ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN – POLONIA

VOL. XIX, 4 SECTIO A 1964

Z Katedry Matematyki Wydziału Ekonomicznego UMCS.
Kierownik: doc. dr Zdzisław Lewandowski

FILIP FRANCISZEK JABŁOŃSKI et ZDZISŁAW LEWANDOWSKI

Caractérisation de certaines classes de fonctions holomorphes par la subordination modulaire

Charakteryzowanie pewnych klas funkcji holomorficznych w terminach podporządkowania modułowego

Характеристика некоторых классов голоморфных функций в понятиях подчинения по модулю

I. Ce travail est en rapport aves le théorème B', relatif à la majorisation modulaire des fonctions holomorphes, démontré par Z. Lewandowski [1]: nous y établissons le théorème inverse du théorème B', en admettant cependant l'hypothèse supplémentaire que la fonction $F(z)$ est régulière dans le cercle $|z| < 1$ et que $\operatorname{Re}\left\{\frac{F(0)}{f(0)}\right\} \neq 0$.

De la démonstration du théorème B', établi dans [1] it découle directement que l'univalence de la fonction $f(z)$ peut être remplacée par l'hypothèse plus faible: $\frac{f(z)}{z} \neq 0$ pour $|z| < 1$.

Dans l'énoncé du théorème inverse nous remplaçons aussi l'hypothèse de l'univalence de la fonction $f(z)$ par l'hypothèse plus faible: $\frac{f(z)}{z} \neq 0$ pour $|z| < 1$.

Ce théorème peut être formulé de la façon suivante:

Théorème. *Soit $F(z, t)$ une fonction régulière dans le cercle $|z| < 1$, et pour tout $t \in \langle 0, \delta \rangle$, telle que $F(0, t) = 0$. Si $\frac{f(z)}{z} = \frac{F(z, 0)}{z} \neq 0$ dans le cercle $|z| < 1$ et si la limite:*

$$(1) \qquad \lim_{t \to 0+} \frac{F(z, t) - F(z, 0)}{t^{\varrho}} = F(z)$$

existe pour un $\varrho > 0$, $F(z)$ *étant une fonction régulière pour* $|z| < 1$ *et telle que:*

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{F(0)}{f(0)}\right\} \neq 0 \tag{2}$$

alors l'hypothèse:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{F(z)}{f(z)}\right\} \leqslant 0 \quad \textit{pour} \quad |z| < 1 \tag{3}$$

entraîne que pour tout $r \in \langle 0, 1)$ *il existe un nombre* $\delta(r) > 0$ *tel que*

$$|F(z, t)| \leqslant |f(z)| \quad \textit{pour} \quad t \in \langle 0, \delta(r)\rangle,\ |z| < r; \quad r \in \langle 0, 1). \tag{4}$$

Démonstration. Comme la limite (1) existe lorsque t tend vers zéro et $\varrho > 0$, on a $\lim\limits_{t\to 0+}[F(z, t) - F(z, 0)] = 0$ (puisque t^ϱ tend vers zéro avec t et $\varrho > 0$). Donc

$$\lim_{t\to 0+} F(z, t) = F(z, 0)$$

et, par suite, $F(z, t)$ est une fonction de la variable t continue à droite au point $t = 0$ pour tout z fixé, $|z| < 1$.

Posons

$$\omega(z, t) = \frac{F(z, t)}{F(z, 0)} = \frac{F(z, t)}{f(z)} \tag{5}$$

On a donc $\omega(z, 0) = 1$ pour $|z| < 1$ et, en vertu de (1), on a pour un $\varrho > 0$ l'égalité

$$\lim_{t\to 0+}\left\{\frac{F(z, t) - F(z, 0)}{t^\varrho} \cdot \frac{2}{F(z, t) + F(z, 0)}\right\} \tag{6}$$

$$= \lim_{t\to 0+}\left\{\frac{\omega(z, t) - 1}{t^\varrho} \cdot \frac{2}{\omega(z, t) + 1}\right\} = \frac{F(z)}{f(z)}$$

Le dernier nombre de l'égalité (6) vérifie les hypothèses (2) et (3); de plus, la fonction $F(z, t)$, donc aussi $\omega(z, t)$, est continue à droite pour $t = 0$. Il existe un $\delta(r) > 0$ tel que

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\omega(z, t) - 1}{\omega(z, t) + 1}\right\} \leqslant 0 \tag{7}$$

pour tout $t \in \langle 0, \delta(r)\rangle$, $|z| < r$ et $r \in \langle 0, 1)$, car dans le cercle $|z| < r$ on a l'inégalité

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{F(z)}{f(z)}\right\} < h < 0.$$

En vertu d'un théorème établi dans [2], p. 365, il résulte de (7) que $|\omega(z, t)| \leqslant 1$ pour $|z| < r$; $r \in \langle 0, 1)$ et tout $t \in \langle 0, \delta(r) \rangle$, c'est-à-dire

$$|F(z, t)| \leqslant |f(z)|$$

pour $|z| < r$, $r \in \langle 0, 1)$ et tout $t \in \langle 0, \delta(r) \rangle$.

II. Dans la suite de ce travail nous indiquerons quelques applications. Désignons par T la classe des fonctions $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ régulières dans le cercle $|z| < 1$ et telles que $\frac{f(z)}{z} \neq 0$ pour $|z| < 1$, par S la classe des fonctions $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ holomorphes et univalentes dans le cercle $|z| < 1$. Désignons encore par $S_c, S^*, K, R, S^{**}, \overline{S^*}$ les sous — classes de fonctions S ou T qui représentent le cercle unité respectivement sur des domaines convexes, étoilés, presque convexes, presque étoilés, étoilés par rapport aux points symétriques [3], étoilés par rapport aux points conjugués [4]. Enfin, désignons par 0 la sous — classe de la classe S des fonctions à rotation bornée. Les sous — classes mentionnées sont définies par les conditions suivantes:

$$f(z) \in S_c \text{ si } \operatorname{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right\} > 0,$$

$$f(z) \in S^* \text{ si } \operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0,$$

$$f(z) \in K \text{ s'il existe une } \left\{\frac{g(z)}{g'(0)}\right\} \in S_c \text{ telle que } \operatorname{Re}\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} > 0,$$

$$f(z) \in R \text{ s'il existe } g(z) \in S^* \text{ telle que } \operatorname{Re}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\} > 0,$$

$$f(z) \in S^{**} \text{ si } \operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z) - f(-z)}\right\} > 0,$$

$$f(z) \in \overline{S^*} \text{ si } \operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z) + \overline{f(\bar{z})}}\right\} > 0,$$

$$f(z) \in 0 \text{ si } \operatorname{Re}\{f'(z)\} > 0.$$

Corollaire 1. *Pour que $f(z) \in S$ soit étoilée il faut et il suffit que pour tout $r \in \langle 0, 1)$ il existe un nombre $\delta(r) > 0$, tel que*

$$|f[(1-t)z]| \leqslant |f(z)|$$

dans le cercle $|z| < r$; $r \in \langle 0, 1)$, pour tout $t \in \langle 0, \delta(r) \rangle$.

L'insertion de ce corollaire dans le travail [1] avait pour but de caractériser la classe des fonctions S^* en termes de la subordination modulaire.

Démonstration. La condition est suffisante. Soit $F(z,t) = f[(1-t)z]$. On a donc $F(0,t) = 0$, $F(z,0) = f(z)$ et $f(z)\in S$. Pour tout $t\in\langle 0, \delta\rangle$ il existe un nombre $\delta(r) > 0$ tel que

$$f[(1-t)z] = f(z) - tf'(z) + O(t^2)$$

pour $|z| < r$; $r\in\langle 0, 1)$ et tout $t\in\langle 0, \delta(r)\rangle$, où $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{O(t^2)}{t} = 0$.
Donc

$$f(z) = \lim_{t\to 0+}\frac{F(z,t)-F(z,0)}{t} = -zf'(z),$$

et par suite

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{F(z)}{f(z)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} \leqslant 0 \text{ pour } |z| < 1,$$

c'est-à-dire $f(z)\in S^*$.

La condition est nécessaire. Supposons maintenant que $f(z)\in S^*$ pour $|z| < 1$. Soit $F(z,t) = f[(1-t)z]$ pour $|z| < 1$ et tout $t\in\langle 0, \delta(r)\rangle$. Pour $|z| < r$; $r\in\langle 0, 1)$ on a:

$$\left(\frac{\dfrac{\partial F(z,t)}{\partial t}}{F(z,t)}\right)_{t=0} = -\frac{zf'(z)}{f(z)}$$

Donc pour $|z| < r$; $f(z)\in S^*$ et $\operatorname{Re}\left\{\dfrac{F(0)}{f(0)}\right\} \neq 0$ il vient

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\dfrac{\partial F(z,t)}{\partial t}}{F(z,t}\right\}_{t=0} \leqslant 0$$

par conséquent il existe un nombre $\delta(r) > 0$ tel que pour tout $t\in\langle 0, \delta(r)\rangle$ et z fixé, $|z| < r$; $r\in\langle 0, 1)$ la fonction $|F(z,t)| = |f[(1-t)z]|$ est une fonction décroissante du paramètre t et, en vertu de (1), continue à droite pour $t = 0$ car

$$\lim_{t\to 0+} f[(1-t)z] = f(z)$$

Donc $|f[(1-t)z]| \leqslant |f(z)|$ pour $|z| < r$; $r\in\langle 0, 1)$ et tout $t\in\langle 0, \delta(r)\rangle$.

Corollaire 2. *Si $f(z) \in T$, pour que $f(z) \in R$ par rapport à la fonction $g(z) \in S^*$ il faut et il suffit que pour tout $r \in \langle 0, 1)$ il existe un $\delta(r) > 0$ tel que pour tout $t \in \langle 0, \delta(r) \rangle$ on ait l'inégalité*

$$|f(z) - tg(z)| \leqslant |f(z)|$$

dans le cercle $|z| < r$; $r \in \langle 0, 1)$.

Démonstration. La condition est suffisante. Soit $F(z, t) = f(z) - tg(z)$. On a $F(0, t) = 0$ pour $t \in \langle 0, \delta \rangle$ et $F(z, 0) = f(z)$ pour $|z| < 1$. En vertu de (1) on obtient:

$$F(z) = \lim_{t \to 0+} \frac{F(z, t) - F(z, 0)}{t} = -g(z)$$

pour $|z| < 1$, donc en vertu du théorème démontré plus hunt on a

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{F(z)}{f(z)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{-\frac{g(z)}{f(z)}\right\} \leqslant 0$$

pour $|z| < 1$, c'est-à-dire $f(z) \in R$.

La condition est nécessaire. Supposons que $f(z) \in R$ pour $|z| < 1$, la fonction définissante étant la fonction $g(z) \in S^*$ pour $|z| < 1$. Soit $F(z, t) = f(z) - tg(z)$ pour $|z| < 1$, et tout $t \in \langle 0, \delta(r) \rangle$. On a $F(0, t) = 0$ pour tout $t \in \langle 0, \delta \rangle$ et $F(z, 0) = f(z)$ pour $|z| < 1$. Pour un z fixé, $|z| = 1$, on obtient:

$$\left(\frac{\dfrac{\partial F(z, t)}{\partial t}}{F(z, t)}\right)_{t=0} = -\frac{g(z)}{f(z)} \quad \text{pour } |z| < 1.$$

Donc

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\dfrac{\partial F(z, t)}{\partial t}}{F(z, t)}\right\}_{t=0} \leqslant 0$$

puisque $f(z) \in R$ et $g(z) \in S^*$ dans $|z| < 1$; par conséquent il existe un $\delta(r) > 0$ tel que pour un z fixé $|z| < r$ et $t \in \langle 0, \delta(r) \rangle$, la fonction

$$|F(z, t)| = |f(z) - tg(z)|$$

est une fonction décroissante du paramètre t et, de plus:

$$\lim_{t \to 0+} [f(z) - tg(z)] = f(z)$$

donc $|f(z) - tg(z)| \leqslant |f(z)|$ pour $|z| < r$; $r \in \langle 0, 1)$ et tout $t \in \langle 0, \delta(r) \rangle$.

Dans les corollaires suivants, nous nous bornerons à donner la forme de la fonction $F(z, t)$ et nous omettrons les démonstrations, qui sont analogues aux précédentes.

Corollaire 3. *Si $f(z)\in S$, pour que la fonction $f(z)\in K$ par rapport à la fonction $g(z)\in S_c$ il faut et il suffit que pour $r\in\langle 0,1)$ il existe un nombre $\delta(r)>0$ tel que*

$$|f'(z)-tg'(z)|\leqslant |f'(z)|$$

dans le cerle $|z|<r$; $r\in\langle 0,1)$ et pour tout $t\in\langle 0,\delta(r)\rangle$.

La fonction $F(z,t)$ est de la forme:

$$F(z,t)=zf'(z)-tzg'(z)$$

dans le cercle $|z|<r$; $r\in\langle 0,1)$ et pour tout $t\in\langle 0,\delta\rangle$.

Corollaire 4. *Si $f(z)\in S$, pour que $f(z)\in S^{**}$ il faut et il suffit que pour tout $r\in\langle 0,1)$ il existe un nombre $\delta(r)>0$ tel que*

$$\left|f'(z)-t\frac{f(z)-f(-z)}{z}\right|\leqslant |f'(z)|$$

dans le cercle $|z|<r$; $r\in\langle 0,1)$ pour tout $t\in\langle 0,\delta(r)\rangle$.

La fonction $F(z,t)$ est de la forme:

$$F(z,t)=zf'(z)-t[f(z)-f(-z)].$$

pour $|z|<1$ et $t\in\langle 0,\delta\rangle$.

Corollaire 5. *Si $f(z)\in S$, pour que $f(z)\in \overline{S}^{*}$ il faut et il suffit que pour tout $r\in\langle 0,1)$ il existe un nombre $\delta(r)>0$ tel que*

$$\left|f'(z)-t\cdot\frac{f(z)+\overline{f(\bar z)}}{z}\right|\leqslant |f'(z)|$$

dans le cercle $|z|<r$; $r\in\langle 0,1)$ pour tout $t\in\langle 0,\delta(r)\rangle$.

La fonction $F(z,t)$ est de la forme:

$$F(z,t)=zf'(z)-t[f(z)+\overline{f(\bar z)}]$$

pour $|z|<1$ et $t\in\langle 0,\delta\rangle$.

Corollaire 6. *Si $f(z)\in S$, pour que la fonction $f(z)\in 0$ il faut et il suffit que pour tout $r\in\langle 0,1)$ il existe un nombre $\delta(r)>0$ tel que*

$$|f'(z)-t|\leqslant |f'(z)|$$

dans le cercle $|z|<r$; $r\in\langle 0,1)$ pour tout $t\in\langle 0,\delta(r)\rangle$.

La fonction $F(z,t)$ est de la forme:

$$F(z,t)=z-tzf'(z)$$

dans le cercle $|z|<1$ et pour tout $t\in\langle 0,\delta\rangle$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Lewandowski, Z., *Some Remarks on a Paper of M. S. Robertson*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 17 (1963), 43-46
[2] Leja, F., *Teoria funkcji analitycznych* Warszawa 1957.
[3] Robertson, M. S., *Applications of the Subordination Principle to Univalent Functions*, Pacific Journ. of Math., 11, (1961), p. 315-324.
[4] Lewandowski Z. Stankiewicz, J. *On Mutually Adjoint Close — to — Convex Functions*. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 19 (1965), 47-51

Streszczenie

W pracy tej dowodzimy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia B' Z. Lewandowskiego [1], przy dodatkowych założeniach, że funkcja $F(z)$ jest regularna dla $|z| < 1$ i $\mathrm{Re}[F(0)/f(0)] \neq 0$, przy czym zastępujemy również założenie jednolistności funkcji $f(z)$, założeniem słabszym, tj. $f(z)/z \neq 0$ dla $|z| < 1$.

W zastosowaniu tych twierdzeń charakteryzujemy znane klasy funkcji holomorficznych w terminach podporządkowania modułowego.

Резюме

В работе доказывается теорема, обратная теореме B' З. Левандовского (1). при дополнительных предположениях, что функция $F(z)$ является голоморфной в единичном круге: $|z| < 1$ и $\mathrm{Re}[F(0)/f(0)] \neq 0$. Кроме того, предположение, что $f(z)$ — однолистная функция мы заменили более слабым предположением $f(z)/z \neq 0$ для $|z| < 1$. В приложениях этих теорем мы определили некоторые классы голоморфных функций при помощи понятия подчинения по модулю.