ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN – POLONIA
VOL. XVII, 17 SECTIO A 1963

Z Zespołowej Katedry Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

ADOLF HAIMOVICI

Sur une généralisation du problème de Cauchy

O pewnym uogólnieniu problemu Cauchy'ego

О некоторым обобщени проблема Коши

§ 1. À partir de 1952, E. Hille [2] a publié une série de travaux dans lesquels il a formulé d'une manière générale le problème de Cauchy pour une équation linéaire et établi des relations entre ce problème et la théorie des semigroupes. Ses travaux ont été continués et généralisés par d'autres mathématiciens, parmi lesquels citons R. S. Phillips [5], et plus récemment par T. Kato [4] et E. Heyn [1].

Un exposé d'ensemble des résultats est donné dans le livre de E. Hille [3].

Nous nous proposons de traiter un problème analogue pour des systèmes de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i u, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

où les A_i sont n opérateurs linéaires, définis sur un domaine d'un espace $\mathscr{B}$ de Banach; pour plus de simplicité nous allons supposer que les domainee des A_i coincident et nous désignerons par $D \equiv D(A_i) \subset \mathscr{B}$ le domains commun de définition; nous supposerons, de plus, que les opérateurs A_i sont indépendants de x_i et que les domaines de leurs valeurs sont $R(A_i) \subset \mathscr{B}$.

§ 2. Le problème à résoudre est le suivant:

Trouver une fonction $u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ayant les propriétés suivantes:

1. u est fortement absolument continue et continûment différentiable sur chaque intervalle fini à n dimensions, contenu dans l'ensemble $E_+^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n): x_i \geq 0, x \neq 0\}$;

2. Pour chaque $x \in E_+^n$, $u(x) \in D(A)$ et satisfait à (1);

§ 3. u_0 étant un élément donné de $\mathscr{B}$, on a

$$\lim_{x_i \to 0} \|u(x) - u_0\| = 0. \tag{2}$$

Nous allons désigner par P le problème ainsi formulé. On peut alors aisément adapter les définitions suivantes de E. Hille:

Une Z-solution de (1) est une solution non nulle correspondant à l'élément $u_0 = \theta \in \mathscr{B}$. Si le système (1) admet deux solutions différentes u_1 et u_2 correspondant au même élément initial u_0, alors il admet une Z-solution.

Une solution normale du type $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ est une solution $u(x)$ de (1) qui satisfait aux conditions:

$$\limsup_{x_i \to \infty} \frac{1}{x_i} \log \|u(x)\| \leqslant \omega_i < +\infty, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

pour $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ quelconques.

Pour que le problème P admette au plus une solution normale du type ω, il est suffisant que l'équation de rang i (i-quelconque) admette au plus une solution du type normal ω_i, quand les $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ sont fixés. D'autre part, le problème de Cauchy pour cette équation admet au plus une solution du type normal, si A_i est un opérateur fermé et si son spectre ponctuel n'est pas dense dans un demi-plan λ, défini par $\operatorname{Re} \lambda \geqslant \lambda_0^{(i)}$, (voir [3] p. 619). On peut donc énoncer le

Théorème I. Si

a) les opérateurs A_i sont fermés,

b) le spectre ponctuel de chaque opérateur A_i n'est pas dense dans un demi-plan $\operatorname{Re} \lambda \geqslant \lambda_0^{(i)}$, alors pour tout $u_0 \in \mathscr{B}$ le problème P admet au plus une solution du type $\lambda_0 = (\lambda_0^{(1)}, \ldots, \lambda_0^{(n)})$.

On peut alors démontrer, comme dans le cas d'une seule variable, le

Théorème II. Si les opérateurs A_i sont fermés, la condition nécessaire et suffisante pour que le problème P admette une Z-solution d'un type qui ne dépasse pas ω est que le système

$$A_i u = \lambda^{(i)} u \tag{4}$$

admette une solution $u(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots) \neq \theta$ bornée et holomorphe dans tout demi-plan $\operatorname{Re} \lambda^{(i)} \geqslant \omega_i + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

La démonstration est identique à celle d'un théorème analogue dans [3].

Théorème III. Si les opérateurs A_i sont bornés et permutables sur $\bigcap_{i=1}^{n} R(A_i) \frown D$, le problème P admet une solution unique du type $\omega = (\omega_i) = (\|A_i\|)$:

$$u(x_i; y_0) = e^{\sum_{i=1}^{n} x_i A_i} u_0, \quad x_i \geqslant 0, \tag{5}$$

c'est-à-dire:

$$u(x_i;\, u_0) = \left\{ E + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n} x_i A_i + \frac{1}{2!}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i A_i\right)^2 + \ldots \right) u_0.$$

Démonstration.

a) En effet, on a:

$$\|u(x_i;\, u_0)\| \leqslant \left(1 + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n} x_i\|A_i\| + \frac{1}{2!}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\|A_i\|\right)^2 + \ldots\right)\|u_0\| \leqslant e^{\Sigma x_i\|A_i\|}u_0,$$

d'où

$$\log\|u\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i\|A_i\| + \log\|u_0\|;$$

et il s'ensuit que

$$\limsup_{x_i\to\infty} \frac{1}{x_i}\log\|u\| \leqslant \|A_i\|.$$

b) On a encore:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i\left(1 + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n} x_i A_i + \ldots\right) u_0 = A_i u_0.$$

c) Enfin, la solution (5) est l'unique solution du type normal, puisque

$$\|A_i u - \lambda u\| \geqslant (|\lambda| - \|A_i\|)\|u\|,$$

et, si on prend $\lambda > \|A_i\|$, l'équation:

$$A_i u - \lambda u = 0$$

n'a pas de solution non nulle; donc le spectre de A_i n'est pas dense dans un demi-plan $\mathrm{Re}\,\lambda > \|A\;\|$. Du théorème II, il résulte que le système n'admet pas de Z-solution du type normal, et par suite que la solution (5) est unique.

§ 3. En ce qui concerne la relation entre ce problème et la théorie des semigroupes à n paramètres, rappelons la définition de ces semigroupes ([2] pag. 334).

Si E^n est un espace vectoriel à n dimensions et Y est un espace de Banach, $\mathscr{E}(Y)$ l'ensemble des transformations linéaires, bornées de Y en lui-même et $T(x)\in\mathscr{E}(Y)$ est une transformation qui dépend d'un paramètre vectoriel $x\in E_n$, alors l'ensemble des transformations $T(x)$ est un semigroupe si:

1. $T(x)$ est définie pour chaque $x\in E_+^n$, où E_+^n désigne le domaine $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$, à l'exception de l'origine, à valeurs dans $\mathscr{E}(Y)$;

2. Pour $x_1, x_2 \in E_+^n$, $u \in Y$, on a: $T(x_1+x_2)u = T(x_1)\ [T(x_2)u]$;

3. Pour tout $u \in Y$ la fonction $x \to T(x)u$, à valeurs dans Y, est fortement mesurable sur E_+^n.

4. Il existe une constante positive M telle que $\|T(\xi u_k)\| \leqslant M$, pour $k = 1, 2, \ldots, n$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, u_k étant les vecteurs unités des axes;

5. Pour tout $x \in E_+^n$ l'ensemble $\bigcup_{\alpha>0} R(T(\alpha x))$ est dense dans Y.

Or, on peut alors démontrer le

Théorème IV. Si les A_i sont les générateurs infinitésimaux d'un semigroupe, le problème P admet une solution unique pour chaque $u_0 \in D$.

L'existence d'une solution résulte de la relation générale ([2] p. 332)

$$\frac{d}{d\xi}[T(\xi x)u_0] = A_0(x)[T(\xi x)u_0],$$

où

$$A_0(x)u = \lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\eta}[T(\eta x) - I]u.$$

En effet, on a:

$$\frac{T(\xi' x) - T(\xi x)}{\xi' - \xi}u_0 = \frac{T[(\xi' - \xi)x] - I}{\xi' - \xi}T(\xi x)u_0,$$

d'où, en prenant $\xi = (1, 1, \ldots, 1)$, $\xi' = (1, 1, 1+h, 1, \ldots, 1)$, en tenant compte du fait que $T(x)$ est bornée et passant ensuite à la limite pour $h \to 0$, on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[T(x)u_0] = A_0(u_i)T(x)u_0 = A_iT(x)u_0.$$

On a encore

$$\lim_{x\to 0} T(x)u_0 = u_0,$$

puisque $T(x)$ tend fortement vers l'identité quand $x \to 0$.

Démontrons enfin que la solution est unique. En effet, s'il y avait deux solutions y_1, y_2, il existerait aussi une Z-solution $z = y_1 - y_2$; pour cette solution on a:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\Big\{T(x_1, x_2, \ldots, x_i - \xi, \ldots, x_n)z(x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

$$= T(x_1, x_2, \ldots, x_i - \xi, \ldots, x_n)\left[\frac{\partial z}{\partial\xi} - A_i z\right]\Big\} = 0.$$

En intégrant par rapport à ξ, entre a et β, $0 \leqslant a < \beta \leqslant x_i$, on obtient:

$$T(x_1, \ldots, x_i - \beta, \ldots, x_n) z(x_1, \ldots, \beta, \ldots, x_n)$$
$$= T(x_1, \ldots, x_i - a, \ldots, x_n) z(x_1, \ldots, a, \ldots, x_n).$$

Prenant d'abord $i = 1$, $x_2 = \ldots = x_n = 0$, et faisant $a = 0$, et $x_1 = \beta$, on a: $z(x_1, 0, \ldots, 0) = \theta$.
Prenant ensuite $x_1 \neq 0$, $x_3 = \ldots = x_n = 0$, $i = 2$ et faisant $a = 0$, et $x_2 = \beta$, on obtient: $z(x_1, x_2, 0, \ldots, 0) = \theta$.
En procédant de même pour $i = 3, \ldots, i = n$, on obtient

$$z(x_1, \ldots, x_n) = \theta,$$

et nous avons ainsi démontré le théorème énoncé.

On peut démontrer maintenant un théorème analogue à un théorème de R. S. Phillips [5].

Théorème V. Si

a) $A_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ sont n opérateurs linéaires fermés, définis sur un domaine D dense et ayant des ensembles résolvants non vides,

b) pour chaque $u_0 \in D$ le problème P a une solution unique, alors A_i sont les générateurs d'un semigroupe $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) u_0 = u(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_0).$$

Pour établir ce résultat, nous démontrerons d'abord le lemme suivant:

Lemme. Si A_i sont n opérateurs linéaires fermés et si pour chaque $u_0 \in D$ le problème P admet une solution unique, alors pour chaque $x \in E_+^n$, il existe une constante C_x telle que:

$$\|u(x; u_0)\| + \sum_1^n \|A_i u(x; u_0)\| \leqslant C_x \Big(\|u_0\| + \sum_1^n \|A_i u_0\|\Big).$$

La démonstration est analogue à celle donnée par R. S. Phillips, dans la Note citée: On introduit dans D la norme $\|u\|' = \|u\| + \sum_1^n \|A_i u\|$, et on désigne par D' l'espace ainsi normé. Comme les A_i sont fermés, D' est un espace de Banach. On considère encore les fonctions fortement continues sur E_+^n à valeurs dans D' telles que

$$\sum_{i=1}^n \Big(\int_0^1 \|u(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)\|' dx_i\Big) < +\infty.$$

Soit $\mathscr{E}'$ l'ensemble de ces fonctions. Introduisons dans cet ensemble la métrique

$$\varrho(u, v) = \sum_{0}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|u-v\|_n}{1+\|u-v\|_n},$$

où

$$\|u\|_0 = \sum_{i=1}^{n}\Big(\int_0^1 \|u(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)\|' dx_i\Big) \quad \text{et} \quad \|u\| = \sup_{\frac{1}{n}<\|x\|<n} \|u(x)\|'$$

pour $n = 1, 2, \dots$, où $\|x\| = \big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\big)^{\frac{1}{2}}$. Il est évident que $\mathscr{E}'$ est un espace métrique complet. Soit maintenant S la transformation qui fait correspondre à $u_0 \in D'$ la solution du problème P, c'est-ádire $u(x; u_0)$. L'unicité entraîne la linéarité de S sur D'; S est une transformation fermée. En effet, soit $\{u_n\}$ une suite d'éléments de l'espace D' telle que $u_n \to u_0 \in D'$ et $S(u_n) \to v \in \mathscr{E}'$.

On a

$$\frac{\partial u(x; u_n)}{\partial x_i} = A_i u(x; u_n).$$

Le second membre de cette égalité tend uniformément vers $A_i v$ dans chaque ensemble fermé contenu dans E_+^n puisque $u(x; u) = S(u_n)$ tend vers v, et d'autre part, puisque $A_i v$ existe, A_i étant férmé et $\mathscr{E}'$ complet. Il résulte encore que

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\int_0^1 \Big\|\frac{\partial}{\partial x_i} u(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0; u_n) - A_i v(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)\Big\|' dx_i\Big) \to 0$$

avec $n \to \infty$.

Si l'on pose:

$$(6) \qquad u(x_1, 0, \dots, 0, u_n) = u_n^{(1)};\ u(x_1, x_2, 0, \dots, 0, u_n^{(1)}) = u_n^{(2)}, \dots,$$
$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0, u_n^{n-2}) = u_n^{n-1},$$

de l'égalité:

$$u(x; u_n) =$$
$$= u_n + \int_0^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, 0, 0, \dots, 0; u_n)\, dx^1 + \dots + \int_0^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, x_2 \dots x_n, u_n^{n-1})\, dx^n,$$

on déduit comme conséquence, en répétant plusieurs fois le raisonnement de R. S. Phillips

$$v(x) = u_0 + \int_0^{x_i} A_1 v(x_1, 0, \dots, 0)\, dx + \dots + \int_0^{x_n} A_n v(x_1, \dots x_n)\, dx,$$

ce qui signifie que v est une solution correspondant à u_0. De l'hypotèse d'unicité, on tire $v(x) = u(x; u_0)$, c'est-à-dire S est fermé.

Du théorème du graphe fermé on déduit que S' est continue. La continuité à l'origine implique l'existence d'une constante C_n telle que

$$\|u(x; u_0)\|_n \leqslant C_n \|u_0\|',$$

$\|u_0\|$ étant suffisamment petit; et comme les deux membres sont homogènes en u_0, il résulte que cette relation est vraie pour chaque $u_0 \epsilon D'$.

Passons maintenant à la démonstration du théorème énoncé.

Définissons l'opérateur $T(x)$ sur D', à valeurs dans lui-même, pour $x \epsilon E_+^n$, par l'égalité:

$$T(x) u_0 = u(x; u_0).$$

L'hypothèse d'unicité conduit à la linéarité de $T(x)$ sur D', le lemme énoncé plus haut implique que $T(x)$ est borné et des conditions 1 et 2 du problème P on déduit la continuité de $T(x)$ sur D' (comme fonction de x), dans la topologie forte des opérateurs.

La linéarité conduit encore à

$$u(x_1 + x_2; u_0) = u\big(x_1; u(x_2; u_0)\big) \qquad x_1, x_2 \epsilon E_+^n, u_0 \epsilon D,$$

c'est-à-dire à $T(x' + x'') = T(x') T(x'')$.

Toujours à cause de l'unicité on constate, en utilisant le théorème 3.1 de R. S. Phillips [5], que pour $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ on a

$$T(x_1, 0, \ldots, 0) = T_1(x_1),$$

où $T_1(x_1)$ est le semigroupe engendré par A_1, que

$$T(0, x_2, 0, \ldots, 0) = T_2(x_2)$$

est le semigroupe engendré par A_2, etc., et enfin que

$$T(x) = T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = T_n(x_n) T_{n-1}(x_{n-1}) \ldots T_1(x_1);$$

en tenant compte des propriétés de $T_i(x_i)$, cela achève la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Heyn, E., Die Differentialgleichung $dT/dt = P(t)\,T$ für Operatorfunktionen, Math. Nachrichten, Bd. 24 (1962) p. 281.

[2] Hille, E., A note on Cauchy's problem, Ann. de la Soc. Polonaise de Math., vol. 25 (1952) p. 56.

[3] Hille, E., Functional Analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc., 1957.

[4] Kato, T., On linear differential equations in Banach Spaces, Transactions of the Symposium on partial differential equations, University of California, 1955 p. 181.

[5] Phillips, R. S., A note on the abstract Cauchy problem, Proc. Nat. Acad. of Sci., vol. 40 (1954) p. 244.

Streszczenie

Zakładamy, że występujące w równaniu (1) operatory liniowe A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, niezależne od x_i są określone we wspólnym obszarze D zawartym w przestrzeni $\mathscr{B}$ Banacha i zbiory ich wartości $R(A_i) \subset \mathscr{B}$. Problem P polega na poszukiwaniu rozwiązania $u(x) = u(x_1, x_2, \ldots x_n)$ równania (1), określonego w obszarze $E_+^n = \{x: x_i \geqslant 0,\ x \neq 0\}$, przyjmującego dla każdego $x \in E_+^n$ wartość $u(x) \in D$, będącego funkcją mocno absolutnie ciągłą i mającą pochodne cząstkowe ciągłe w każdym skończonym n-wymiarowym przedziale zawartym w E_+^n, a przy tym spełniającego warunek (2) gdzie $u_0 \in \mathscr{B}$. Zgodnie z terminologią E. Hille'a [2] nazywamy niezerowe rozwiązanie równania (1), odpowiadające elementowi zerowemu $u_0 = \theta \in \mathscr{B}$, Z-rozwiązaniem, a normalnym typu $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — rozwiązanie $u(x)$ spełniające dla dowolnych $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ warunek (3).

Twierdzenie 1. Jeżeli operatory A_i są domknięte a spektrum żadnego z nich nie jest gęste w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \lambda_0^{(i)}$, to dla każdego $u_0 \in \mathscr{B}$ problem P ma rozwiązanie normalne typu $\lambda_0 = (\lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)}, \ldots, \lambda_0^{(n)})$.

Twierdzenie 2. Jeśli A_i są domknięte, to warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia Z-rozwiązania typu nie przekraczającego ω jest, by równanie (4) miało rozwiązanie $u(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots) \not\equiv 0$ holomorficzne i ograniczone w każdej półpłaszczyźnie $\operatorname{Re}\lambda^{(i)} \geqslant \omega_i + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Twierdzenie 3. Jeżeli operatory A_i są ograniczone i przemienne na zbiorze $\bigcap_{i=1}^{n} R(A_i) \cap D$, to problem P ma dokładnie jedno rozwiązanie typu $\omega = (\omega_i) = (\|A_i\|)$, dane wzorem (5).

Twierdzenie 4. Jeżeli operatory A_i są generatorami półgrupy, to problem P ma dokładnie jedno rozwiązanie dla każdego $u_0 \in D$.

Twierdzenie 5. Jeżeli operatory A_i są domknięte, określone na zbiorze gęstym D i mają niepuste resolwenty, oraz jeśli dla każdego $u_0 \in D$ problem P ma dokładnie jedno rozwiązanie, wówczas A_i są generatorami półgrupy $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ takiej, że $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)u_0 = u(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_0)$.

Резюме

Полагаем, что выступающие в уравнении (1) линейные операторы $A_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ независимые от x_i определены в общей области D, заключённой в пространстве $\mathscr{B}$ Банаха, а множества их значений $R(A_i) \subset \mathscr{B}$. Проблема P состоит в отыскании решения $u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ уравнения (1), определённого в области $E_+^n = \{x: x_i \geqslant 0,\ x \neq 0\}$, принимающего для каждого $x \in E_+^n$ значение $u(x) \in D$, явля-

ющееся функцией сильно абсолютно непрерывной и имеющей частные производные непрерывные во всякам конечном n — мерном интервале, заключённой в E^n_+, а при том исполняющего условие (2), где $u_0 \epsilon \mathscr{B}$. Согласно с терминологией Е. Гилля [2] называем не-нулевое решение уравнения (1), отвечающее нулевому элементу $u_0 = \theta \epsilon \mathscr{B}$, Z — решением; а решением нормальным типа $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ — решение $u(x)$, испалящее условие (3) при произвольных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$.

Теорема 1. Если операторы A_i домкнуты, а спектр никакого из них не густ в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \lambda^{(1)}$, то для всякого $u_0 \epsilon \mathscr{B}$ проблема P имеет нормальное решение типа $\lambda_0 = (\lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)}, \ldots, \lambda_0^{(n)})$.

Теорема 2. Если A_i домкнуты, то необходимым и достаточным условием существования Z — решения, не превышающего ω, является условие, чтобы уравнение (4) имело решение $u(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots) \not\equiv 0$ голоморфное и ограниченное в каждой полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda^{(i)} > \omega_i + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Теорема 3. Если операторы A_i ограничены и переменны на множестве $\bigcap_{i=1}^{n} R(A_i) \frown D$, то проблема P имеет точно одно решение типа $\omega = (\omega_i) = (\|A_i\|)$ данное формулой (5).

Теорема 4. Если операторы A_i суть генераторы полугруппа, то проблема P имеет одно решение для каждого $u_0 \epsilon D$.

Теорема 5. Если операторы A_i домкнуты, определены на густом множестве D и имеют непустые ресольвенты, а также если для всякого $u_0 \epsilon D$ проблема P имеет точно одно решение, тогда A_i суть генераторы полугруппы $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такой, что $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) u_0 = u(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_0)$.

ANNALES

UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA

VOL. XV SECTIO A 1961

ANNALES

UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA

VOL. XVI SECTIO A 1962