ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XIX, 11 SECTIO A 1965

Z Katedry Geometrii Wydziału Mat. Fiz. Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr K. Radziszewski

JANUSZ SOWIŃSKI

Sur la congruence des surfaces dans l'espace équiaffine

O przystawaniu powierzchni w przestrzeni ekwiafinicznej

О присоединении поверхностей в эквиафинном пространстве

Introduction.

Ce travail est rapport avec les résultats du travail [1] de K. Radziszewski sur la coincidence de deux surfaces à n — dimensions qui ne sont pas des plans dans l'espace projectif à $(n+1)$ — dimensions.

K. Radziszewski a démontré que si la transformation T biunivoque régulière fait correspondre, en conservant les variétés planes à $(n-1)$ — dimensions, deux surfaces à n — dimensions de classe C^3 qui ne sont pas des plans l'espace à $(n+1)$ — dimensions, alors T est une transformation projective de l'espace.

Dans ce travail nous établissons un théorème analogue sur les transformations équiaffines. Au lieu de supposer que la transformation T conserve les variétés planes, nous admettrons qe'elle conserve les valeurs des déterminants dont les éléments sont les coordonnées des vecteurs déterminés respectivement par les points qui se correspondent par T sur les surfaces à n — dimensions.

Soient dans l'espace équiaffine U_{n+1} deux surfaces à n — dimensions $V_n \subset U_{n+1}$, $V_n^* \subset U_{n+1}$ et une transformation T qui transforme V_n en V_n^*. Considérons $n+2$ points $P_0, \ldots, P_{n+1} \in V_n$ et $n+2$ points $P_0^*, \ldots, P_{n+1}^* \subset V_n^*$ qui correspondent aux points $P_0, \ldots, P_{n+1}$ par T.

A tout système de $n+2$ points de V_n associons le déterminant:

$$P = [\overline{P_1 P_0}, \ldots, \overline{P_{n+1} P_0}]$$

et aux points correspondants de la surface V_n le déterminant:

$$P^* = [\overline{P_1^* P_0^*}, \ldots, \overline{P_{n+1}^* P_0^*}]$$

Théorème. *Soit T une transformation représentant la surface V_n, qui n'est pas un plan, sur la surface V_n^* ayant la même propriété. Si pour tout système de points $P_0, \ldots, P_{n+1} \in V_n$ et pour tout système $P_0^*, \ldots, P_{n+1}^* \in V_n^*$ de points qui leur correspondent par T les déterminants P et P^* définis plus haut sont égaux, il existe une transformation équiaffine T' de l'espace U_{n+1} sur lui-même telle que $T' = T$ sur V_n.*

Observons que si $P = P^*$, T représente toute variété à $(n-1)$ — dimensions plane $V_{n-1} \subset V_n$ sur une variété à $(n-1)$ — dimensions plane $V_{n-1}^* \subset V_n^*$.

En effet, si l'on fixe sur la surface V_n $n+1$ points $P_0, \ldots, P_n$ situés dans un même plan a et si l'on déplace le point P_{n+1} sur V_n de telle façon qu'il soit toujours contenu dans a alors $P = 0$. L'égalité des déterminants entraîne $P^* = 0$, donc $P_0, \ldots, P_n$ et le point variable P_{n+1} seront toujours situés dans un même plan a^*.

Nous dirons que les plans a et a^* se correspondent dans la transformation T.

Supposons V_n et V_n^* définies par les équations:

$$(1) \qquad x^i = x^i(u^1, \ldots, u^n) \quad \text{et} \quad x^{i*} = x^{i*}(u^1, \ldots, u^n)$$
$$u = (u^1, \ldots, u^n) \in \Delta \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1$$

La transformation équiaffine transforme V_n^* de telle façon que l'on a, dans un système de coordonnées convenablement choisi:

$$(2) \qquad x^i(0) = x^{i*}(0)$$
$$x^i_j(0) = x^{i*}_j(0) = \delta^i_j x^{(i)}_{(j)}(0)$$

où

$$x^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial u^j}, \qquad j = 1, \ldots, n, \; 0 = (0, \ldots, 0).$$

Considérons deux plans passant par 0 : $S \subset U_{n+1}$ et $S^* \subset U_{n+1}$ qui se correspondent par T et dont les équations sont:

$$(3) \qquad A_i x^i = 0 \quad \text{et} \quad A_i^* x^i = 0$$

Admettons de plus que les plans $P_n^i : x^i = 0$ et $P_n^{i*} : x^i = 0$ se correspondent par T, c'est-à-dire que les variétés planes correspondantes $V_{n-1} \subset V_n$ et $V_{n-1}^* \subset V_n^*$ sont situées dans les mêmes plans du système.

Dans le travail [1] K. Radziszewski a démontré que si V_n et V_n^* sont fixées de cette façon, on a l'espace projectif:

$$(4) \qquad A_i^* = A_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n$$
$$A_{n+1}^* = a\, A_{n+1} \quad \text{où } a = const.$$

Dans le cas considéré les égalités [4] seront aussi vraies.

Considérons les points $M_0(z^1, \ldots, z^{n+1}) \in V_n$ et $M_0^*(z^{1*}, \ldots, z^{n+1*}) \in V_n^*$ qui se correspondent par T. D'après [3] ces points seront situés dans des plans qui se correspondent par T, c'est-à-dire

$$A_i z^i = 0 \quad \text{et} \quad A_i^* z^{i*} = 0 \tag{5}$$

où, en tenant compte de [4];

$$A_i^* = A_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

A_{n+1} et A_{n+1}^* sont déterminés par A_i et M_0, M_0^*

$$A_{n+1} = -A_j z^j / z^{n+1},\ A_{n+1}^* = -A_j z^{j*} / z^{n+1},\ j = 1, 2, \ldots, n$$

mais [4] entraîne:

$$aA_j z^j / z^{n+1} = A_j z^{j*} / z^{n+1*}$$

En considérant A_j comme variables et en égalant les coefficients de A_j on trouve:

$$az^j / z^{n+1} = z^{j*} / z^{n+1*}$$

en posant

$$z^{n+1*} = bz^{n+1}$$

on obtient

$$z^{j*} = abz^j,\ j = 1, \ldots, n \tag{6}$$

$$z^{n+1*} = bz^{n+1}$$

Fixons sur V_n $n+2$ points $O(0, 0, \ldots, 0)$, $P_k(z_k^1, \ldots, z_k^{n+1})$ $k = 1, \ldots$ $\ldots, n+1$ non contenus dans un même plan. A ces points T fait correspondre les points $O(0, \ldots, 0)$, $P_k^*(abz_k^1, \ldots, bz_k^{n+1})$ situés sur V_n^*.

Formons et égalons les déterminants correspondants:

$$\begin{vmatrix} z_1^1, & z_1^2 & \ldots & z_1^{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ z_{n+1}^1, & z_{n+1}^2 & \ldots & z_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} abz_1^1, & abz_1^2 & \ldots & bz_1^{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ abz_{n+1}^1, & abz_{n+1}^2 & \ldots & bz_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix} \tag{7}$$

en vertu de (7):

$$a^n b^{n+1} = 1, \quad \text{d'où } b = \text{const.} \tag{8}$$

En profitant de (2) on obtient

$$z_1^1(0) = z_1^{1*}(0)$$

c'est-à-dire

$$z_1^1(0) = abz_1^1(0)$$

d'où

$$ab = 1$$

$$(9) \qquad a^n b^n = 1$$

$$a^n b^{n+1} = 1$$

donc

$$b = 1 \text{ et } a = 1$$

Par conséquent on a, dans le voisinage de $O(0, \ldots, 0)$

$$(10) \qquad z^i = z^{i*}, i = 1, \ldots, n+1$$

Dans le voisinage du point O V_n et V_n^* sont donc identiques.

Supposons que $M \in V_n$ et $M^* \in V_n^*$ se correspondent par T. Le point M est déterminé par $n+1$ plans passant par le voisinage du point O et par ce point. Le point M^* doit aussi être situé dans chacun de ces plans, puisque T les transforme en eux-mêmes. Donc $M = M^*$ pour tout couple de points M et M^* qui se correspondent par T, ce qui prouve que les surfaces V_n et V_n^* sont identiques. Par conséquent il existe une transformation équiaffine de l'espace U_{n+1} en lui-même qui représente V_n sur V_n^* de telle façon que les points qui se correspondent par T se confondent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Radziszewski, K., *Sur la coincidence des surfaces dans l'espace projectif*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A, 18 (1963), p. 93–103.

[2] Radziszewski, K., *Sur une propriété des transformations isométriques*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A, 18 (1963), p. 85–92.

Streszczenie

Praca ta zawiera twierdzenie dotyczące przystawania dwu powierzchni w przestrzeni ekwiafinicznej U_{n+1}.

Niech T będzie transformacją przeprowadzającą powierzchnię $V_n \subset \subset U_{n+1}$ na powierzchnię $V_n^* \subset U_{n+1}$. Weźmy $n+2$ punktów $P_0, \ldots, P_{n+1} \in V_n$ i $n+2$ punktów odpowiadających im poprzez T $P_0^*, \ldots, P_{n+1}^* \in V_n^*$. Oznaczmy przez $P = \det|\overline{P_1P_0}, \ldots, \overline{P_{n+1}P_0}|$ oraz przez $P^* = \det|P_1^*P_0^*, \ldots, P_{n+1}^*P_0^*|$.

Przy tych założeniach dowodzi się następującego twierdzenia:

Jeśli T odwzorowuje V_n nie będącą płaszczyzną na V_n^* o tej samej własności oraz dla każdego układu punktów $P_0, \ldots, P_{n+1} \subset V_n$ wyznaczniki P i P^* są równe, to istnieje przekształcenie ekwiafiniczne T' przestrzeni U_{n+1} na siebie, takie, że $T' = T$ na V_n.

Резюме

Работа содержит теорему о присоединении двух поверхностей в эквиафинном пространстве U_{n+1}.

Пусть T — трансформация, отображающая поверхность $V_n \subset U_{n+1}$ на поверхность $V_n^* \subset U_{n+1}$.

Возьмем $n+2$ точек $P_0, \ldots, P_{n+1} \in V_n$ и $n+2$ точек, соответствующих им через T: $P_0^*, \ldots, P_{n+1}^* \in V_n^*$ Обозначим через $P = \det|\overline{P_1P_0}, \ldots, \overline{P_{n+1}P_0}|$ и через $P^* = \det|\overline{P_1^*P_0^*}, \ldots, \overline{P_{n+1}^*P_0^*}|$.

При этих предположениях доказывается следующая теорема:
если T отображает не являющуюся плоскостью V_n, на V_n^* тоже не являющейся плоскостью и для всякой совокупности точек $P_0, \ldots, P_{n+1} \subset V_n$, детерминаты P и P^* являются равными, то существует эквиафинная трансформация T' простртранства U_{n+1} на себя, при котором $T' = T$ на V_n.