ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA

VOL. XVII, 11 SECTIO A 1963

Z Zakładu Równań Funkcyjnych Katedry Zespołowej Matematyki
Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. U.M.C.S.
Kierownik: prof. dr Krzysztof Tatarkiewicz

ŚWIATOMIR ZĄBEK

Sur le minimum absolu de certaines fonctionnelles

O minimum absolutnym pewnych funkcjonałów

Об абсолютном минимуме некоторых функционалов

Soient deux nombres réels a et b, $a < b$. Fixons de plus des nombres: m naturel, M réel et α réel positif.

Désignons ensuite par K_0 une classe de fonctions $u(x)$ définies dans l'intervalle fermé $\langle a, b\rangle$ et y admettant une dérivée $(m-1)^e$ absolument continue (la dérivée d'ordre zéro est identique à fonction même), ainsi que satisfaisant aux conditions:

$$u^{(i)}(a) = \frac{d^i}{dx^i} u(x)\Big|_{x=a} = q_i \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{1}$$

$$\int_a^b |u^{(m)}(x)|^{1+\alpha} dx \leqslant M \tag{2}$$

De plus K_i $(i = 1, 2, \ldots, m-1.)$ signifiera la classe de toutes les fonctions $v(x)$ telles que pour chaque $v(x) \epsilon K_i$ il existe $u(x) \epsilon K_0$ telle que $u^{(i)}(x) = v(x)$.

Lemme. Les classes $K_i (i = 0, 1, \ldots, m-1.)$ sont compactes.

Démonstration. Soient deux nombres x_1 et x_2 de l'intervalle $\langle a, b\rangle$. Nous avons

$$|u^{(m-1)}(x_2) - u^{(m-1)}(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} u^{(m)}(x)\, dx\right|$$

Mais, en vertu de l'inégalité généralisée de Schwarz (voir p. ex. L. Tonelli [1] Vol. I, n° 56.):

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} u^{(m)}(x)\,dx\right| \leqslant |x_2-x_1|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left[\int_{x_1}^{x_2} |u^{(m)}(x)|^{1+\alpha}dx\right]^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

De là et de (2), pour tout $u\epsilon K_0$ et pour tout couple x_1 et x_2 de l'intervalle $\langle a, b\rangle$

$$|u^{(m-1)}(x_2)-u^{(m-1)}(x_1)| < M^{\frac{1}{1+\alpha}}|x_2-x_1|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$$

Donc, toutes les fonctions de la classe K_{m-1} sont également continues. De plus, en vertu de (1)

$$|u^{(m-1)}(x)| \leqslant |u^{(m-1)}(x)-q_{m-1}|+|q_{m-1}| \leqslant M^{\frac{1}{1+\alpha}}|x-a|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}+|q_{m-1}| \leqslant$$
$$\leqslant M^{\frac{1}{1+\alpha}}(b-a)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}+|q_{m-1}| \overset{\mathrm{df}}{=} M_1$$

c'est-à-dire, pour tout $u\epsilon K_0$ et $x\epsilon\langle a, b\rangle$

$$|u^{(m-1)}(x)| \leqslant M_1$$

ce qui indique que toutes les fonctions de K_{m-1} sont bornées dans leur ensemble.

Si $m \geqslant 2$, nous pouvons voir que, en vertu du théorème des accroissements finis, pour tout $u\epsilon K_0$ et $x_1, x_2\epsilon\langle a, b\rangle$

$$|u^{(m-2)}(x_2)-u^{(m-2)}(x_1)| = |u^{(m-1)}[x_1+\theta(x_2-x_1)]|\cdot|x_2-x_1|$$

où $0<\theta<1$, et par conséquent

$$|u^{(m-2)}(x_2)-u^{(m-2)}(x_1)| \leqslant M_1|x_2-x_1|$$

Donc, les fonctions de la classe K_{m-2} sont aussi également continues et — à cause de (1) — bornées dans leur ensemble. De cette manière nous pouvons démontrer que toute classe K_i ($i = 0, 1, \ldots, m-1.$) est un ensemble de fonctions qui sont également continues et également bornées. Par conséquent, en vertu du théorème connu d'Arzelà, de toute suite de fonctions de la classe K_i il est possible de tirer une suite partielle uniformément convergente.

Fixons i ($0 \leqslant i \leqslant m-1$). Soit $\{v_\nu(x)\}_{\nu=1,2,\ldots}$ une suite de fonctions de la classe K_i. Il existe donc une suite partielle $\{v_{\mu(j)}(x)\}_{j=1,2,\ldots}$ et une fonction $w(x)$ définie dans $\langle a, b\rangle$ telle que

$$\lim_{\substack{j\to\infty\\ \langle a,b\rangle}} \mathrm{unif}\; v_{\mu(j)}(x) = w(x)$$

où le symbole „lim unif" désigne la limite uniforme dans $\langle a, b\rangle$. Je dis que $w(x) \epsilon K_i$.

Dans le cas où $i < m-1$, comme K_{i+1} satisfait aussi aux conditions du théorème d'Arzelà, nous pouvons extraire de la suite $\{v_{\mu(j)}(x)\}$ une suite partielle telle que la suite des dérivées correspondantes soit aussi uniformément convergente.

En procédant ainsi nous arriverons enfin — pour tout $i \leqslant m-1$ — à une suite $\{\bar{v}_\lambda(x)\}_{\lambda=1,2,\ldots}$ telle que chaque suite $\{\bar{v}_\lambda^{(k)}(x)\}$ (pour $k = 0, 1, \ldots, m-1-i$.) sera uniformément convergente.

Or, en vertu d'un théorème connu sur la dérivation des suites uniformèment convergentes nous pouvons affirmer que $w(x)$ étant la limite uniforme de la suite $\{\bar{v}_\lambda(x)\}$ est une fonction dérivable jusqu'à l'ordre $(m-1-i)^e$ et que

$$w^{(k)}(x) = \lim_{\substack{\lambda\to\infty}} \underset{\langle a,b\rangle}{\text{unif}}\ \bar{v}_\lambda^{(k)}(x) \qquad \text{pour } k = 0, 1, \ldots, m-1-i.$$

Evidemment, comme $\bar{v}_\lambda(x) \epsilon K_i$, $\bar{v}_\lambda^{(k)}(a) = q_{i+k}$ et $\int\limits_a^b |\bar{v}_\lambda^{(m-1)}(x)|^{1+\lambda} dx \leqslant M$. Par conséquent nous avons aussi $w^{(k)}(a) = q_{i+k}$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1-i.)$ et $\int\limits_a^b |w^{(m-i)}(x)|^{1+a} dx \leqslant M$.

L. Tonelli [1], Vol. II, dans n° 86 a montré, entre autres, que toutes les fonctions $f(x)$ absolument continues dans un certain intervalle $\langle s, t\rangle$ et satisfaisant à la condition

$$\int\limits_s^t |f'(x)|^{1+a} dx \leqslant M$$

sont également absolument continues.

Cette conclusion est évidemment vraie pour les fonctions de la classe K_{m-1}. Admettant que $\bar{v}_\lambda^{(m-1-i)}(x) \epsilon K_{m-1}$, nous voyons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe tel $\delta > 0$ que pour tout λ naturel et toute suite finie d'intervalles $\{\langle x_{j1}, x_{j2}\rangle\}_{j=1,2,\ldots,s.}$ contenus dans $\langle a, b\rangle$ et non empiétants, nous avons

$$\left|\sum_{j=1}^{s} [\bar{v}_\lambda^{(m-1-i)}(x_j) - \bar{v}_\lambda^{(m-1-i)}(x_{j1})]\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad \sum_{j=1}^{s} |x_{j2} - x_{j1}| < \delta$$

Quand $\lambda \to \infty$, nous obtenons

$$\left|\sum_{j=1}^{s} [w^{(m-1-i)}(x_{j2}) - w^{(m-1-i)}(x_{j1})]\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

ce qui prouve que $w^{(m-1-i)}(x)$ est aussi absolument continue.

De toutes ces propriétés de $w(x)$ et de la définition de la classe K_i, il resulte que $w(x)\epsilon K_i$, c'est-à-dire K_i est compacte pour $i = 0, 1, \ldots$ $\ldots m-1$., c.q.f.d.

Désignons maintenant par L la classe des fonctions $u(x)$ définies et ayant une dérivée $(m-1)^e$ absolument continue dans $\langle a, b\rangle$ et y satisfaisant aux conditions (1).

Soit $\psi[u]$ une fonctionnelle définie et inférieurement semi-continue dans L, de la forme

$$\psi[u] = \int_a^b F(x, u, u', u'', \ldots, u^{(m)})dx$$

telle que $F(x, t_0, t_1, t_2, \ldots, t_m) \geqslant p\cdot|t_m|^{1+a}$ où p est un nombre réel positif.

Théorème. La fonctionnelle $\psi[u]$ admet dans L son minimum absolu.

Démonstration. Comme $\psi[u] \geqslant p\cdot\int_a^b |u^{(m)}(x)|^{1+a}dx \geqslant 0$, donc la borne inférieure de $\psi[u]$ dans L existe. Désignons $I = \inf\limits_L \psi[u]$. Evidemmment $I \geqslant 0$. Soit $\bar{L}$ une sous-classe de L, pour les éléments de laquelle l'inégalité $\psi[u] \leqslant I+1$ est satisfaite. Par conséquent on a dans $\bar{L}$:

$$\int_a^b |u^{(m)}(x)|^{1+a}dx \leqslant \frac{I+1}{p}$$

En vertu du lemme, $\bar{L}$ est commpacte. Donc $\psi[u]$, étant par hypothèse inférieurement semi-continue, admet dans $\bar{L}$ son minimum absolu. Par ce seul fait elle l'admet aussi dans la classe L, c.q.f.d.

Remarquons, que chaque sous-classe fermée de la classe L, déterminée par des conditions supplémentaires telles que p. ex. $u(b) = 1$, $|u(x)| \leqslant 1$ etc., est aussi compacte. Nous obtenons ainsi par exemple:

Corollaire. Chaque fonctionnelle de la forme

$$\psi[u] = \int_a^b \sum_{j=0}^m p_j(x)[u^{(j)}(x)]^2\,dx$$

où $p_j(x) \geqslant 0, p_m(x) \geqslant p > 0$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, m.)$ dans $\langle a, b\rangle$, admet son minimum absolu dans une sous-classe de la classe L, définie par des conditions supplémentaires $u(b) = 1$, $\sup\limits_{\langle a,b\rangle}|u(x)| = 1$.

Ce corollaire sera utilisée dans un autre travail, qui paraîtrera ultérieurement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Tonelli L., Fondamenti di calcolo delle variazioni, Bologna 1923.

Streszczenie

Niech m oznacza ustaloną liczbę naturalną, zaś L — klasę funkcji $u(x)$ określonych i mających absolutnie ciągłą pochodną rzędu $(m-1)$-go w pewnym przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$ (samą funkcję uważamy przy tym za pochodną rzędu zerowego), tamże spełniających warunki $u^{(i)}(a) = q_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Oznaczając przez $\psi[u]$ funkcjonał dolnie półciągły w klasie L, mający postać

$$\psi[u] = \int_a^b F(x, u, u', u'', \ldots, u^{(m)})\,dx$$

taki, że dla pewnych stałych dodatnich α i p, mamy $F(x, t_0, t_1, \ldots, t_m) \geqslant p\cdot|t_m|^{1+\alpha}$, dowodzimy twierdzenia:

Funkcjonał $\psi[u]$ osiąga w klasie L, a także w każdej podklasie domkniętej klasy L, swoje minimum absolutne.

Резюме

Пусть m будет фиксированным натуральным числом, L — классом функции $u(x)$ имеющих абсолютно непрерывную производную $(m-1)$-го порядка на некотором замкнутом отрезке $\langle a, b\rangle$ (при том самую функцию $u(x)$ мы считаем её собственной производной нулевого порядка) и удовлетворяющих условиям: $u^{(i)}(a) = q_i$ для $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Обозначая через $\Psi[u]$ полунепрерывный снизу в L функционал вида:

$$\Psi[u] = \int_a^b F(x, u, u', u'', \ldots, u^{(m)})\,dx$$

такой, что для некоторых положительных α и p, $F(x, t_0, t_1, \ldots, t_m) \geqslant p\,|t_m|^{1+\alpha}$, доказывается теорему:

Существует в L (и в каждом замкнутом подклассе класса L) такая функция $u_0(x)$, что $\Psi[u_0] = \inf\limits_{L}\Psi[u]$.