ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XVII, 12 SECTIO A 1963

Z Zakładu Geometrii Katedry Zespołowej Matematyki
Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

ANNA ŻMUREK

Deux remarques sur les plans osculateurs orientés

Dwie uwagi o płaszczyznach ściśle stycznych zorientowanych

Два замечания о соприкасающихся ориентированных поверхностях

Dans le travail [2] Van der Waag a donné une classification des plans osculateurs d'une courbe dans l'espace euclidien à trois dimensions et il a établi les conditions d'existence de tous les types de plans, ainsi que les relations entre les plans osculateurs de quelques types, en admettant, en général, l'existence du plan déterminé avant la limite.

K. Radziszewski a introduit dans le travail [1] la notion de plan osculateur orienté et, moyennant cette notion, il a démontré l'équivalence des plans osculateurs de tous les types considérés; il y a établi le théorème suivant:

Si la courbe $(A \wedge B)$ admet en tout point un vecteur tangent continu et un plan osculateur orienté continu de l'un des types considérés, elle admet aussi un plan osculateur orienté continu de tous les autres types. (Le symbole $(A \wedge B)$ désigne un arc de courbe fermé d'extrémités A et B).

En rapport avec ce théorème on peut se demander s'il reste en vigueur lorsqu'on rejette l'hypothèse de la continuité orientée du plan osculateur d'un type. Nous allons montrer que pour l'équivalence des définitions III — I et V — III au sens de Van der Waag la continuité est nécessaire.

1. I — III

Considérons la courbe dont les équations paramétriques sont:

$$(1) \qquad r = r(t) \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^4\left(\sin\dfrac{1}{t^2}+2\right) \end{cases} \quad \text{pour } t \neq 0$$

$$x = y = z = 0 \qquad \text{pour } t = 0$$

Le plan osculateur du type I de la courbe au point $(0,0,0)$ est la limite des plans passant par ce point et parallèles au couple de vecteurs: $t(O)$ et OP, où $t(O)$ désigne le vecteur tangent de la courbe au point $(0,0,0)$ et OP le rayon-vecteur du point P de cette courbe.

D'autre part, le plan osculateur du type III de la courbe au point $(0,0,0)$ est la limite des plans passant par ce point et parallèles au couple de vecteurs: $t(O)$ et $t(P)$, où $t(O)$ et $t(P)$ désignent les vecteurs tangents à la courbe respectivement aux points $(0,0,0)$ et P.

Le plan osculateur du type I au point $(0,0,0)$ de la courbe (1) est donc la limite des plans de la forme:

$$-t^2\left(\sin\frac{1}{t^2}+2\right)y+z=0, \quad \text{lorsque } t\to 0.$$

Ce plan existe, il est orienté et son équation est: $z=0$. Il est pourtant aisé de montrer que ce plan n'est pas continu. D'autre part, le plan osculateur du type III au point $(0,0,0)$ de la courbe (1), en tant que limite des plans de la forme:

$$\left[-2t^2\left(\sin\frac{1}{t^2}+2\right)+\cos\frac{1}{t^2}\right]y+z=0 \quad \text{lorsque } t\to 0$$

n'existe pas.

2. III — V.

Considérons la courbe représentée par les équations paramétriques:

$$(2) \qquad r=r(t)\begin{cases} x=t \\ y=t^6\left(\sin\dfrac{1}{t}+2\right)+t^5 & \text{pour } t\neq 0, \\ z=t^4\left(\sin\dfrac{1}{t}+2\right)+0{,}4t^3 \\ x=y=z=0 & \text{pour } t=0. \end{cases}$$

Le plan osculateur du type I de la courbe (2) au point $(0,0,0)$ existe, il est orienté et son équation est: $-y=0$, mais ce plan n'est pas continu.

Le plan osculateur orienté du type III au point $(0,0,0)$ existe aussi. Son vecteur normal, limite du vecteur:

$$\left(0, \frac{-1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{y'}{z'}\right)^2}}, \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{z'}{y'}\right)^2+1}}\right) \text{ lorsque } t\to 0, \text{ où}$$

$$\frac{y'}{z'}=\frac{6t^3\left(\sin\dfrac{1}{t}+2\right)+t^2\left(5-\cos\dfrac{1}{t}\right)}{4t\left(\sin\dfrac{1}{t}+2\right)+\left(1{,}2-\cos\dfrac{1}{t}\right)}$$

existe et ses composantes sont: $(0, -1, 0)$. Le plan osculateur du type III est orienté, puisque $y' > 0, z' > 0$, mais il n'est pas continu.

Le plan osculateur du type V de la courbe au point $(0, 0, 0)$ est la limite des plans passant par ce point et parallèles au couple de vecteurs: OP et $t(P)$, où OP désigne le rayon-vecteur du point P de la courbe et $t(P)$ — le vecteur tangent de la courbe au point P.

Le vecteur normal du plan osculateur du type V au point $(0, 0, 0)$ de la courbe représentée paramétriquement est donc la limite des vecteurs de la forme:

$$\left(\frac{\frac{z}{x}y' - \frac{y}{x}z'}{z' - \frac{z}{x}}, 1, \frac{y' - \frac{y}{x}}{z' - \frac{z}{x}}\right), \text{ lorsque } t \to 0.$$

Pour montrer qu'il n'existe pas de plan osculateur du type V au point $(0, 0, 0)$ de la courbe (2) il suffit de trouver la limite du rapport:

$$\frac{y' - \frac{y}{x}}{z' - \frac{z}{x}} = \frac{t^2\left[5t\left(\sin\frac{1}{t} + 2\right) + \left(4 - \cos\frac{1}{t}\right)\right]}{3t\left(\sin\frac{1}{t} + 2\right) + \left(0{,}8 - \cos\frac{1}{t}\right)}, \text{ lorsque } t \to 0. \tag{3}$$

Or, si $t = 1/2k\pi$, où $k = 0, 1, 2, \ldots$, ce rapport tend vers zéro, lorsque $k \to \infty$.

Mais, si $t \to 0$ en prenant les valeurs des racines du dénominateur, ce rapport reste toujours égal à ∞.

Le rapport (3) n'a donc pas de limite, d'où il résulte que le plan osculateur du type V au point $(0, 0, 0)$ de la courbe (2) n'existe pas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Radziszewski, Sur les plans osculateurs orientés, Annales Polonici Mathematici, 1962, XII 2.

[2] E. J. Van der Waag, Sur les plans osculateurs, I, II, Indagationes Mathematicae, vol. XIV, 1952, p. 41-62.

Streszczenie

W pracy tej wykazujemy, że dla równoważności definicji płaszczyzn ściśle stycznych III z I i V z III w sensie Van der Waaga warunek ciągłości zorientowanej płaszczyzny ściśle stycznej danej krzywej jest konieczny.

Резюме

В этой работе доказывается, что для эквивалентности определений плоскостей, соприкасающихся в смысле Ван дер Ваага III с I, с III, условие непрерывности ориентированной соприкасающейся плоскости этой кривой является необходимым.