ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XIX, 10 SECTIO A 1965

Z Katedry Geometrii Wydziału Mat. Fiz. Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Konstanty Radziszewski

MARIA MAKSYM

Sur la continuité des paratingents plans osculateurs d'une courbe

O ciągłości paratyngensów płaszczyzn ściśle stycznych do krzywej

Непрерывность совокупностей соприкасающихся плоскостей кривой

Dans le travail précédent j'ai défini les ensembles $\mathscr{P}_i^p(P)$ $i = 1, 2, \ldots 15$, où P est un point quelconque de la courbe $\langle A, B\rangle$. En vertu de la définition d'une courbe donnée dans le travail précédent, celle-ci peut être répresentée par les équations paramétriques: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, φ, ψ, χ étant des fonctions continues du paramètre t pour $t \epsilon \langle 0, 1\rangle$. On peut donc parler, de la fonction $\mathscr{P}_i^p(t)$, où $t \epsilon \langle 0, 1\rangle$ $i = 1, 2, \ldots, 15$, qui fait correspondre à toute valeur du paramètre t un ensemble univoquement déterminé de plans $\mathscr{P}_i^p(P)$, où $P = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$.

Dans ce travail je m'occupe de la semicontinuité supérieure des fonctions ainsi définies.

Les raisonnements que nous faisons dans ce travail ne serapportent pas aux courbes plans, car pour toutes les courbes planes les plans $\mathscr{P}_i^p(t)$ se réduisent à un seul plan celui qui contient la courbe.

Le problème devient alors trivial.

Notations et définitions

Df. 1. Si en un point quelconque O on place le vecteur unité a, point A qui est situé sur une sphère unité fixée de centre O et constitue l'extrémité du vecteur sera appelé image sphérique du vecteur a.

Nous désignerons l'image sphérique du vecteur a par $\overset{*}{a}$.

Df. 2. Nous appelons image sphérique d'une droite l le couple des points d'intersection de la sphère S et de la droite l' qui passe par le centre de la sphére et qui est parallèle á la droite l.

Df. 3. Nous appelerons représentation sphérique du plan a l'image sphérique de la droite l perpendiculaire au plan a.

Df. 4. Nous appelerons représentation sphérique de l'ensemble $\mathscr{P}_i^p(t)$ l'ensemble de tous les points qui sont la représentation sphérique des plans $\mathscr{P}_i^p(t) \in \mathscr{P}_i^p(t)$. L'image sphérique de l'ensemble $\mathscr{P}_i^p(t)$ sera désignée par $\mathscr{P}_i^p(t)$.

Nous avons ainsi obtenu une fonction définie par l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$, dont les valeurs sont des ensembles de points sur la sphère unité S.

Df. 5. Nous appelons ε — entrourage de l'ensemble Z l'ensemble Z^ε qui est au sens de la théorie des ensembles — la somme des cercles (ouverts) sur la sphére unité dont le centre est A et la rayon ε, le point A parcourant tout l'ensemble Z.

Df. 6. La fonction $F(t)$ est dite continue au point $t = t_0$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que l'inégalité $|t - t_0| < \delta$ entraîne $F(t) \subset F^\varepsilon(t_0)$.

Df. 7. La fonction $\mathscr{P}_i^p(t)$ est dite continue au point $t = t_0$ si la fonction est semicantimee supérieurement au point $t = t_0$.

J'utiliserai encore les définitions et les notations introduites dans les travaux [7] et [8].

Etude de la continuité de la fonction $\mathscr{P}_i^p(t)$ au point $t = t_0$.

Théorème 1: *Les fonctions $\mathscr{P}_i^p(t)$ ne sont pas nécessairement semicontinues supérieurement pour* $i = 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11$.

Pour établir ce théorème j'aurai besoin de quelques lemmes.

Lemme. 1: *Une fonction de l'ensemble $\mathscr{P}_i^p(t)$ $i = 1, 3, 9$ n'est pas nécessairement continue.*

Démonstration: Pour démontrer le lemme considérons la courbe que nous construisons de la manière suivante. Prenons dans le plan xOy une suite de points $P_v = (1/v, 0)$. Par les points P_{2v-1} menons les droites de coefficients angulaires $m_{2v-1} = 1/(2v-1)^2$, et par les points P_{2v} menons les droites de coefficients angulaires $m_{2v} = -1/(2v)^2$.

Désignons par v l'angle aigu que fait avec l'axe Ox la droite passant par le point P_v. Posons $M = (0, 0)$ et orientons la courbe en sorte que le points A_v précèdès le points A_{v+1}. Eusonlons la ligne brisée sur un cylindre de révolution de rayon r de telle façon que les points soient situés sur un cercle de rayon r. On obtient ainsi une ligne brisée géodésique L, $\hat{M}$ correspondant à M.

Pour toute courbe L ainsi définie tout plan $\mathscr{P}_i^p$, $i = 1, 3, 9$, pris au point M, doit contenir le vecteur $p(\hat{M})$. Ce vecteur est tangent à la surface du cylindre au point $\hat{M}$ et perpendiculaire à la génératrice qui passe par le point $\hat{M}$. Suppons que les points $\hat{P}_v$ de la courbe L correspondent aux points P_v.

Désignons par ψ_v l'angle que fait le plan tangent à la surface du cylindre au point $\hat{M}$ avec le plan tangent à la surface du cylindre au point $\hat{P}_v$.

Évidemment $\lim_{v\to\infty}\varphi_v = \lim_{v\to\infty}\psi_v = 0$. On peut aussi choisir r en sorte que $\lim_{v\to\infty}\varphi_v/\psi_v = 0$. Donc $\lim_{v\to\infty}(\hat{M}, p(\hat{M}), p(\hat{P}_v))$ est le plan passant par le point $\hat{M}$ et perpendiculaire à la génératrice du cylindre qui passe par le point $\hat{M}$. Comme l'angle v décroît plus vite que l'angle ψ_v, $\lim_{v\to\infty}(\hat{M}, p(\hat{M}), \hat{M}P'_v)$ et $\lim_{v\to\infty}(\hat{M}, p(\hat{M}), A'_v B'_v)$ sont les plans passant par $\hat{M}$ et perpendiculaires à la génératrice du cylindre qui passe par $\hat{M}$. Les points P'_v, A'_v, B'_v sont des points de la courbe $Ł$.

Soient $\hat{A}_v$ les points de la courbe $Ł$ qui correspondent aux points A_v. En ces points les plans $\mathscr{P}_1^p$, $i = 1, 3, 9$, tangents à la surface du cylindre existent. Puisque les points $\hat{A}_v$ sont arbitrairement proches du point M, si v est suffissament grand, et que les plans $\mathscr{P}_i^p(\hat{A}_v)$, $\mathscr{P}_i^p(M)$ sont perpendiculaires en ces points, les fonctions $\mathscr{P}_i^p(t)$ ne sont pas continues au point $t = t_0$ pour $i = 1, 3, 9$ dans le cas de la courbe $Ł$.

Lemme 2: *La fonction $\mathscr{P}_2^p(t)$ n'est pas nécessairement continue.*

Démonstration: Considérons la courbe composée des deux arcs de paraboles: $x = 0, y = \sqrt{t}, z = t$, et $x = \sqrt{t}, y = 0, z = t$ pour $t \geqslant 0$. Soit $M = (0, 0, 0)$ et orientons la courbe en sorte que les points contenus dans le plan yOz précèdent ceux qui sont contenus dans le plan xOz.

Alors $\mathscr{P}_2^p(M)$ ne contient que le plan xOy, bien que pour tout point de la courbe distinct du point $M\mathscr{P}_2^p(P)$ contienne soit le plan xOz, soit le plan yOz. Dans le cas de notre courbe la fonction $\mathscr{P}_2^p(t)$ n'est donc pas continue.

Lemme 3: *Les fonctions $\mathscr{P}_i^p(t)$ $i = 4, 5, 10, 11$ ne sont pas nécessairement continues.*

Démonstration: Considérons la courbe formée par la ligne brisée géodésique $A_1B_1A_2B_2\ldots$ sur une portre de la surface du cône de révolution $z^2 = x^2 + y^2$ pour $x \geqslant 0, z \geqslant 0$, où $A_v = (0, -1/v, 1/v)$, $B_v = (0, 1/v, 1/v)$. Soit $M = (0, 0, 0)$ et orientons la courbe de telle façon que les points A_v précèdent les points B_v.

Alors tout plan de l'ensemble $\mathscr{P}_i^p(t)$ $i = 4, 5, 10, 11$, a avec la portre considéré de la surface du cône au moins une génératrique en commun. D'autre part, il existe des points arbitrairement proches du point M, p. ex. tels que $\mathscr{P}_i^p(A_v)$ soit le plan d'équation $z = 1/v$.

On voit que dans le cas de notre courbe les fonctions $\mathscr{P}_i^p(t)$ ne sont pas continues pour $i = 4, 5, 10, 11$.

Les lemmes 1-3 fournissent la démonstration du théorème 1.

Théorème 2: *Les fonctions $\mathscr{P}_s^p(t)$ sont continues pour $s = 6, 7, 8, 12, 13$.*

Démonstration: Nous allons montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \epsilon \langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle$ et pour tout plan $p_6^v(Q)$ appartenant à l'ensemble $\mathscr{P}_6^v(Q)$, où $Q = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$, il existe un $p_6^v(M) \epsilon \mathscr{P}_6^v(M)$ tel que $\measuredangle \{p_6^v(Q), p_6^v(M)\} < \varepsilon$.

En effet, supposons, pour la démonstration par l'absurde, qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ il existe un point $Q \epsilon \langle A, B \rangle$, correspondant à la valeur du paramètre $t \epsilon \langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle$, et un plan $p_6^v(Q) \epsilon \mathscr{P}_6^v(Q)$ tel que pour tout $p_6^v(M) \epsilon \mathscr{P}_6^v(M)$, $\measuredangle \{p_6^v(Q), p_6^v(M)\} \geqslant \varepsilon_0$.

Choisissons δ_1, arbitrairement et désignons par $Q_1 = (\varphi(t_1), \psi(t_1), \chi(t_1))$ pour $t \epsilon \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle$ un point tel que pour tout $p_6^v(M) \epsilon \mathscr{P}_6^v(M)$ on ait $\measuredangle \{p_6^v(Q_1), p_6^v(M)\} \geqslant \varepsilon_0$. Choisissons ensuite $\delta_2 < |t_1 - t_0|$, et $Q_2 = (\varphi(t_2), \psi(t_2), \chi(t_2))$ pour $t_2 \epsilon \langle t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_2 \rangle$ tel que pour tout $p_6^v(M) \epsilon \mathscr{P}_6^v(M)$ on ait $\measuredangle \{p_6^v(Q_2), p_6^v(M)\} \geqslant \varepsilon_0$.

En répétant cette construction on obtient une suite de points $\{Q_v\}$ tels que $\lim\limits_{v \to \infty} Q_v = M$ et pour tout v, et pour tout $p_6^v(M) \epsilon \mathscr{P}_6^v(M)$ on ait $\measuredangle \{p_6^v(Q_v), p_6^v(Q_v)\} \geqslant \varepsilon_0$.

Designons par N_v la suite de vecteurs normaux aux plans $(Q_v, A_v B_v, B_v C_v)$ tels que $\measuredangle \{p_6^v(Q_v), (Q_v, A_v B_v B_v C_v)\} < \varepsilon/2$, $\varepsilon > 0$ étant fixé.

De la suite N_v on peut extraire une suite partielle convergente $\{N_{\varkappa(v)}\}$ telle que

$$\lim_{v \to \infty} N_{\varkappa(v)} = \lim_{v \to \infty} [A_{\varkappa(v)} B_{\varkappa(v)} \times B_{\varkappa(v)} C_{\varkappa(v)}] = \overset{*}{N},$$

où $\overset{*}{N}$ est le vecteur normal de l'un des plans de l'ensemble $\mathscr{P}_6^v(M)$. Désignons ce plan par $\overset{*}{p}{}_6^v(M)$.

Pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi il existe un nombre v_0 tel que pour $\varkappa(v) \geqslant v_0$ on a

$$\measuredangle \{(M, A_{\varkappa(v)} B_{\chi(v)}, B_{\varkappa(v)} C_{\varkappa(v)}), \overset{*}{p}{}_6^v(M)\} < \varepsilon/2.$$

On a donc pour $\varkappa(v) \geqslant v_0$ on a

$$\begin{aligned}
&\measuredangle \{p_6^v(Q_{\varkappa(v)}), \overset{*}{p}{}_6^v(M)\} \\
&\qquad \leqslant \measuredangle \{p_6^v(Q_{\varkappa(v)}), (M, A_{\varkappa(v)} B_{\varkappa(v)}, B_{\varkappa(v)} C_{\varkappa(v)})\} + \\
&\qquad + \measuredangle \{(M, A_{\varkappa(v)} B_{\varkappa(v)}, B_{\chi(v)} C_{\varkappa(v)}), \overset{*}{p}{}_6^v(M)\} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi une contradiction avec la condition que pour tout v $\measuredangle \{p_6^v(Q_v), \overset{*}{p}{}_6^v(M)\} \geqslant \varepsilon_0$.

La démonstration est donc achevée: la fonction $\mathscr{P}_6^v(t)$ est continue.

On démontre d'une façon analoque que les fonctions $\mathscr{P}_\mu^v(t)$ sont continues pour $\mu = 7, 8, 12, 13$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bouligand, G., *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Paris 1932.
[2] Maksym, M., *Sur les relations entre les plans osculateurs orientés*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska 17 (1963), p. 115-122.
[3] Pauc, C., *Les méthodes directes en géométrie différentialle*, Paris 1941.
[4] Radziszewski, K., *Sur les relations entre les plans osculateurs orientés*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska 12 (1963), p. 85-93.
[5] Radziszewski, K., *Sur les plans osculateurs orientés*, Ann. Pol. Math., XII, 1962, p. 160-169.
[6] Van der Waag, E. J. *Sur les plans osculateurs*, Indagationes Mathematicae 14 (1952.), p. 41-62.
[7] Maksym, M., *Relations entre les plans osculateurs orientés*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska 19 (1965), p. 61-68.
[8] Maksym, M., *Les familles d'éléments plans $\mathscr{P}_i^p(M)$, généralisation des plans osculateurs d'une courbe*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska 19 (1965), p. 69-73.

Streszczenie

W pracy poprzedniej określiłam zbiory płaszczyzn 15 typów w dowolnym punkcie krzywej.

Ponieważ wprowadzam parametryczne określenie krzywej, więc zbiory płaszczyzn tworzą jednoparametrową rodzinę, zależną od parametru na krzywej

W pracy tej zajmuję się problemem ciągłości tak określonej, jednoparametrowej rodziny zbiorów płaszczyzn.

Резюме

В предыдущей работе была определена совокупность плоскостей 15 типов в любой точке кривой. Так как вводится параметрическое определение кривой, совокупность плоскостей составляет однопараметрическое семейство, зависящее от параметра на кривой.

В настоящей работе рассматриваются непрерывности однопараметрических семейств совокупностей плоскостей.