ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XIX, 9 SECTIO A 1965

Z Katedry Geometrii Wydziału Mat. Fiz. Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Konstanty Radziszowski

MARIA MAKSYM

Les familles d'éléments plans $P_i^p(M)$, généralisation des plans osculateurs d'une courbe.

Rodziny elementów płaskich $P_i^p(M)$, stanowiących uogólnienie płaszczyzn ściśle stycznych krzywej

Свойства плоских элементов $P_i^p(M)$, обобщающих соприкасающиеся плоскости кривой

Dans le travail précédent j'ai introduit 15 types de définitions des plans osculateurs, dont les huit premiers correspondent aux définitions de van der Waag, j'y ai défini les plans soit au moyen des vecteurs paratingents, soit au des vecteurs contingents.

G. Bouligand [1] a introduit la notion du paratingent et du contingent de droites et il en a étudié les propriétés. Dans l'étude d'une courbe faiblement régulière au moyen des plans osculateurs on est naturellement amené à introduire, par analogie avec le paratingent et le contingent de droites, certaines ensembles de plans constituant une généralisation du plan osculateur.

Dans ce travail j'introduis des ensembles de plans de 15 types définis au moyen des vecteurs au contingents d'une courbe et j'étudie les relations entre ces types.

Je vais utiliser les notations et les définitions dans le travail précedent.
Notations et définitions:

On appelle élément plan d'une courbe $\langle A, B\rangle$ au point M tout plan tel qu'il existe quatre suites de points $\{P_v\}, \{Q_v\}, \{A_v\}, \{B_v\}$ satisfaisant aux conditions

1°. Pour tout v les points $A_v, B_v, P_v, Q_v \in \langle A, B\rangle$.

2°. $\lim\limits_{v\to\infty} P_v = \lim\limits_{v\to\infty} Q_v = \lim\limits_{v\to\infty} A_v = \lim\limits_{v\to\infty} B_v = M$.

3°. $\pi = \lim\limits_{v\to\infty} (M, P_vQ_v, A_vB_v)$ òu

$\lim\limits_{v\to\infty} (M, P_vQ_v, p(A_v)$ òu

$\lim\limits_{v\to\infty} (M, p(P_v), p(A_v))$.

Désignons:

Par $\mathscr{P}(M)$ l'élément plan de la courbe $\langle A, B\rangle$ au point M. Par $\mathscr{P}(M)$ l'ensemble des éléments plans de la courbe $\langle A, B\rangle$ au point M.

Par $a\|b$ la droite (le vecteur) a parallèle à la droite (au vecteur) b.

D'accord avec la numeration introduite dans le travail [7] nous définirons les droites a_i, $i = 1, 2, \ldots, 13$ normales aux éléments plans $\mathscr{P}_i^p$ en déterminant leurs vecteurs directeurs n_i^p.

Dans le travail [7] nous avons défini les vecteurs n_i^p, $i = 1, 2, \ldots 13$ normaux aux plans osculateurs de la courbe $\langle A, B\rangle$ au point M. Si dans ces définitions au lieu de la limite on pose lim (c'est-à-dire si l'on prend au point de la courbe $\langle A, B\rangle$ toutes les limites des plans pour toutes les suites $A_\nu \to M$, on obtient au point M l'ensemble des vecteurs $w_i^p(M)$ qui sont les des plans $\mathscr{P}_i^p(M)$.

Si dans les définitions de w_i^p, $i = 1, 2, \ldots, 15$ on remplace les vecteurs paratingents par les vecteurs contingents correspondants, on obtient 15 types de vecteurs que nous désignerons par w_i^c.

Admettons encore les notations suivantes: $\mathscr{P}_i^p(M)$ — élément plan de la courbe $\langle A, B\rangle$ au point M dans le cas où nous prenons les vecteurs paratingents. $\mathscr{P}_i^c(M)$ — elément plan de la courbe $\langle A, B\rangle$ au point M dans le cas où nous prenons les vecteurs contingents. $\mathscr{P}_i^p(M)$ — ensemble des éléments plans $\mathscr{P}_i^p(M)$. $\mathscr{P}_i^c(M)$ — ensemble des éléments plans $\mathscr{P}_i^c(M)$. $\mathscr{P}_i(M) \subset \mathscr{P}_j(M)$ — si tout éléments de l'ensemble $\mathscr{P}_i(M)$ et s'il existe des éléments de l'ensemble $\mathscr{P}_j(M)$ qui ne sont pas éléments de l'ensemble $\mathscr{P}_j(M)$ est un élément de l'ensemble $\mathscr{P}_i(M)$. $\mathscr{P}_i(M) = \mathscr{P}_j(M)$ — si tout élément de l'ensemble $\mathscr{P}_j(M)$ et tout éléments de l'ensemble $\mathscr{P}_j(M)$ est un element de l'ensemble $\mathscr{P}_i(M)$ et tout élément de l'ensemble $\mathscr{P}_i(M)$.

Relations entre les ensembles $\mathscr{P}_i^p(M)$.

Théorème: *Dans la classe des ensembles $\mathscr{P}_i^p(M)$ on a les relations d'inclusion suivantes*:

$\mathscr{P}_1^p(M) \subset \mathscr{P}_j^p(M)$	$j = 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13.$
$\mathscr{P}_3^p(M) \subset \mathscr{P}_j^p(M)$	$j = 8, 9, 12, 13.$
$\mathscr{P}_2^p(M) \subset \mathscr{P}_4^p(M) \subset \mathscr{P}_j^p(M)$	$j = 6, 10, 11, 12, 13.$
$\mathscr{P}_5^p(M) \subset \mathscr{P}_j^p(M)$	$j = 4, 6, 7, 11, 12, 13.$
$\mathscr{P}_6^p(M) \subset \mathscr{P}_j^p(M)$	$j = 12, 13.$
$\mathscr{P}_7^p(M) \subset \mathscr{P}_j^p(M)$	$j = 6, 12, 13.$
$\mathscr{P}_8^p(M) \subset \mathscr{P}_j^p(M)$	$j = 12, 13.$
$\mathscr{P}_9^p(M) \subset \mathscr{P}_j^p(M)$	$j = 12, 13.$
$\mathscr{P}_{10}^p(M) \subset \mathscr{P}_j^p(M)$	$j = 12, 13.$
$\mathscr{P}_{11}^p(M) \subset \mathscr{P}_j^p(M)$	$j = 10, 12, 13.$
$\mathscr{P}_{12}^p(M) = \mathscr{P}_{13}^p(M)$	

Dans ce travail nous n'avons pas étudié définitivement les relations entre les couples d'ensembles suivants:

$$\mathscr{P}_2^p(M),\ \mathscr{P}_7^p(M);\ \mathscr{P}_4^p(M),\ \mathscr{P}_7^p(M);\ \mathscr{P}_5^p(M),\ \mathscr{P}_8^p(M).$$

Pour les relations entre ces couples nous avons obtenu des résultats partiels en soumetant la courbe à des hypothéses supplémentaires que nous n'énoncerons pas ici. Pour établier le théorème que nous venons de formuler nous avons démontré 27 lemmas. Ces démonstrations étant en principe semblables, nous barnerons à énconcér deux lemmes qui donneront une idée de la démonstration.

Lemme 1: *Tout élément de l'ensemble $\mathscr{P}_4^p(M)$ est un élément de l'ensemble $\mathscr{P}_{11}^p(M)$.*

Démonstration: Considérons un plan quelconque $\mathscr{P}_4^p(M) = \lim\limits_{v\to\infty} (M, MP_v, P_vQ_v)$, où p. ex. $M \dashv P_v \dashv Q_v$ pour tout $v = 1, 2, \ldots$ Nous alons prouver qu'il existe un plan $p_{11}(M) \in \mathscr{P}_{11}^p(M)$ tel que $p_{11}(M) = p_4(M)$.

Pour tout $v = 1, 2, \ldots$ il existe un point $S_v \in \langle A, B\rangle$ tel que $P_v \dashv S_v \dashv Q_v$ et $p(S_v) \parallel (M, MP_v, MQ_v)$ (en vertu des du travail [7]). Comme on ne saurait avoir en même temps $p(S_v) \parallel MP_v$ et $p(S_v) \parallel MQ_v$, admettons p.ex. que $MQ_v \nparallel p(S_v)$ pour une suite infinie d'indices $\sigma(v)$.

Le plan $\big(M, MQ_{\delta(v)}, p(S_{\delta(v)})\big)$ est donc détérminé pour tout v et on a la condition:

$$\big(M, MQ_{\delta(v)}, p(S_{\delta(v)})\big) \parallel \big(M, MP_{\delta(v)}, MQ_{\delta(v)}\big).$$

Par conséquent $\lim\limits_{v\to\infty}\big(M, MQ_{\delta(v)}, p(S_{\delta(v)})\big) = p_{11}^p(M) = p_4^p(M)$.

Lemme 2: *Il existe une courbe et un élément plan $\mathscr{P}_2^p(M) \subset \mathscr{P}_2^p(M)$ de cette courbe tels que n'appartient pas à l'ensemble $\mathscr{P}_9^p(M)$.*

Démonstration: Considérons la courbe composée de deux arcs plan L_1: $x = 0, y = -\sqrt{t}, z = t$ i L_2: $x = t, y = \sqrt{t}, z = 0$ et $t \geq 0$. Soit $M = (0, 0, 0)$ et orientons la courbe de telle facon que les points de la courbe L_1 précèdent ceux de la courbe L_2.

Admettons $\mathscr{P}_2^p(M) = \lim\limits_{v\to\infty}(M, P_v M, MQ_v)$, où $P_v = (0, -1/v, 1/v^2)$ et $Q_v = (1/v^2, 1/v, 0)$.

Alors $p_2^p(M)$ est un plan de vecteur normal $w_2^p = 1/\sqrt{2}\cdot(i-k)$. Tout plan $p_9^p(M)$ de l'ensemble $\mathscr{P}_9^p(M)$ admet un vecteur normal de la forme $-1/(\alpha^4+\beta^4)[\alpha^2\cdot i+\beta^2\cdot k]$, i, j, k étant les vecteurs des axes. En effet, considérons les cas suivants:

1°. $P_v \dashv Q_v \dashv M$ — alors $\beta = 0$ puisque la portion considérée est contenue dans le plan yOz.

2°. $M \dashv P_v \dashv Q_v$ — alors $\alpha = 0$ puisque la portion considérée de la courbe est contenue dans le plan xOy.

3^0. $P_v \dashv M \dashv Q_v$ — alors $P_v = \big(0, -x_v^p, (x_v^p)^2\big)$,

$Q_v = \big((x_v^q)^2, x_v^q, 0\big)$, et $x_v^p \geqslant 0$, $x_v^q \geqslant 0$, $\lim\limits_{v\to\infty} x_v^p = \lim\limits_{v\to\infty} x_v^q = 0$.

Alors le vecteur $P_vQ_v = [(x_v^q)^2, x_v^q - x_v^p, -(x_v^p)^2]$ et

$$p(M) \times P_vQ_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ (x_v^q)^2 & x_v^q - x_v^p & -(x_v^p)^2 \end{vmatrix} = -(x_v^p)^2 \cdot i - (x_v^q)^2 \cdot k.$$

En possant à la limite on obtient donc toujours la forme définiée dans 3^0, indépendamment du choix des points x_v^p et x_v^q.

Par conséquent $p_2^p(M) \notin \mathscr{P}_2^p(M)$.

Relations d'inclusion entre les ensembles $\mathscr{P}_i^c(M)$.

Théorème: *Dans la classe des ensembles $\mathscr{P}_i^c(M)$ on a les relations d'inclusions suivantes*:

$\mathscr{P}_1^c(M) \subset \mathscr{P}_j^c(M)$ $\quad j = 6, 7, 9, 10, 12, 13.$

$\mathscr{P}_3^c(M) \subset \mathscr{P}_j^c(M)$ $\quad j = 8, 9, 10, 11, 12, 13.$

$\mathscr{P}_2^c(M) \subset \mathscr{P}_4^c(M) \subset \mathscr{P}_j^c(M)$ $\quad j = 6, 10, 12.$

$\mathscr{P}_5^c(M) \subset \mathscr{P}_j^c(M)$ $\quad j = 4, 6, 7, 10, 11, 12, 13.$

$\mathscr{P}_6^c(M) \subset \mathscr{P}_{12}^c(M)$

$\mathscr{P}_7^c(M) \subset \mathscr{P}_j^c(M)$ $\quad j = 12, 13.$

$\mathscr{P}_8^c(M) \subset \mathscr{P}_j^c(M)$ $\quad j = 12, 13.$

$\mathscr{P}_9^c(M) \subset \mathscr{P}_j^c(M)$ $\quad j = 10, 12, 13.$

$\mathscr{P}_{10}^c(M) \subset \mathscr{P}_{12}^c(M)$

$\mathscr{P}_{13}^c(M) \subset \mathscr{P}_{12}^c(M)$.

Pour établir ce théorème nous avons démontré 23 lemmes, comme plus haut, nous nous bornerons à en énoncer deux:

Lemme 3: *Tout élément de l'ensemble $\mathscr{P}_1^c(M)$ est un élément de l'ensemble $\mathscr{P}_4^c(M)$.*

Démonstration: Dans la définition $p_4^c(M) = \lim\limits_{v\to\infty}(M, MP_v, P_vQ_v)$ il suffit de poser $MP_v = c(M)$.

Lemme 4: *Il existe une courbe et un élément plan de cette courbe $p_1^c(M) \in \mathscr{P}_1^c(M)$ tels que $\mathscr{P}_1^c(M)$ n'appartient pas à l'ensemble $\mathscr{P}_8^c(M)$.*

Démonstration: Considérons le contour composé des deux arcs plans donnés par l'équation: $x = t$, $y = \sqrt{|t|}$ pour $t \in \langle -1, 1 \rangle$. Désignons par L^+ la partion de la courbe qui correspond aux paramétres $t > 0$, et par L^- celle qui correspond aux paramètres $t < 0$. Inscrivons dans ce contour la ligne brisée: $A_1B_1A_2B_2A_3 \ldots$.

Soit $A_v \epsilon L^+$ et $B_v \epsilon L^-$, $M = (0, 0)$, demandons de plus que pour tout v $A_v B_v = \lambda i$ on ait $\sphericalangle \{B_v A_{v+1}, i\} = 1/v$ et $\lim_{v\to\infty} A_v = \lim_{v\to\infty} B_v = M$. Alors $\lim_{v\to\infty} [B_v A_{v+1}] = i$. Orientons la courbe de telle façon que A_v précède B_v. En déformant le plan xOy par flexion formons la surface d'un cylindre de révolution de rayon p. ex. $2/\pi$, dont les génératrices soient parallèles à l'axe Ox. On obtient ainsi de la ligne brisée $A_1 B_1 A_2 B_2 \ldots$ une nouvelle ligne brisée géodésique sur la surface du cylindre. Choisissons $p_1^c(M) = \lim_{v\to\infty} (M, c(M), MP_v)$, où P_v sont respectivement les milieux des segments $A_v B_v$. Alors $p_1^c(M)$ est un plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre. Par contre $\mathscr{P}_8^c(M)$ doit contenir les plans détérminés par le vecteur $w = \lim_{v\to\infty} c(Q_v)$ pour $Q_v \neq M$. Aucund de ces vecteurs n'est contenu dans le plan $p_1^c(M)$, déterminé plus haut.

Eu effet, si $Q_v \epsilon \langle A_v, B_v \rangle$, le vecteur w est colinéaire avec les génératrices du cylindre, puisque les segments $A_v B_v$ sont colinéaire avec elles.

D'autre part, si $Q_v \epsilon \langle B_v, A_{v+1} \rangle$, en vertu de la condition $\lim_{v\to\infty} [B_v A_{v+1}] = i$, le vecteur w doit, dans ce cas aussi, etre colinéaire avec les génératrices du cylindre. Par consequent $p_1^c(M) \notin \mathscr{P}_8^c(M)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bouligand, G., *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Paris 1932.

[2] Maksym, M., *Sur les relations entre* 17 (1963), *les plans osculateurs orientés*, Ann. Univ, M. Curie-Skłodowska p. 115-123.

[3] Pauc, C., *Les méthodes directes en géométrie différentialle*, Paris 1941.

[4] Radziszewski, K., *Sur les relations entre les plans osculateurs orientés*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 17 (1963), p. 85-93.

[5] Radziszewski, K., *Sur les plans osculateurs orientés*, Ann. Pol. Math., 12, (1962). p. 160-169.

[6] van der Waag, E. J., *Sur les plans osculateurs*, Indagationes Mathematicae, 14, (1952), p. 41-62

Streszczenie

W pracy tej określiłam zbiory płaszczyzn 15 typów określonych w pracy poprzedniej.

Zajmuję się również badaniem relacji zawierania się między tymi zbiorami, przy założeniu orientowalności tych płaszczyzn.

Резюме

Определяются совокупности плоскостей 15 типов, описанных в предыдущей работе. Исследуются реляции, заключающиеся между этими совокупностями, предполагая ориентирование этих плоскостей.