)$ quand on la décrit en s'éloignant du foyer. En un tel point w_0 l'angle du vecteur normal à la spirale et du vecteur normal à la frontière du domaine $f(K_r)$ doit appartenir à l'intervalle $[-\pi, 0]$. Comme le vecteur normal à la spirale fait avec le rayon vecteur du point w_0 un angle $\beta - \pi/2$, l'angle compris entre le vecteur normal à $f(C_r)$ et le rayon vecteur du point w_0 doit tomber dans l'intervalle $[\beta - 3\pi/2, \beta - \pi/2]$. Il en résulte que $\arg\{e^{-i\beta} z f'(z)/f(z)\}$ est compris dans l'intervalle $[-3\pi/2, -\pi/2]$, en contradiction avec la condition (3).

Comme cela est impossible, si l'on décrit la spirale logarithmique $w = w_0 \exp(it + t \operatorname{ctg} \beta)$ en s'éloignant du foyer on ne peut pas pénétrer dans le domaine, donc en le faisant dans le sens contraire on ne peut pas sortir du domaine $f(K_r)$. Par conséquent, si $f \in \mathcal{S}_\beta$ les domaines $f(K_r)$, $0 < r < 1$, sont bien des domaines β -spirales.

Le théorème suivant, inverse du précédent, est aussi vrai.

Théorème 4'. Si la fonction $w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ représente le cercle unité K_1 sur un domaine D β -spirale par rapport à l'origine, la fonction

$$(7) \quad g(z) = f(z)/f'(0)$$

appartient à la classe $\mathcal{S}_\beta$.

J'établirai d'abord le lemme suivant.

Lemme 1. Si la fonction $w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ représente le cercle K_1 sur un domaine D β -spirale, les domaines $D_r = f(K_r)$, $r < 1$, sont aussi des domaines β -spirales.

Démonstration du lemme 1. Supposons que $w = f(z)$ représente le cercle K_1 sur un domaine D β -spirale. Considérons la fonction

$$(8) \quad h(z) = f^{-1}[\exp(it + t \operatorname{ctg} \beta) f(z)].$$

Cette fonction est définie dans le cercle K_1 pour tout $t \leq 0$ quand $\beta > 0$ et pour tout $t \geq 0$ quand $\beta < 0$. Elle vérifie les conditions: $h(0) = 0$, $|h(z)| < 1$ pour $z \in K_1$. En vertu du lemme de Schwarz on a donc:

$$(9) \quad |h(z)| \leq |z|.$$

Soit $w_0 \in D_r$. Cela signifie qu'il existe un $z_0 \in K_r$ tel que $w_0 = f(z_0)$. Comme w_0 appartient aussi à D , D contient également les points $w = w_0 \exp(it + t \operatorname{ctg} \beta)$ pour $t \leq 0$ quand $\beta > 0$ et pour $t \geq 0$ quand $\beta < 0$. Soit $z = f^{-1}(w)$. De (9) on tire

$$|h(z_0)| = |f^{-1}(w)| = |z| \leq |z_0|.$$

Il en résulte que ces points w sont images de points z appartenant à K_r , ou, autrement dit, si $w_0 \in D_r$, le domaine D_r contient aussi les points $w = w_0 \exp(it + t \operatorname{ctg} \beta)$ pour tout $t \leq 0$ quand $\beta > 0$ et pour tout $t \geq 0$ quand $\beta < 0$. Cela équivaut au fait que le domaine D_r est un domaine β -spirale. Pour $\beta = 0$ la démonstration a été donnée par Golusin [3].

Démonstration du théorème 4'. Pour établir le théorème il suffit de prouver que si la fonction $f(z)$ effectue la représentation conforme de K_1 sur un domaine D de frontière analytique et si le domaine D est β -spirale, la condition (3) est vérifiée. Quand la frontière du domaine D n'est pas analytique, on considère les fonctions $f(rz)$, $0 < r < 1$, qui représentent K_1 sur des domaines D_r β -spirales et de frontière analytique.

Si un domaine est β -spirale, l'angle que fait le vecteur normal à la frontière avec le rayon vecteur du point de contact est compris dans l'intervalle $[\beta, \beta + \pi]$; par conséquent l'angle du vecteur normal et du rayon vecteur est compris dans l'intervalle $[\beta - \pi/2, \beta + \pi/2]$. Cet angle est égal à $\arg\{e^{i\theta} f'(e^{i\theta})/f(e^{i\theta})\}$, θ réel. Considérons la fonction harmonique $\arg\{zf'(z)/f(z)\}$, définie pour $z \in K_1$ et continue sur la frontière. Sur la circonférence C_1 cette fonction est bornée; par suite, en vertu du principe de l'extremum, elle est bornée par les mêmes valeurs dans le cercle K_1 . Donc

$$\beta - \pi/2 < \arg\{zf'(z)/f(z)\} < \beta + \pi/2, \text{ pour } z \in K_1,$$

ce qui équivaut à la condition (3). Il en résulte que la fonction $g(z)$ définie par l'égalité (7) appartient à la classe $\tilde{S}_\beta$.

Théorème 5. Si la fonction $f \in S_a$, les domaines $f(K_r)$ sont tels que toute spirale logarithmique de foyer à l'origine et de coefficient de pente m , $|m| \geq \operatorname{tg}(a\pi/2)$, ayant pénétré dans un tel domaine, n'y rentre plus.

Au trement dit, les domaines de la famille G_a sont des domaines β -spirales, où $|\beta| \leq (1-a)\pi/2$.

Le théorème 5 peut être démontré d'une façon analogue au théorème 1. On peut aussi le faire autrement.

Pour cela, il suffit de remarquer que la condition (4) entraîne la condition (3) pour tout β satisfaisant à l'inégalité $|\beta| \leq (1-\alpha)\pi/2$. Les domaines de la famille G_α sont donc bien des domaines β -spirales pour $|\beta| < (1-\alpha)\pi/2$.

Inversement, si la condition (3) est vérifiée simultanément pour $\beta = (1-\alpha)\pi/2$ et $\beta = -(1-\alpha)\pi/2$, la condition (4) est remplie et la fonction f est α -angulairement étalée.

Corollaire 2. *La classe S_α est l'intersection des deux classes*

$$(10) \quad S_\alpha = \check{S}_{(1-\alpha)\pi/2} \cap \check{S}_{-(1-\alpha)\pi/2}.$$

Les théorèmes 4,4',5 et le corollaire 2 entraînent les théorèmes suivants:

Théorème 6. *Si la fonction $w = f(z) = a_1z + a_2z^2 + \dots$ effectue la représentation univalente du cercle K_1 sur un domaine D de la famille G_α , elle représente aussi le cercle K_r , $0 < r < 1$, sur des domaines $D_r \in G_\alpha$.*

Théorème 7. *Si la fonction $w = f(z) = a_1z + a_2z^2 + \dots$ effectue la représentation univalente du cercle K_1 sur un domaine D de la famille G_α , la fonction*

$$h(z) = f(z)/f'(0)$$

appartient à la classe S_α .

4. Symétrisation circulaire des domaines de la famille G_α

Soit D un domaine contenant l'origine et désignons par D^* le domaine que l'on obtient de D en faisant une symétrisation circulaire par rapport à un rayon issu de l'origine (pour la définition de la symétrisation circulaire voir, par exemple, Hayman [4]).

Dans le travail [7] Z. Lewandowski a démontré que $D \in G_1$ entraîne $D^* \in G_1$. Je vais montrer que les familles G_α , avec $\alpha < 1$, ont la même propriété. En effet, on a:

Théorème 8. *Si $D \in G_\alpha$, on a aussi $D^* \in G_\alpha$.*

Pour établir ce théorème j'utiliserai certains domaines $D(R)$ dont voici la définition:

Définition 4. Soient D un domaine contenant l'origine et R un nombre positif tel que la circonférence $C_R = \{w: |w| = R\}$ ne soit pas contenue dans le domaine D , c'est-à-dire $C_R \cap D \neq C_R$. L'ensemble $C_R \cap D$ est donc composé d'un nombre au plus dénombrable d'arcs ouverts, disjoints, de la circonférence C_R . Soient l_k les arcs qui forment avec les précédents toute la circonférence C_R . Soit $D_1(R)$ la somme, au sens de la théorie des ensembles, de toutes les demi-droites qui ont leurs sommets sur les

arcs l_k et font avec les prolongements des rayons vecteurs de leurs sommets des angles d'ouverture inférieure ou égale à $(1-\alpha)\pi/2$. Le complémentaire de l'ensemble $D_1(R)$ est un ensemble ouvert et connexe. Désignons-le par $D(R)$, soit $D(R) = CD_1(R)$.

Si $C_R \cap D = C_R$, $D_1(R)$ est un ensemble vide; on admet alors pour $D(R)$ tout le plan.

Les ensembles $D(R)$ aussi définis ont les propriétés suivantes:

Propriété 1. Tout point frontière du domaine D situé sur la circonférence C_R est en même temps un point frontière du domaine $D(R)$.

Propriété 2. Tout angle d'ouverture $(1-\alpha)\pi$, dont la bissectrice prolongée passe par l'origine et dont le sommet est un point de la circonférence C_R n'appartenant pas à $D(R)$, est entièrement situé dans l'extérieur du domaine $D(R)$, donc contenu dans l'ensemble $D_1(R)$.

Les propriétés 1 et 2 résultent directement de la définition du domaine $D(R)$. De cette définition et des deux propriétés précédentes on déduit le lemme suivant:

Lemme 2. Si $D \in G_\alpha$, pour tout $R > 0$ on a $D \subset D(R)$ et, inversement, si pour tout $R > 0$, $D \subset D(R)$, le domaine $D \in G_\alpha$.

Démonstration. Si D appartient à la famille G_α , il résulte des propriétés d'un tel domaine et de la définition de l'ensemble $D_1(R)$ que $D_1(R)$ ne saurait contenir des points intérieurs du domaine D . Cela prouve que l'on a bien $D \subset D(R)$.

Inversement, si pour tout R tel que sur la circonférence C_R il existe des points n'appartenant pas à D on a toujours $D \subset D(R)$, il s'ensuit que l'ensemble $D_1(R)$ est toujours contenu dans l'extérieur du domaine D . Des propriétés 1 et 2 il résulte que D est un domaine α -angulairement étoilé, c'est-à-dire que $D \in G_\alpha$.

J'établirai maintenant une propriété générale des domaines $D(r)$.

Propriété 3. Pour tout $R > 0$ fixé le domaine $B = [D(R)]^*$, obtenu du domaine $D(R)$ par une symétrisation circulaire par rapport à un rayon quelconque issu de l'origine, est tel qu'avec tout point w , $|w| = R$, n'appartenant pas à B , à B n'appartient pas l'angle d'ouverture $(1-\alpha)\pi$, de sommet w et dont la bissectrice prolongée passe par l'origine. On peut l'exprimer plus brièvement en disant que $B \subset B(R)$ pour tout $R > 0$ fixé, mais quelconque.

Démonstration. Soient l_k des arcs fermés de la circonférence C_R situés à l'extérieur du domaine D ou sur sa frontière et soient w'_k et w''_k respectivement les origines et les extrémités de ces arcs quand on les décrit dans le sens positif par rapport à l'intérieur de la circonférence C_R .

Considérons les trois suites d'ensembles: $A_{1,k}$ = somme, au sens de la théorie des ensembles, de toutes les demi-droites dont les sommets sont situés sur les arcs l_k et dont les prolongements passent par l'origine: $A_{2,k}$ = angle de sommet w'_k et d'ouverture $(1-\alpha)\pi/2$, adjacent à l'ensemble $A_{1,k}$;

$A_{3,k}$ = angle de sommet w''_k et d'ouverture $(1-\alpha)\pi/2$, adjacent à l'ensemble $A_{1,k}$.

Si w'_k et w''_k se confondent, les ensembles $A_{2,k}$ et $A_{3,k}$ sont adjacents.

On voit aisément que la somme au sens de la théorie de ensembles

$$\bigcup_{l=1}^3 \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{l,k}$$

fournit l'ensemble $D_1(R)$ complémentaire du domaine $D(R)$. Pour $m \neq n$ les ensembles $A_{1,m}$ et $A_{1,n}$ sont disjoints.

Suivant la valeur de R deux cas peuvent se présenter:

1° le domaine $D(R)$ n'est pas borné,

2° le domaine $D(R)$ est borné.

Dans le premier cas il existe une demi-droite issue de l'origine entièrement contenue dans le domaine $D(R)$. Soit w_0 le point d'intersection de cette demi-droite avec la circonférence C_R . En décrivant la circonférence C_R à partir du point w_0 dans le sens positif on rencontre le premier point w'_k n'appartenant pas à $D(R)$, en la décrivant dans le sens négatif on rencontrera le point w''_n . Cela signifie que les ensembles $A_{2,n}$ et $A_{3,m}$ sont disjoints, et aussi disjoints des ensembles $A_{1,k}$, $k = 1, 2, \dots$, à l'exception des ensembles $A_{1,n}$, $A_{1,m}$ avec lesquels ils ont des demi-droites en commun.

Si l'on désigne par $D_2(R)$ le complément de l'ensemble

$$A_{2,n} \cup A_{3,m} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{1,k}$$

on voit que $[D_2(R)]^*$ s'obtient du domaine $D_2(R)$ par des rotations des ensembles dont est composé son complémentaire et que sa forme est semblable à celle de $D(R)$, à cela près qu'au lieu du système d'arcs l_k on a un arc l symétrique par rapport à la demi-droite de symétrisation. Il en résulte que le domaine $[D_2(R)]^* = \{[D_2(R)]^*\} (R)$ et encore qu'il est égal au domaine $B(R)$. Comme

$$D_2(R) \supset D(R)$$

la symétrisation respecte cette inclusion et on obtient

$$B(R) = [D_2(R)]^* \subset [D(R)]^* = B$$

Dans le second cas, où le domaine $D(R)$ est borné, il existe un point ζ de module $|\zeta| = \sup_{w \in D(R)} |w|$ tel que le segment $[0, \zeta)$ est entièrement contenu

dans le domaine $D(R)$. Comme dans le premier cas, soit w_0 le point d'intersection de ce segment avec la circonférence C_R et soient w'_n et w''_n les points de la circonférence C_R n'appartenant pas à $D(R)$ que l'on rencontre en décrivant la circonférence C_R respectivement dans les sens positif et négatif. $D(R)$ étant contenu dans le cercle $|w| < |\zeta|$, on peut répéter le raisonnement de la première partie pour ce cercle seul. On a donc aussi dans le second cas

$$B \subset B(R).$$

Démonstration du théorème 8. Le domaine $D \in D_a$, on a donc pour tout R

$$D \subset D(R)$$

et, par symétrisation,

$$D^* \subset [D(R)]^*.$$

En profitant de la propriété 3 on a

$$D^* \subset \{[D(R)]^*\} (R)$$

mais

$$\{[D(R)]^*\} (R) = D^*(R)$$

donc

$$D^* \subset D^*(R).$$

Il résulte donc du lemme 2 que D^* appartient à la famille G_a .

5. Problème de Jenkins pour la classe S_a

Désignons par $L(r, f)$, $f \in S$, la mesure linéaire de l'ensemble des points de la circonférence $|w| = r$ que la fonction $f(z)$ n'admet pas dans le cercle K_1 .

J. A. Jenkins [5] a donné la valeur exacte de

$$(11) \quad l(r) = \sup_{f \in S} L(r, f).$$

Z. Lewandowski [7] a résolu ce problème pour la classe S^* des fonctions étoilées.

Dans cette partie du travail je résous le problème analogue pour les fonctions de la classe S_a , ($0 \leq a \leq 1$).

Pour cela, je vais d'abord déterminer une fonction $F(z)$ appartenant à la classe S_a qui sera la fonction extrémale dans ce problème. La fonction $F(z)$ représente le cercle unité sur un domaine limité par un arc de la circonférence $|w| = r < 1$, symétrique par rapport au demi-axe réel positif, et par deux arcs L^+ et L^- de spirales logarithmiques, issues des

extrémités de cet arc et dont les coefficients de pente sont respectivement $\operatorname{tg}(a\pi/2)$ et $-\operatorname{tg}(a\pi/2)$.

A cause de la symétrie on peut distinguer sur la circonférence $|z| = 1$ trois arcs: I, II et III, qui sont représentés respectivement par les arcs: L^+ , arc de la circonférence C_R , L^- . Par conséquent la fonction $F(z)$ satisfait sur la circonférence C_1 à la condition

$$(12) \quad \arg \frac{e^{i\theta} F'(e^{i\theta})}{F(e^{i\theta})} = \begin{cases} a\pi/2, & \text{pour } \theta \in (-\pi, \gamma) \\ 0, & \text{pour } \theta \in (-\gamma, \gamma) \\ -a\pi/2, & \text{pour } \theta \in (\gamma, \pi). \end{cases}$$

Remarquons que la fonction analytique

$$(13) \quad \psi(z) = \frac{1}{i} \ln \frac{zF'(z)}{F(z)} = \arg \frac{zF'(z)}{F(z)} - i \ln \frac{zF'(z)}{F(z)}$$

admet sur la circonférence unité une partie réelle déterminée par la formule (12). En appliquant la formule de Schwarz (voir par exemple [6] p. 335) on trouve la fonction $\psi(z)$:

$$(14) \quad \psi(z) = -i \frac{a}{2} \ln \frac{(e^{i\gamma} - z)(e^{-i\gamma} + z)}{(1+z)^2},$$

où la branche du logarithme choisie est celle qui s'annule pour $z = 0$. De (13) et (14) on tire

$$(15) \quad \ln \frac{zF'(z)}{F(z)} = i\psi(z) = \ln \left[\frac{(e^{i\gamma} - z)(e^{-i\gamma} + z)}{(1+z)^2} \right]^{a/2}$$

d'où, après les calculs nécessaires, on obtient

$$(16) \quad F(z) = z \exp \int_0^z \left\{ \left[\frac{(e^{i\gamma} - z)(e^{-i\gamma} + z)}{(1+z)^2} \right]^{a/2} - 1 \right\} \frac{dz}{z}.$$

La fonction $F(z)$ donnée par la formule (16) appartient à la classe S_a et elle représente bien le cercle K_1 sur le domaine limité par une partie de la circonférence C_r et par deux arcs symétriques L^+ et L^- de spirales logarithmiques.

Si l'on pose

$$(17) \quad p(z, \gamma) = \frac{\sqrt{1 - 2z \cos \gamma + z^2}}{1 + z}$$

la formule (16) prendra la forme

$$(18) \quad F(z) = z \exp \int_0^z \frac{p^\alpha(z, \gamma) - 1}{z} dz$$

La fonction $p(z, \gamma)$ donnée par la formule (17) appartient à la classe P des fonctions de partie réelle positive, classiquement normées, et représente le cercle unité sur le demi-plan droit dépourvu du segment $\left(0, \sin \frac{\gamma}{2}\right]$ de l'axe réel.

Les grandeurs r et $\varphi(r)$ peuvent être calculées en fonction de γ . En effet,

$$(19) \quad r = \int_0^1 \frac{p^\alpha(t, \gamma) - 1}{t} dt$$

$$(20) \quad \varphi(r) = \int_0^\gamma \left[\frac{\cos \theta - \cos \gamma}{\cos \frac{\theta}{2}} \right]^\alpha d\theta,$$

où t et θ sont des paramètres réels. La fonction $r(\gamma)$ donnée par (19) est une fonction monotone (croissante) de la variable γ , elle admet donc une fonction inverse $\gamma(r)$. Et mettant $\gamma(r)$ dans la formule (20) on obtient $\varphi(r)$ en fonction de r seulement.

En profitant des propriétés de la fonction $F(z)$ et du principe de symétrisation (voir par exemple Hayman [4]) je vais établir le

Théorème 9. *Si $f \in S_\alpha$, on a, pour $r \in [r_\alpha, 1]$,*

$$(21) \quad L(r, f) \leq L(r, F) = 2r\varphi(r),$$

où $\varphi(r)$ est déterminé par les égalités (19) et (20) et r_α est donné par l'égalité (19) dans laquelle on pose $\gamma = 0$.

Démonstration. Soit $g(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ une fonction analytique dans le cercle K_1 et satisfaisant dans ce cercle à la condition

$$(22) \quad \left| \arg \frac{zg'(z)}{g(z)} \right| < \alpha\pi/2.$$

Pour établir le théorème 9 je vais montrer que si

$$(23) \quad 2r\varphi(r) < L(r, g)$$

la fonction g ne peut appartenir à S_α , car $g'(0) = a_1$ n'est pas égal à l'unité, plus exactement $|a_1| < 1$.

Supposons que la fonction g vérifie la condition (23). Comme le domaine $g(K_1) \in G_a$ (la fonction $g(z)/a_1 \in S_a$), le domaine $[g(K_1)]^*$, obtenu du domaine $g(K_1)$ par une symétrisation circulaire par rapport au demi-axe réel négatif, appartiendra aussi à la famille G_a (théorème 8). L'arc de la circonférence C_r qui n'est pas recouvert par les valeurs de la fonction $g(z)$, z décrivant le cercle K_1 , est la partie de la circonférence C_r contenu dans le complémentaire du domaine $g(K_1)$ ont des longueurs égales (cela résulte de la définition de la symétrisation circulaire). Par conséquent le domaine $g(K_1)$ ne contient pas un arc de la circonférence C_r , symétrique par rapport à l'axe réel et de longueur supérieure à $2r\varphi(r)$, c'est-à-dire qu'il ne contient pas la partie de l'arc de la circonférence C_r qui est la frontière du domaine $F(K_1)$. La forme du domaine $F(K_1)$ prouve, en vertu du théorème 1, que

$$(24) \quad [g(K_1)]^* \subset F(K_1).$$

Désignons par $r(0, D)$ le rayon conforme du domaine D par rapport à l'origine. Puisque la symétrisation circulaire augmente le rayon conforme d'un domaine par rapport aux points situés sur la demi-droite de symétrisation, on a

$$(25) \quad r(0, g(K_1)) \leq r(0, g(K_1)^*).$$

Le rayon conforme intérieur étant une fonction monotone du domaine (il décroît avec le domaine), on a

$$(26) \quad r(0, g(K_1)^*) \leq r(0, F(K_1)).$$

De (26) et (25) on tire

$$r(0, g(K_1)) \leq r(0, F(K_1)),$$

d'où

$$(27) \quad |a_1| \leq 1.$$

L'égalité dans (27) ne peut avoir lieu que si elle a lieu simultanément dans les inégalités (25) et (26). L'égalité dans (26) n'a lieu que si les deux domaines se confondent, c'est-à-dire si $g(K_1)^* = F(K_1)$, ce qui équivaudrait à $L(r, g) = L(r, F)$. Dans la formule (27) l'égalité n'est donc pas possible et, par conséquent, on a toujours

$$|a_1| < 1.$$

La dernière inégalité montre que la fonction g ne peut appartenir à la classe S_a (elle n'est pas normée; si l'on veut la normer, il faut la diviser par un nombre de module inférieur à l'unité, et alors les points de la circonférence $|w| = r$ seront admis par cette fonction).

Il en résulte qu'il n'existe pas de fonction de la classe S_a telle que $L(r, g) > 2r\varphi(r)$, et le théorème est ainsi établi.

Quand $r > 1$, on peut admettre que $\varphi(r) = \pi$ (le supremum est atteint, par exemple, pour l'identité). Quand $r < r_a$, on peut poser $\varphi(r) = 0$. Il en résulte le théorème suivant:

Théorème 10. *Si la fonction $f \in S_a$, on a*

$$K_{r_a} \subset f(K_1),$$

où r_a est donné par la formule

$$r_a = \exp \int_0^1 \left\{ \left[\frac{1-t}{1+t} \right]^a - 1 \right\} \frac{dt}{t} = \exp \left\{ \frac{\Gamma' \left(\frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{2} \right)} - \frac{\Gamma' \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{2} \right)} \right\}.$$

On trouve aisément que

$$r_1 = \frac{1}{4}$$

$$r_{1/2} = 2e^{-\pi/2} = 0,4225 \dots$$

$$r_0 = \lim_{a \rightarrow 0} r_a = 1.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bielecki, A., Lewandowski, Z., *Sur certaines familles de fonctions α -étoilées*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 15 (1961), p. 45-55.
- [2] Brannan, D. A., Kirwan, W. E., *On some Classes of Bounded Univalent Functions*, J. London Math. Soc., 1 (1969), p. 413-443.
- [3] Golusin, G. M., *Geometrische Funktionentheorie*, Berlin 1957.
- [4] Hayman, W. K., *Multivalent Functions*, Cambridge Univ. Press 1958.
- [5] Jenkins, J. A., *On Values Omitted by Univalent Functions*, American Journ. of Mathematics, 2 (1953), p. 406-408.
- [6] Ефграфов, М. А., *Аналитические функции*, Москва (1968).
- [7] Lewandowski, Z. *On Circular Symmetrization of Starshaped Domains*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 17 (1963), p. 35-38.
- [8] Libera, R. J., *Univalent β -spiral Functions*, Can. J. Math., 19 (1967), p. 449-456.
- [9] Mac Gregor, T. H., *The Radius of Convexity for Starlike Functions of Order 1/2*, Proc. Amer. Math. Soc., 14 (1963), p. 71-76.
- [10] Pommerenke, Ch., *On Close-to-convex Analytic Functions*, J. London Math. Soc., 40 (1965), p. 176-186.
- [11] Špaček, L., *Príspevek k teorii funkcií prostých*, Časopis Pest. Math. 62 (1933), p. 12-19.
- [12] Zamorski, J., *Remarks on a Class of Analytic Functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 8 (1960), p. 377-380.

Streszczenie

Niech S oznacza klasę funkcji $f(z)$ postaci (1) analitycznych i jedno-listnych w kole K_1 , gdzie $K_r = \{z: |z| < r\}$. Niech S^* będzie podklasą klasy S składającą się z funkcji odwzorowujących koło K_1 na obszary gwiaździste względem początku układu. Jak dobrze wiadomo $f \in S^*$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli jest postaci (1) i spełnia warunek (2) lub równoważny mu warunek (3).

Wielu autorów w swych pracach (patrz na przykład [1], [9], [12]) rozważało klasy funkcji α -gwiaździstych, to jest funkcji postaci (1) spełniających warunek (4), który jest pewnym zaostreniem warunku (2).

W podobny sposób można zaostrić warunek (3):

Definicja 1. Funkcję $f(z)$ nazywam α -kątowno gwiaździstą, jeżeli jest postaci (1) i spełnia warunek (5) dla ustalonego α , $0 < \alpha \leq 1$. Klasę funkcji α -kątowno gwiaździstych oznaczam przez S_α .

Ponadto niech $\tilde{S}_\beta$ oznacza podklasę funkcji β -spiralnych, to jest funkcji postaci (1) spełniających warunek (6).

Praca ta dotyczy badania klasy S_α . Twierdzenia 3, 5, 6 i 7 dają interpretację geometryczną klasy S_α poprzez związek tej klasy z klasą funkcji β -spiralnych i z rodziną G_α obszarów α -kątowno gwiaździstych (definicja 2).

Interesujący jest wniosek 2, który mówi o tym, że klasa S_α jest iloczynem dwóch klas $\tilde{S}_{(1-\alpha)\pi/2}$ i $\tilde{S}_{-(1-\alpha)\pi/2}$.

Następnie dowodzę:

Twierdzenie 8. Jeżeli $D \in G_\alpha$, to również $D^* \in G_\alpha$, gdzie D^* jest obszarem otrzymanym z obszaru D poprzez symetryzację kołową względem promienia wychodzącego z początku układu.

W oparciu o twierdzenie 8 rozwiązany jest następujący problem. Niech $L(r, f)$ oznacza miarę liniową zbioru punktów okręgu $|w| = r$ nie będących wartościami funkcji $f(z)$ gdy z zmienia się w kole K_1 .

Problem oszacowania tego wyrażenia w klasie S rozwiązał J.A. Jenkins [5] a w klasie S^* Z. Lewandowski [7]. Tutaj rozwiązany jest ten problem dla klasy S_α .

Twierdzenie 10. Jeżeli $f \in S_\alpha$, to dla $r \in [r_\alpha, 1]$ ma miejsce nierówność

$$L(r, f) \leq L(r, F) = 2r\varphi(r),$$

gdzie $\varphi(r)$ wyznaczone jest przez równania (19) i (20), a r_α dane jest przez (19) przy $\gamma = 0$. Funkcja F dana jest wzorem (16) przy stosownie do-branym γ . Liczba r_α jest promieniem koła pokrycia dla klasy S_α .

Резюме

Пусть S обозначает класс функций $f(z)$ вида (1), аналитических и однолистных в круге K_1 , где K_r обозначает круг $\{z: |z| < r\}$. Пусть S^* будет подклассом класса S состоящим из функций, отображающих

круг K_1 на звездные области относительно начала координат. Как хорошо известно $f \in S^*$ тогда и только тогда, если она вида (1) и удовлетворяет условию (2) либо условию (3). Несколько авторов ([1], [9], [12]) исследовало в своих трудах классы функций α -звездных, т.е. функций, выполняющих условие (4), которое является усилением условия (2).

Таким же способом можно усилить условие (3).

Определение 1. Функцию $f(z)$ будем называть α -углово-звездной, когда она принимает вид (1) и удовлетворяет условию (5) для фиксированного α , $0 < \alpha \leq 1$. Класс этих функций обозначим S_α .

Кроме того S_β обозначает класс функций β -спиральных, то значит функций вида (1), выполняющих условие (6).

Эта работа касается исследования класса S_α . Теоремы 3, 5, 6, 7 дают геометрическую интерпретацию класса S_α , значит соединяют класс S_α с классом S_β и с семейством G_α областей α -углово-звездных.

Особенно интересным является заключение 2, которое говорит о том, что класс S_α является произведением классов $\check{S}_{(1-\alpha)\pi/2}$, $\check{S}_{-(1-\alpha)\pi/2}$. Далее доказано:

Теорема 8. Если $D \in G_\alpha$, то также и $D^* \in G_\alpha$, где область D^* является областью, полученной из области D с помощью круговой симметрии относительно луча, выходящего из начала координат.

На основании теоремы 8 решается одна экстремальная проблема, именно: пусть $L(r, f)$ будет линейной мерой множества точек окружности $|w| = r$, которые не являются значениями функции $f(z)$, когда z изменяется в K_1 . Проблему оценки этого выражения в классе S решил Дженкинс [5], а в классе S^* Левандовский [7]. Здесь решена эта проблема для класса S_α .

Теорема 9. Если $f \in S_\alpha$, то для $r \in [r_\alpha, 1]$ имеет место неравенство

$$L(r, f) \leq L(r, F) = 2r\varphi(r),$$

где $\varphi(r)$ можно определить из равенства (19) и (20), а r_α данно равенством (19) при $\gamma = 0$.

Одновременно r_α является радиусом круга покрытия класса S_α .

