ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA

VOL. XVII, 13 SECTIO A 1963

Z Zespołowej Katedry Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

KONSTANTY RADZISZEWSKI

Sur les relations entre les plans osculateurs orientés

O zależnościach między płaszczyznami ściśle stycznymi zorientowanymi

Об отношениях между ориентируемыми соприкасающимися плоскостями

Introduction

Dans le travail [1] Van der Waag a donné huit définitions non équivalentes des plans osculateurs d'une courbe donnée $\bar{r} = \bar{r}(t)$ dans l'espace euclidien à trois dimensions.

Dans le travail [2] j'ai établi les conditions d'équivalence de ces définitions. J'y ai démontré que si une courbe admet un vecteur tangent continu et un plan osculateur orienté continu l'un des types I—VIII, elle admet un plan osculateur orienté de tous les autres types I—VIII. J'ai introduit dans ce travail la notion de l'orientation d'un plan osculateur qui joue un rôle analogue à celui de la condition $|\bar{r}' \times \bar{r}''| \neq 0$ dans la théorie classique des courbes.

A. Żmurek a prouvé dans le travail [3] que dans l'énoncé du théorème du travail [2] l'existence d'un plan osculateur orienté continu est nécessaire pour l'équivalence de toutes les définitions I—VIII.

Dans le travail présent j'étudie les relations entre les plans osculateurs orientés des différents types I—VIII.

Notations et définitions

J'utiliserai dans la suite les notations suivantes:

$\langle A*B\rangle$ arc fermé de courbe orienté, d'origine A et d'extrémité B;
$(A*B)$ arc ouvert de courbe orienté, d'origine A et d'extrémité B,
AB droite passant par A et B;
$\langle AB\rangle$ segment de droite fermé d'extrémités A et B;
(AB) segment de droite ouvert d'éxtrémités A et B;

$[AB]$	longueur du segment $\langle AB\rangle$;
$\overline{AB}$	vecteur d'origine A et d'éxtrémité B;
$\sphericalangle(ABC)$	angle des vecteurs $\overline{BA}$ et $\overline{BC}$, $\sphericalangle(ABC)\leqslant\pi$;
$\sphericalangle(\bar{l},\bar{m})$	angle des vecteurs $\bar{l}$ et $\bar{m}$, $\sphericalangle(\bar{l},\bar{m})\leqslant\pi$;
$\sphericalangle(t,m)$	angle des droites t et m, $\sphericalangle(t,m)\leqslant\pi$
$\sphericalangle(\alpha,\beta)$	angle des plans α et β, $\sphericalangle(\alpha,\beta)\leqslant\pi/2$;
(ABC)	plan passant par les points A,B,C;
(A,m)	plan passant par le point A et la droite m;
(t,m)	plan parallèle aux droites t et m;
$(\bar{l},\bar{m})$	plan parallèle aux vecteurs $\bar{l}$ et $\bar{m}$.

Nous dirons que le vecteur $\bar{l}$ est situé d'un côté déterminé du plan α, si, l'origine du vecteur $\bar{l}$ étant placée dans le plan α, son extrémité se trouve de ce côté du plan α ou dans ce plan.

Nous appellerons vecteur paratingent de la courbe $\langle A*B\rangle$ au point M le vecteur $\bar{l}(M)=\lim\limits_{P',P''\to M}\overline{P'P''}/|\overline{P'P''}|$, $P',P''\in\langle A*B\rangle$, $P''\in(P'*B\rangle$, pour certaines suites de points P',P'' telles que la suite $\overline{P'P''}/|\overline{P'P''}|$ est convergente.

La droite passant par le point M et parallèle au vecteur $\bar{l}(M)$ sera désignée par $l(M)$.

Dans le cas où au point M il existe un seul vecteur paratingent $\bar{l}(M)$, nous l'appellerons tangent au sens strict. Si, au contraire, il n'existe qu'un seul vecteur $\bar{l}(M)$ sous l'hypothèse $P'=M$ ou $P''=M$, nous l'appellerons tangent.

Si $P',P''\in\langle M*B\rangle$, $(P',P''\in\langle A*M\rangle)$, le vecteur paratingent sera dit droit, (gauche), et désigné par $\bar{l}^{+}(M)$, $(\bar{l}^{-}(M))$.

Une courbe $\langle M*B\rangle$ admettant au point M un vecteur tangent $\bar{l}^{+}(M)$ au sens strict est rectifiable dans un voisinage du point M et $\lim\limits_{P\to M}\bar{l}(P)=$ $=\bar{l}^{+}(M)$, où $\bar{l}(P)$ est un vecteur paratingent quelconque de la courbe $\langle M*B\rangle$ au point P, [5], p. 101.

Nous dirons que la courbe $\langle A*B\rangle$ admet au point $M\in\langle A*B\rangle$ un plan osculateur orienté de l'un types ci-dessous s'il existe au point M un vecteur unique

I. $\quad \bar{N}_{\mathrm{I}}=\lim\limits_{P\to M}\bar{l}(M)\times\overline{MP}/|\bar{l}(M)\times\overline{MP}|,$

II. $\quad \bar{N}_{\mathrm{II}}=\lim\limits_{P',P''\to M}\overline{P'M}\times\overline{MP''}/|\overline{P'M}\times\overline{MP''}|,$

$$\text{où } P'\in\langle A*M),\ P''\in(M*B\rangle,$$

III $\quad \bar{N}_{\mathrm{III}}=\lim\limits_{P\to M}\varepsilon\bar{l}(M)\times\bar{l}(P)/|\bar{l}(M)\times\bar{l}(P)|,$

$$\text{où } \varepsilon=\begin{vmatrix} 1 & \text{pour} & P\in(M*B\rangle \\ -1 & ,, & P\in\langle A*M) \end{vmatrix}$$

IV $\overline{N}_{IV} = \lim_{P',P''\to M} \varepsilon \overline{MP'} \times \overline{P'P''} / |\overline{MP'} \times \overline{P'P''}|$, où $P' \epsilon \langle A * P'' \rangle$, $\varepsilon = -1$ pour $P' \epsilon \langle A * M \rangle$, $P'' \epsilon (M * B \rangle$, et $\varepsilon = 1$ dans les autres cas,

V. $\overline{N}_{V} = \lim_{P\to M} \overline{MP} \times \bar{t}(P) / |\overline{MP} \times \bar{t}(P)|$,

VI. $\overline{N}_{VI} = \lim_{P',P'',P'''\to M} \overline{P'P''} \times \overline{P''P'''} / |\overline{P'P''} \times \overline{P''P'''}|$,

où $\langle A * P' \rangle \subset \langle A * P'' \rangle \subset \langle A * P''' \rangle$,

VII. $\overline{N}_{VII} = \lim_{P',P''\to M} \overline{P'P''} \times \bar{t}(P'') / |\overline{P'P''} \times \bar{t}(P'')|$,

VIII. $\overline{N}_{VIII} = \lim_{P',P''\to M} \bar{t}(P') \times \bar{t}(P'') / |\bar{t}(P') \times \bar{t}(P'')|$, où $P' \epsilon \langle A * P'' \rangle$,

où les points P, P', P'', P''' tendent vers le point M en passant par les points où les vecteurs figurant aux seconds membres de ces égalités ont un sens, et $\bar{t}(X)$ désigne un vecteur paratingent quelconque de la courbe $\langle A * B \rangle$ au point X.

Nous dirons qu'au point M de la courbe $\langle A * B \rangle$ il existe un plan osculateur d'un des types I—VIII si les seconds membres des égalités I—VIII sont respectivement égaux à $\overline{N}_{I} - \overline{N}_{VIII}$ ou $(-\overline{N}_{I}) - (-\overline{N}_{VIII})$.

Les plans osculateurs des types I—VIII seront désignés respectivement $\alpha_{I} - \alpha_{VIII}$ et les plans osculateurs orientés correspondants seront notés $\bar{\alpha}_{I} - \bar{\alpha}_{VIII}$.

Les symboles $\{P, Q, R\}$, $\{P, \bar{t}(Q)\}$, $\{\bar{t}(P), \bar{t}(Q)\}$ désigneront les plans (P, Q, R), $(p, \bar{t}(Q))$, $(\bar{t}(P), \bar{t}(Q))$ munis respectivement des vecteurs $\overline{PQ} \times \overline{QR} / |\overline{PQ} \times \overline{QR}|$, $\overline{PQ} \times \bar{t}(Q) / |\overline{PQ} \times \bar{t}(Q)|$, $\bar{t}(P) \times \bar{t}(Q) / |\bar{t}(P) \times \bar{t}(Q)|$.

Relations entre les plans osculateurs orientés

1. I—II.

a) **Lemme 1.** **Si une courbe $\langle A * B \rangle$ admet au point $M \epsilon (A * B)$ un plan osculateur orienté du type I, alors elle admet aussi un plan osculateur orienté du type II.**

Démonstration. Supposons qu'il existe au point M un plan osculateur orienté du type I. Soit $P' \epsilon (A * M)$, $P'' \epsilon (M * B)$. Par hypothèse $\lim \overline{P'M} \times \bar{t}(M) / |\overline{P'M} \times \bar{t}(M)| = \lim \bar{t}(M) \times \overline{MP''} / |\bar{t}(M) \times \overline{MP''}| = \overline{N}_{I}$. Si les origines des vecteurs $\overline{P'M} / |\overline{P'M}|$, $\overline{MP''} / |\overline{MP''}|$ et $\bar{t}(M)$ se trouvent au centre d'une sphère-unité, leurs extrémités sont les sommets d'un triangle sphérique, dont l'angle au sommet correspondant à l'extrémité du vecteur $\bar{t}(M)$ tend vers π, et par suite le plan $\{\overline{P'M}, \overline{MP''}\}$ tend vers la même limite que le plan $\{\bar{t}(M), \overline{MP''}\}$.

b) En vertu de [6], Th. I, II, l'existence de $\bar{\alpha}_{II}$ n'entraîne pas l'existence de $\bar{\alpha}_{I}$.

2. I—III.

a) **Lemme 2.** Si une courbe $\langle A{*}B\rangle$ admet au point $M\in\langle A{*}B\rangle$ un plan osculateur orienté du type III, alors elle admet aussi un plan osculateur orienté du type I.

Démonstration. En vertu de [6] la courbe $\langle A{*}B\rangle$ admet au point M des vecteurs tangents unilatéraux au sens strict $\bar{t}^-(M)$ et $\bar{t}^+(M)$, et $\bar{t}^-(M)\neq -\bar{t}^+(M)$.

Supposons que l'existence de $\bar{\alpha}_{\mathrm{III}}$ n'entraîne pas celle α_{I}: Alors, d'après [4], p. 116, dans le voisinage du point M la courbe $\langle A{*}B\rangle$ rencontre une infinité de fois les deux plans σ_1 et σ_2 qui passent par $t^+(M)$. Comme $\bar{\alpha}_{\mathrm{III}}$ existe, la courbe $\langle M{*}B\rangle$ n'a avec le plan β, passant par $t^+(M)$ et perpendiculaire à α_{III} d'autres points communs que M. (Sinon, il existerait dans le voisinage du point M des vecteurs paratingents situés de part et d'autre du plan β. La démonstration est presque identique à celle du § 3.a).

Soit σ_i^+ le demi-plan du plan σ_i qui a $t^+(M)$ pour arête et qui est situé du même côté du plan β qu'un voisinage $U(M)\subset(M{*}B\rangle$ du point M. Nous appellerons côté positif du plan σ_j celui qui ne contient pas le demi--plan σ_i^+, $i\neq j$, $i,j=1,2$. Alors, comme la courbe $(M{*}B\rangle$ coupe σ_1^+ et σ_2^+ en une infinité de points, il existe sur $(M{*}B\rangle$ des points X_n^1 et X_n^2, situés des côtés positifs des plans σ_1 et σ_2 et tels que $\bar{t}(X_n^1)$ et $\bar{t}(X_n^2)$ sont aussi des côtés positifs des plans σ_1 et σ_2 respectivement. (La démonstration est presque identique à celle du § 3.a). En outre, les vecteurs $\bar{t}(X_n^1)$ et $\bar{t}(X_n^2)$ sont d'un même côté du plan. Les plans $\{\bar{t}(M),\bar{t}(X_n^1)\}$ et $\{\bar{t}(M),\bar{t}(X_n^2)\}$ auraient donc les limites différentes. La contradiction ainsi obtenue prouve que $\alpha_{\mathrm{I}}=\alpha_{\mathrm{III}}$.

Le fait que le plan α_{I} peut être orienté résulte immédiatement de ce que $U(M)$ est situé d'un côté du plan β.

b) Ainsi que A. Żmurek l'a prouvé dans le travail [3], l'existence d'un plan osculateur orienté du type I n'entraîne pas celle d'un plan osculateur du type III, même pour les courbes qui admettent un vecteur tangent continu.

3. IV—V.

a) **Lemme 3.** Si la courbe $\langle M{*}B\rangle$ admet au point M un vecteur tangent au sens strict, l'existence de $\bar{\alpha}_{\mathrm{V}}(M)$ entraîne celle de $\bar{\alpha}_{\mathrm{IV}}(M)$.

Démonstration. Soit $\bar{\alpha}_{\mathrm{V}}(M)$ un plan osculateur orienté du type V de la courbe $\langle M{*}B\rangle$ au point M. Le plan $\bar{\alpha}_{\mathrm{V}}$ est orienté, c'est-à-dire il existe $\lim \overline{MP}\times\bar{t}(P)/|\overline{MP}\times\bar{t}(P)=\bar{N}_{\mathrm{V}}$, $P\in(M{*}B)$, où $\bar{N}_{\mathrm{V}}$ est le vecteur normal du plan α_{V} et $\bar{t}(P)$ un vecteur paratingent quelconque fixé de la courbe $(M{*}B)$ au point P.

Supposons qu'un plan osculateur du type IV de la courbe $\langle M*B\rangle$ au point M n'existe pas ou qu'il soit différent de α_V. Alors il existe une suite de points $P'_n, P''_n \in (M*B), P'_n \in (M*P''_n)$, telle que le plan (M, P'_n, P''_n) est déterminé et tend vers le plan $\alpha' \neq \alpha_V$.

Sur l'arc $\langle P'_n*P''_n\rangle$ il existe un couple de points $Q'_n, Q''_n \subset (M, P'_n, P''_n)$, $Q'_n \in \langle P'_n*Q''_n)$ tel que l'arc $(Q'_n*Q''_n)$ n'a avec le plan (M, P'_n, P''_n) aucun point en commun. De tels points existent, car s'il y avait sur l'arc $(P'_n*P''_n)$ un ensemble dense de points communs avec le plan (M, P'_n, P''_n), alors, par continuité, l'arc $(P'_n*P''_n)$ tout entier serait contenu dans le plan (M, P'_n, P''_n) et le plan α_V se confondrait avec le plan α'. Le côté du plan (M, P'_n, P''_n) qui contient l'arc $(Q'_n*Q''_n)$ sera appelé droit.

Soit $t^+(M)$ un vecteur tangent à droite de la courbe $\langle M*B\rangle$ au point M. Par le point M menons dans le plan (M, P'_n, P''_n) une droite l perpendiculaire au vecteur $t^+(M)$. La courbe $(M*B)$ ne coupe pas la droite l dans un voisinage du point M. Par la droite l menons un plan $\gamma(Y)$ passant par le point $Y \in (Q'_n*Q''_n)$. Le point Y sera choisi suffisamment près du point Q''_n, pour que $\gamma(Y)$ tend vers lorsque $P''_n \to M$. Désignons par X le second point d'intersection de l'arc $(Q'_n*Q''_n)$ avec le plan $\gamma(Y)$. Le côté droit du plan (M, P'_n, P''_n) déterminera par continuité le côté droit du plan $\gamma(Y)$. Pour tout $Z \in (Q'_n*Q''_n)$ les vecteurs $\bar{t}(Z)$ sont situés d'un même côté du plan $\gamma(Z)$, sinon les plans $\{M, \bar{t}(Z)\}$ tendraient vers des limites différentes. Supposons, pour fixer les idées, que les vecteurs $\bar{t}(Z)$ soient situés du côté droit du plan $\gamma(Z)$.

Il existe une infinité de points $Y \in (Q'_n*Q''_n)$ en lesquels la courbe $(Q'_n*Q''_n)$ passe du côté droit au côté gauche du plan $\gamma(Y)$. Soit Y_0 l'un d'eux. Par la droite l nous menons le plan $\gamma(Y_1^1)$ bissecteur de l'angle des plans $\gamma(Y_0)$ et (M, P'_n, P''_n). Sur l'arc $(Y_0*Q''_n)$ il existe un point Y_1^1 tel que la courbe $(Y_0*Q''_n)$ y passe du côté droit au côté gauche du plan $\gamma(Y_1^1)$. Nous obtenons sur (Y_0*Q_n) les points $Y_0^1 = Y_0, Y_1^1, Y_2^1 = Q''_n$. De façon analogue, l'arc $(Y_0^1*Y_1^1)$ passera au point Y_1^2 du côté droit au côté gauche du plan $\gamma(Y_1^2)$, bissecteur de l'angle des plans $\gamma(Y_0^1)$, et $\gamma(Y_1^1)$ l'arc $(Y_1^1*Y_2^1)$ passera au point Y_3^2 du côté droit au côté gauche du plan $\gamma(Y_3^2)$, bissecteur de l'angle des plans $\gamma(Y_1^1)$ et $\gamma(Y_2^1)$. Nous obtenons ainsi les points $Y_0^2 = Y_0^1$, Y_1^2, $Y_2^2 = Y_1^1$, Y_3^2, $Y_4^2, = Y_2^1$. Répétant cette opération, nous obtiendrons, en joignant les points Y_i^k et Y_{i+1}^k une ligne brisée inscrite dans $\langle Y_0*Q''_n\rangle$ formée de 2^k segments.

Nous allons trouver une limitation inférieure des longueurs de ces lignes brisées. Par le point Y_{i+1}^k menons une droite $Y_{i+1}^k Z_i^k$ perpendiculaire au plan $\gamma(Y_i^k)$. Soit Z_i^k le point d'intersection de la droite $Y_{i+1}^k Z_i^k$ avec le plan $\gamma(Y_i^k)$. Posons $\alpha_i^k = \sphericalangle(Z_i^k, Y_i^k, Y_{i+1}^k)$. Alors $[Y_i^k Y_{i+1}^k] = [Y_{i+1}^k Z_i^k] : \sin \alpha_i^k$ et

$$(1) \quad \sum_i [Y_i^k Y_{i+1}^k] = \sum_i [Y_{i+1}^k Z_i^k] : \sin \alpha_i^k \geqslant \Big(\sum_i [Y_{j+1}^k Z_i^k]\Big) : \max_i \sin \alpha_i^k .$$

Nous allons prouver que $\max_i \alpha_i^k \to 0$, lorsque $k \to \infty$. Supposons le contraire. Alors il existe une suite de points $Y_{i'}^{k'}$ telle que $\alpha_{i'}^{k'} \geqslant \varepsilon > 0$. De la suite $Y_{i'}^{k'}$ on peut tirer une suite partielle convergente, que nous noterons $Y_{i'}^{k'} \to Y'$. Au point $Y' \epsilon \langle Y_0 * Q_n'' \rangle$ l'angle $\sphericalangle[\bar{t}(Y'), \gamma(Y')] \geqslant \varepsilon$, où $\bar{t}(Y') = \lim \overline{Y_{i'}^{k'} Y_{i'+1}^{k'}} / |Y_{i'}^{k'} Y_{i'+1}^{k'}|$ pour une suite partielle convergente. Le vecteur $\bar{t}(Y')$ sera situé du côté gauche du plan $\gamma(Y')$. Mais, si $Y_{i'+1}^{k'} \to Y'$, $\bar{t}(Y')$ sera le vecteur paratingent de l'arc $\langle Y_0 * Q_n'' \rangle$ au point Y'. Il y a donc contradiction, car si $\bar{\alpha}_V$ orienté existe, les vecteurs paratingents $t(Y')$ doivent être situés d'un même côté du plan $\gamma(Y')$ dans un voisinage du point M. Si, au contraire, $Y_{i'+1}^{k'}$ ne tend pas vers Y', alors $\alpha_{i'}^{k'} \to 0$, puisque $\sphericalangle[\gamma(Y_{i'}^{k'}), \gamma(Y_{i'+1}^{k'})] \to 0$.

La somme $\sum_i [Y_{i+1}^k, Z_i^k] \geqslant a > 0$ pour l'arc $\langle Q_n' * Q_n'' \rangle$, car il existe un cylindre de révolution de rayon $r > 0$ et d'axe de symétrie l, dont l'intérieur ne contient aucun point de l'arc $\langle Q_n' * Q_n'' \rangle$ (car il existe une tangente unilatéral au point M).

Par conséquent, en désignant la longueur de l'arc $\langle Y_0 * Q_n'' \rangle$ par s, nous tirons de (1)

$$s \geqslant \sum_i [Y_i^k Y_{i+1}^k] \geqslant a : \max \sin \alpha_i^k \to \infty$$

lorsque $k \to \infty$.

Il y a contradiction avec l'hypothèse que la courbe $\langle A * B \rangle$ est rectifiable [5], p. 101 dans le voisinage du point M. Nous avons donc $\alpha_V = \alpha_{IV}$.

Nous allons maintenant prouver que α_{IV} est orienté.

Par la droite $t^+(M)$, tangente à $\langle M * B \rangle$ au point M, menons un plan β perpendiculaire au plan α_V. Supposons que α_{IV} ne soit pas orienté, c'est-à-dire qu'il existe une suite de points P_n', P_n'' telle que la demi-droite MP_n', d'origine en M, fait avec le plan β un angle supérieur à celui de la demi-droite MP_n'' avec le plan β, bien que l'on ait $P_n' \epsilon (M * P_n'')$. Remarquons que la courbe $(M * B)$ ne peut avoir de points communs avec le plan β dans un voisinage du point M, car, en répétant la démonstration précédente, nous arriverions alors à la conclusion que l'arc $\langle M * B \rangle$ n'est pas rectifiable dans un voisinage du point M.

Par la droite MP_n' menons un plan β' perpendiculaire à α_V. Soit $\beta(X)$ le plan passant par la droite MX, $X \epsilon (P_n' * P_n'')$, et perpendiculaire à α_V. Le côté du plan contenant la courbe $(M * P_n')$ sera dit droit et, par continuité, on déterminera ainsi les côtés positifs des plans $\beta(X)$.

Comme dans la partie précédente de la démonstration, les vecteurs paratingents $\bar{t}(X)$ doivent être situés du côté droit du plan $\beta(X)$. En répétant le raisonnement précédent nous aboutirons à une contradiction avec l'hypothèse que la courbe est rectifiable.

Nous avons ainsi démontré l'existence de $\bar{a}_{IV}$:

Lemme 3'. Si la courbe $\langle A*B\rangle$ admet au point M un vecteur tangent au sens strict, l'existence de $\bar{a}_V(M)$ entraîne celle de $\bar{a}_{IV}(M)$.

Démonstration. Dans le cas $P'_n\epsilon(A*M), P''_n\epsilon(M*B)$, on a $\bar{a}_V\to\bar{a}_I\to\to\bar{a}_{II}=\bar{a}_{IV}$.

b) Dans le cas général l'existence de $\bar{a}_V$ n'entraîne pas celle de a_{IV}. En effet, si l'on considère dans le plan xy la courbe

$$x=t\cos\frac{1}{t},\ y=t\sin\frac{1}{t}, x(0)=0, y(0)=0, t\epsilon\langle 0,1\rangle,$$

et si on la déforme aux points d'intersection avec l'axe $0x$, $x>0$, vers l'axe $0z$, mais de façon que $\bar{a}_V$ orienté existe, les plans passant par les points $P'(x,0,z), x>0$, et $P''(x,0,0), x<0$, et $M(0,0,0)$ tendront vers une autre limite que les plans passant par les points M, P'', P''', où $P'''(0,y,0)$.

c) IV entraîne V immédiatement.

4. V—III.

a) **Lemme 4.** Si la courbe $\langle M*B\rangle$ admet au point M un vecteur tangent au sens strict, alors $V\to III$.

Démonstration. Au § 3.a nous avons montré que $V\to I\pm$. En répétant les raisonnements de § 1.a nous obtiendrons la démonstration.

Lemme 4'. Si la courbe $\langle A*B\rangle$ admet au point M un vecteur tangent au sens strict, alors $V\to III$.

b) Comme l'a prouvé A. Żmurek, III n'entraîne pas V, même pour les courbes admettant un vecteur tangent continu.

5. VI—VII—VIII.

Lemme 5. On a VI=VII=VIII.

Démonstration. Nous allons prouver que VIII → VI. Remarquons que si la courbe $\langle A*B\rangle$ admet au point $M\epsilon\langle A*B\rangle$ un plan osculateur orienté du type VIII, on ne peut avoir $\bar{l}(P)=\bar{l}(Q)$, pour $Q\epsilon(P*B\rangle$ dans un voisinage du point M, à condition que l'arc $\langle Q*P\rangle$ ne soit pas un segment de droite. En effet, sur l'arc $\langle P*Q\rangle$ il existe un point X tel que $\bar{l}(X)\neq\bar{l}(P)$, alors $\bar{l}(P)\times\bar{l}(X)$ et $\bar{l}(X)\times\bar{l}(Q)$ ont des sens opposés et le plan $\bar{a}_{VIII}$ n'existe pas. On peut de même prouver que $\bar{l}(P)$ et $\bar{l}(Q)$ ne peuvent être parallèles au plan qui tend vers $a'\neq a_{VIII}$.

Soient maintenant $P', P'', P'''\epsilon\langle A*B\rangle$ des points tendant vers M et tels que $P'\epsilon\langle A*P''), P''\epsilon(P'*P''')$. Sur les arcs $\langle P'*P''\rangle$ et $\langle P''*P'''\rangle$ il y a des points Q' et Q'' tels que les vecteurs paratingents $\bar{l}(Q')$ et $\bar{l}(Q'')$

parallèles au plan (P', P'', P''') existent, donc $\lim(t(Q'), t(Q'')) = \lim(P', P'', P''')$, c'est-à-dire $a_{\mathrm{VI}} = a_{\mathrm{VIII}}$.

Nous allons montrer que a_{VI} est orienté.

Par la droite $P'P''$ menons un plan β' perpendiculaire au plan $(t(P'), t(P''))$, et par la droite $P''P'''$ un plan β'' perpendiculaire au plan $(t(P'), t(P''))$.

Les vecteurs $\bar{t}(P')$ et $\bar{t}(P'')$ ne peuvent pas être situés d'un même côté du plan β', car sur l'arc $(P'{*}P'')$ il y a un point X' tel que le vecteur paratingent $\bar{t}(X')$ parallèle au plan β' existe et les vecteurs $\bar{t}(P')\times\bar{t}(X')/|\bar{t}(P')\times\bar{t}(X')|$, $\bar{t}(X')\times\bar{t}(P'')/|\bar{t}(X')\times\bar{t}(P'')|$ auraient les limites différentes. Appelons positif le côté du plan β' contenant le vecteur $\bar{t}(P'')$. Le même raisonnement peut être fait pour le point P.

Si le point P''' était situé du côté négatif du plan β', l'arc $\langle P''{*}P'''\rangle$ couperait le plan β' au point Y et sur l'arc $\langle P''{*}Y\rangle$ il y aurait un point X'' tel que le vecteur paratingent $\bar{t}(X'')$ parallèle au plan β' (en particulier, il peut arriver que $P'' = X''$). Alors sur l'arc $(X'{*}X'')$ il existerait un vecteur paratingent $\bar{t}(Z)$ non parallèle au plan β' et les vecteurs $\bar{t}(X')\times\bar{t}(Z)/|\bar{t}(X')\times\bar{t}(Z)|$ et $\bar{t}(Z)\times\bar{t}(X'')/|\bar{t}(Z)\times\bar{t}(X'')|$ auraient des limites différentes, et $\bar{a}_{\mathrm{VIII}}$ n'existerait pas.

La contradiction ainsi obtenue achève la démonstration.

VII $\to$ VIII. La démonstration est la même qu'au § 1.a.

VI $\to$ VII.

6. VI $\to$ I, II, III, IV, V.

L'existence de VI entraîne celle de tous les autres plans, mais le réciproque n'est pas vraie, car l'existence d'un plan du type VI en tout point implique la continuité de $\bar{a}_{\mathrm{VI}}$, ce qui ne résulte pas de l'existence des plans des types I–V.

En récapitulant les résultats nous pouvons énoncer les théorèmes suivants:

Théorème 1. Si la courbe $\langle A{*}B\rangle$ admet au point M des vecteurs tangents unilatéraux au sens strict, alors on a entre les plans osculateurs orientés de cette courbe au point M les relations suivantes:

$$\mathrm{VIII}=\mathrm{VII}=\mathrm{VI},\ \mathrm{VI}\to(\mathrm{I}-\mathrm{V}),\ \mathrm{V}\to\mathrm{IV}\pm\to\mathrm{III}\pm,\ \mathrm{IV}\to\mathrm{V},\ \mathrm{III}\to\to\mathrm{I}\to\mathrm{II},\ \mathrm{IV}\to\mathrm{III}.$$

Théorème 2. Si la courbe $\langle A{*}B\rangle$ admet au point M un vecteur tangent au sens strict, alors on a entre les plans osculateurs orientés de cette courbe au point M les relations suivantes:

$$\mathrm{VIII}=\mathrm{VII}=\mathrm{VI}\to\mathrm{V}=\mathrm{IV}\to\mathrm{III}\to\mathrm{II}=\mathrm{I}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. J. van der Waag, Sur les plans osculateurs, I, II, Indagationes Mathematicae 14 (1952), p. 41-62.
[2] K. Radziszewski, Sur les plans osculateurs orientés, Ann. Pol. Math., XII (1962), p. 159-169.
[3] A. Żmurek, Deux remarques sur les plans osculateurs orientés, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, XVII, (1963), p.
[4] B. Bouligand, Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris 1932.
[5] Ch. Pauc, Les méthodes directes en géométrie différentielle, Paris 1941.
[6] K. Radziszewski, Sur certaines propriétés des courbes admettant des plans osculateurs orientés, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, XVII, (1963), p.

Streszczenie

W pracy rozpatruje się zależności między płaszczyznami ściśle stycznymi zorientowanymi różnych typów w sensie van der Waaga, określonymi przez wektory paratyngensowe krzywej.

Резюме

В этой работе вводится понятия ориентируемых соприкасающихся плоскостей определенных паратингенцией кривой и исследуются отношения между ними.