

Z Katedry Zespołowej Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS

Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

CZESŁAW KLUCZNY

Sur certaines familles de courbes en relation avec la théorie des équations différentielles ordinaires II

O pewnych rodzinach krzywych w powiązaniu z teorią równań różniczkowych zwyczajnych II

О некоторых семействах кривых в связи с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений II

Nous donnons ici la seconde partie du travail [4] dont la première a paru au tome XV de ces Annales. Les renvois entre accolades se rapporteront à celle-ci.

11. Définition. (11,1) Une famille de courbes {définition (2,1), p. 16} sera dite *uniforme à droite (à gauche)* dans l'ensemble W , si tout point de l'ensemble W est origine (extrémité) d'un seul élément de cette famille, saturé à droite (à gauche) dans l'ensemble W .

Dans ce paragraphe nous admettons l'hypothèse que dans l'ensemble W se trouve définie une famille F du type $\mathcal{G}_*$ {p. 26, lignes 3-6} uniforme à droite.

Définition (11,2). Un ensemble de points appartenant à l'ensemble $U+S$ {définitions (3,1) et (6,1), p. 18 et 25} tel que la trace d'émission {définition (7,1), p. 27} de chacun d'eux soit un point, sera appelé *ombre gauche de l'ensemble S* (cf. [7]) et désigné par M .

Si $a \in U+S$ et s'il n'existe pas de courbes asymptotiques {définition (3,4), p. 18} issues de l'ensemble a , alors $a \in M$. Pour désigner la trace d'émission du point P dans le cas où $e(P)$ est un point admettons, comme le font d'autres auteurs (cf. [7]), la notation $\text{conseq } P$. La transformation $P \rightarrow \text{conseq } P$ est définie dans l'ensemble M et fait correspondre à tout point de cet ensemble un point de l'ensemble S .

Théorème (11,1). Si dans l'ensemble W (satisfaisant à l'hypothèse Z_1 , cf. [4], p. 19) se trouve définie une famille F du type $\mathcal{G}_*$ uniforme à droite, la fonction $\text{conseq } P$ est définie et continue dans l'ensemble M .

Démonstration. Supposons que les points $P, P_1, P_2, \dots$ appartiennent à l'ensemble M et que $\lim P_i = P$, pour $i \rightarrow \infty$. Soit $Q_i = e(P_i)$, $i = 1, 2, \dots$. Or, il s'ensuit de la propriété 3^o de la famille F {p. 17} que l'on peut extraire de la suite $Q_1, Q_2, \dots$ une suite partielle convergente vers un point $Q \in R$ et qu'il existe un élément de la famille F d'origine P et d'extrémité Q . Comme $P \in M \subset U + S$, on a $Q \in S$ en vertu de l'hypothèse Z_3F {p. 25}. Donc $Q = e(P)$, et $\lim e(P_i) = e(P)$ pour $i \rightarrow \infty$, la famille F étant uniforme à droite, q. e. d.

Ce théorème est la base des théories qui étudient les propriétés asymptotiques en s'appuyant sur la notion du rétracte ([7], [1], [9], [2], [4]).

Du théorème (11,1) résulte encore un autre théorème qui diffère par son caractère non seulement des théorèmes énoncés dans les théories fondées sur la notion du rétracte, mais aussi des autres théorèmes de ce travail. Ce théorème est bien simple et, dans les applications, il peut remplacer les théorèmes donnés dans [7]. Pour l'énoncer nous admettrons cette définition:

Définition (11,3). Nous dirons qu'un ensemble Z peut être contracté en un point P dans l'ensemble B , s'il existe une homotopie $H(y, s)$, où $y = (t, x)$, telle que pour $y \in Z$ on ait $H(y, 0) = y$, $H(y, 1) = P$, et en outre $H(y, s) \in B$ pour $0 \leq s \leq 1$.

Théorème (11,2). Supposons que la famille F soit une famille du type $\mathcal{G}_*$, définie dans l'ensemble W et uniforme à droite, que l'ensemble $a \subset U + S$ et que l'ensemble $b \subset S$. S'il existe un sous-ensemble Z de l'ensemble $S - b$ qui peut être contracté en un point dans l'ensemble $a + S - b$, mais ne peut pas l'être dans l'ensemble $S - b$, alors on a l'une des deux alternatives suivantes (u_1): il existe une courbe asymptotique de la famille F issue de l'ensemble a , ou bien (u_2): il existe un élément de la famille F dont l'origine est dans l'ensemble a et l'extrémité dans l'ensemble b (cf. [4], lemme à la p. 32).

Démonstration. Il suffit de montrer que si aucune des alternatives (u_1) et (u_2) n'a lieu, tout sous-ensemble de l'ensemble $S - b$, qui peut être contracté en un point dans l'ensemble $a + S - b$, peut aussi être contracté en un point dans l'ensemble $S - b$. Supposons donc que $Z \subset S - b$ et qu'il existe un point P et une homotopie telle que pour $y \in Z$ on ait $H_1(y, 0) = y$, $H_1(y, 1) = P$ et $H_1(y, s) \in a + S - b$ et posons $H_2(y, s) = \text{conseq } H_1(y, s)$. Comme il n'existe pas de courbes asymptotiques issues de l'ensemble a et que $a \subset U + S$, il résulte du théorème (11,1) que pour $y \in Z$ et $0 \leq s \leq 1$ la fonction $H_2(y, s)$ est continue. En outre, comme il n'existe pas d'éléments de la famille F issus de l'ensemble a et aboutissant à l'ensemble b , on a $\text{conseq } y \in S - b$ pour $y \in a + S - b$, donc $H_2(y, s) \in S - b$ pour $y \in Z$ et $0 \leq s \leq 1$. Cela prouve que l'ensemble Z peut être contracté en le point $\text{conseq } P$ dans l'ensemble $S - b$, c. q. f. d.

Le théorème (11,2) subsiste si au lieu de S on y met S_* {définition (6,3), p. 26}.

Il n'y a aucune difficulté à appliquer ce théorème à l'exemple (10,1) dans les cas (jj) et (jjj), ainsi qu'à l'exemple (10,2), voir [4], p. 35, pourvu que la famille F satisfasse aux hypothèses du théorème (11,2). Nous allons montrer qu'on peut aussi l'appliquer à l'exemple (5,1); voir [4], p. 24. Supposons que l'on ait dans cet exemple $S = \text{Front } W$ et posons $a(\tau) = W\{t = \tau\}$, $Z(\tau) = a(\tau) \cdot \text{Front } W$. Pour τ quelconque l'ensemble $Z(\tau)$ peut être contracté en un point dans l'ensemble $S + a(\tau)$, mais ne peut pas l'être dans l'ensemble S , donc, en vertu du théorème (11,2) il existe une courbe asymptotique de la famille issue de chacun des ensembles $a(\tau)$.

12. Caractérisons maintenant brièvement le principe général qui a servi de base à nos raisonnements et qui nous servira encore dans la suite. Notre théorie est basée sur des théorèmes de la forme: „si non p et q , alors r ”, où p désigne la proposition: „il existe une courbe asymptotique issue de l'ensemble a ” et q désigne certaines conditions relatives à des familles de courbes et à l'ensemble W . Parmi les théorèmes de ce type les travaux cités plus haut n'ont mis à profit que le théorème (11,1). Au lieu de ce théorème nous avons donné jusqu'à présent les théorèmes (4,1) et (8,1)-(8,3), {p. 20 et p. 28-31}. L'application de chacun de ces théorèmes a permis d'obtenir des théorèmes sur les propriétés asymptotiques et aux limites de familles de courbes assez générales. Mais, même si l'on se borne aux familles d'intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires satisfaisant à la condition d'unicité, on trouvera parmi ces théorèmes des propositions qui ne peuvent pas être déduites du théorème (11,1), notamment celles du paragraphe 5. Les théories fondées sur la notion du rétracte présentaient l'inconvénient manifeste de ne pas permettre d'obtenir un théorème aussi évident que le théorème (5,5) sans qu'il fût nécessaire de faire l'hypothèse supplémentaire qu'il n'y a pas de glissements intérieurs {p. 23}. Il n'est pas possible non plus de déduire du théorème (11,1) le théorème (9,1), même dans le cas où la famille F est la famille d'intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires satisfaisant à la condition d'unicité {p. 33}. Nous indiquerons maintenant ce que nous avons encore en vue. Les théorèmes (4,1) et (8,1)-(8,3) n'épuisent pas, bien entendu, toutes les propriétés de la transformation $a \rightarrow E(a)$, qui peuvent être utiles pour obtenir des théorèmes relatifs aux propriétés asymptotiques et aux limites. Dans la suite, nous définirons par la transformation $a \rightarrow E(a)$ une fonction qui permettra d'énoncer pour les familles des types $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_*$ les théorèmes qui englobent certains cas où les théorèmes mentionnés auparavant ne s'appliquent plus directement.

13. Définition (13,1). Admettons l'hypothèse Z_1 et supposons que les ensembles R' et A satisfont aux conditions $R' \subset R$ et $A \subset U + R'$. Nous dirons que la fonction $I'(a, s)$ est une fonction de balayage du type $\mathcal{G}_*$ si les conditions suivantes sont remplies:

1* La fonction $I'(a, s)$ est définie pour des valeurs de l'argument a qui sont sous-ensembles de l'ensemble A et pour des valeurs quelconques du paramètre s , ses valeurs étant sous-ensembles de l'ensemble A ,

2* $I'((t_1, x_1), s) = (t_1, x_1)$ pour $s \leq t_1$ et, si le point (t_1, x_1) appartient à l'ensemble R' , $I'((t_1, x_1), s) = (t_1, x_1)$ pour tout s ,

3* si $(t_1, x_1) \notin R'$ et $s > t_1$, alors on a $I'((t_1, x_1), s) \subset W\{t = s\} + R'\{t_1 < t < s\}$,

$$4^* \quad I'(a, s) = \sum_{(t, x) \in a} I'((t, x), s),$$

5* si l'ensemble a est compact, l'ensemble $I'(a, s)$ est aussi compact et, en outre, il existe un nombre s_* tel que $I'(a, s_*) \subset R'$ et que pour $s \geq s_*$ on ait $I'(a, s) = I'(a, s_*)$,

6* si l'ensemble a est connexe, l'ensemble $I'(a, s)$ est aussi connexe,

7* $I'(I'(a, s_1), s_2) = I'(a, s_2)$ pour $s_1 \leq s_2$,

8* la fonction $I'(a, s)$ est uniformément continue par rapport à s dans l'ensemble des sous-ensembles compacts de l'ensemble A , c'est-à-dire: pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout ensemble compact $a \subset A$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $|s_1 - s_2| < \delta$, on ait $I'(a, s_1) \subset K(I'(a, s_2), \varepsilon)$,

9* la fonction $I'(a, s)$ est semi-continue supérieurement dans le sens de l'inclusion par rapport à a dans l'ensemble de tous les sous-ensembles compacts de l'ensemble A , c'est-à-dire: si $a_1 \supset a_2 \supset \dots$ est une suite descendante d'ensembles compacts, contenus dans l'ensemble A et non vides, et si $\bigcap_{i=1}^{\infty} a_i = a$, alors on a, pour tout s , $\bigcap_{i=1}^{\infty} I'(a_i, s) \subset I'(a, s)$.

Nous dirons qu'une fonction $I'(a, s)$ est une fonction de balayage du type $\mathcal{G}$, si elle satisfait aux conditions 1*, 3*-9* et, au lieu de 2*, à la condition suivante:

2** $I'((t_1, x_1), s) = (t_1, x_1)$ pour $s \leq t_1$ et, si $(t_1, x_1) \in R'$, on a $(t_1, x_1) \in I'((t_1, x_1), s) \subset R'$.

Des fonctions des types $\mathcal{G}_*$ ou $\mathcal{G}$ nous dirons qu'elles balayent l'ensemble A dans lui-même sur R' .

De 5*-7* résultent encore les propriétés suivantes:

5** si l'ensemble $I'(a, s_1)$ est compact et $s > s_1$, l'ensemble $I'(a, s)$ est aussi compact.

6** si l'ensemble $I'(a, s_1)$ est connexe et $s > s_1$, l'ensemble $I'(a, s)$ est aussi connexe.

Définition (13,2). Nous dirons que la fonction $I'(a, s)$ (du type $\mathcal{G}_*$ ou $\mathcal{G}$) balaye l'ensemble a sur R' dans l'ensemble C , s'il existe un ensemble A tel que la fonction $I'(a, s)$ le balaye dans lui-même sur R' et si, en outre, $a \subset A \subset C$.

Théorème (13,1) Supposons vérifiées les hypothèses Z_1 et Z_3F . Si l'ensemble $a \subset U+S$ et s'il n'existe pas de courbes asymptotiques de la famille F issues de l'ensemble a , il existe une fonction $\Psi(a, s)$ du type $\mathcal{G}_*$, qui balaye l'ensemble a sur S dans l'ensemble $E(a)$.

Démonstration. Posons pour $a \subset E(a)$ et pour s quelconque

$$(13,1) \quad \Psi(a, s) = a\{t > s\} + e(a\{t \leq s\}, s)^{(1)}.$$

Comme $a \subset E(a)$, il suffit, en vertu de la définition (13,2), de prouver que la fonction $\Psi(a, s)$ admet les propriétés 1^* - 9^* , si l'on prend $A = E(a)$. Les propriétés 1^* et 4^* sont évidentes. De (13,1) résulte que

$$(13,2) \quad \begin{aligned} \Psi(a, s) &= a \text{ si } a\{t \leq s\} = 0, \\ \Psi(a, s) &= e(a, s) \text{ si } a\{t > s\} = 0, \end{aligned}$$

d'où, en tenant compte du fait que si le point $(t, x) \in S$, on a $e((t, x), s) = (t, x)$ pour $s \geq t$, 2^* et 3^* résultent immédiatement.

Si l'ensemble a est compact, il en est de même de l'ensemble $a\{t \leq s\}$ et, comme il n'existe pas de courbes asymptotiques issues de l'ensemble a et que $a \subset E(a) \subset U+S$, on constate, en appliquant le théorème (4,1) à l'ensemble $W\{t \leq s\}$, que l'ensemble $e(a\{t \leq s\}, s)$ est aussi compact. De plus, on a $a\{t = s\} = e(a\{t = s\}, s)$, on peut donc remplacer dans la formule (13,1) $a\{t < s\}$ par $a\{t \leq s\}$. Par conséquent l'ensemble $\Psi(a, s)$, étant la somme de deux ensembles compacts, est compact. En vertu du théorème (4,1) l'ensemble $E(a)$ est compact [p. 20]. Soit s_* la valeur maximum des abscisses t des points appartenant à l'ensemble $E(a)$. Alors, il résulte de (13,1) et (v_2) que $\Psi(a, s) = e(a, s) = e(a)$ pour $s \geq s_*$ et, comme $a \subset a \subset U+S$, on a $e(a) \subset S$, eu égard à l'hypothèse Z_3F [p. 25]. Ainsi, nous avons démontré que la fonction $\Psi(a, s)$ jouit de la propriété 5^* .

Supposons maintenant que la propriété 6^* ne soit pas vraie. Il existe donc des ensembles b et c tels que $\Psi(a, s) = b+c$ et en outre $b \cdot \bar{c} = \bar{b} \cdot c = 0$. Posons $b \cdot e(a\{t \leq s\}, s) = b_1$, $c \cdot e(a\{t \leq s\}, s) = c_1$, $b \cdot a\{t > s\} = b_2$, $c \cdot a\{t > s\} = c_2$. En vertu de (13,1) on a $b = b_1 + b_2$, $c = c_1 + c_2$, donc les ensembles $b_1 + b_2$ et $c_1 + c_2$ sont séparés, c'est-à-dire

$$(13,3) \quad (b_1 + b_2)(\overline{c_1 + c_2}) = (\overline{b_1 + b_2})(c_1 + c_2) = 0.$$

(1) Nous admettons en même temps que la trace d'émission d'un ensemble vide est vide.

On a aussi $e(a\{t \leq s\}, s) = b_1 + b_2$, il existe donc des ensembles β et γ tels que $\beta + \gamma = a\{t \leq s\}$, ainsi que $e(\beta, s) = b_1$ et $e(\gamma, s) = c_1$.

Nous aboutirons à la contradiction qui achèvera la démonstration de la propriété 6* en prouvant que les ensembles $\beta + b_2$ et $\gamma + c_2$ sont séparés. Nous montrerons d'abord que le produit des ensembles $(\beta + b_2)$ et $(\gamma + c_2)$ est vide. Les ensembles β et γ sont séparés, sinon il résulterait du théorème (8,3) que les ensembles b_1 et c_1 ne sont pas séparés [p. 31], ce qui est impossible à cause de (13,3). Par conséquent $\beta \cdot \gamma = 0$. De (13,3) résulte aussi que $b_2 \cdot \bar{c}_2 = 0$. Il reste à prouver que $b_2 \cdot \bar{\gamma} = 0$ et $\beta \cdot \bar{c}_2 = 0$. Mais $\bar{\gamma} \subset W\{t \leq s\}$ et $b_2 \subset W\{t > s\}$, donc $b_2 \cdot \bar{\gamma} = 0$. S'il existait un point $P \in \beta \cdot \bar{c}_2$, on devrait avoir $t_P = s$, donc $P \in e(P, s)$. Mais, comme $P \in \beta$, on a $P \in e(\beta, s) = b_1$, et l'ensemble $b_1 \cdot \bar{c}_2$ ne serait pas vide, ce qui est aussi impossible à cause de (13,3). On prouve pareillement que l'ensemble $(\beta + b_2) \cdot (\gamma + c_2) = 0$, par conséquent les ensembles $\beta + b_2$ et $\gamma + c_2$ sont séparés et la démonstration de la propriété 6* est achevée. En passant à celle de la propriété 7*, observons d'abord qu'il résulte de la propriété 3* que $\Psi(a + \beta, s) = \Psi(a, s) + \Psi(\beta, s)$. Par conséquent on tire de (13,2) la relation $\Psi(\Psi(a, s_1), s_2) = \Psi(a\{s_1 < t \leq s_2\} + a\{t > s_2\} + e(a\{t \leq s_1\}, s_1), s_2)$ et comme $e(a\{t \leq s_1\}, s_1) \subset W\{t \leq s_1\}$ et $s_1 \leq s_2$, on a

$$(13,4) \quad \Psi(\Psi(a, s_1), s_2) = e(a\{s_1 < t \leq s_2\}, s_2) + a\{t > s_2\} + e(e(a\{t \leq s_1\}, s_1), s_2).$$

D'autre part

$$(13,5) \quad \Psi(a, s_2) = a\{t > s_2\} + e(a\{t \leq s_1\}, s_2) + e(a\{s_1 < t \leq s_2\}, s_2).$$

Mais, en vertu de (v₄), {27}, on a $e(e(a\{t \leq s_1\}, s_1), s_2) = e(a\{t \leq s_1\}, s_2)$, donc il résulte de (13,4) et (13,5) que l'on a bien 7*. Passons à la démonstration de la propriété 8*. Comme l'ensemble $E(a)$ est compact, il existe des nombres s_0 et s_* tels que l'ensemble $E(a)$ contient aussi bien des points de coordonnée temporelle s_0 que des points de coordonnée temporelle s_* , mais ne contient pas de points dont la coordonnée temporelle soit extérieure à l'intervalle $\langle s_0, s_* \rangle$. De (13,2) résulte que pour $s < s_0$ on a $\Psi(a, s) = \Psi(a, s_0) = a$; d'autre part, de (13,2) et de la propriété (v₂) il suit que pour $s > s_*$ on a $\Psi(a, s) = \Psi(a, s_*) = e(a)$. Par conséquent, dans la démonstration de la propriété 8* il suffit de se borner à l'intervalle $\langle s_0, s_* \rangle$. Comme l'ensemble $E(a)$ est un sous-ensemble compact de l'ensemble W , il résulte du théorème (2,1) que les courbes de la famille F contenues dans $E(a)$ sont équicontinues [p. 17]; il existe donc, pour tout $\varepsilon > 0$, un nombre $\delta > 0$, que nous supposons dès maintenant satisfaire à la condition $\delta \leq \varepsilon$, tel que si le point $(\tau, \xi) \in E(a)$ et le point $(\tau_1, \xi_1) \in E(\tau, \xi)$ on ait

$$(13,6) \quad \varrho(\xi, \xi_1) < \varepsilon, \text{ pourvu que } 0 \leq \tau_1 - \tau < \delta.$$

Supposons que $s_0 \leq s_1 < s_2 \leq s_*$ et $s_2 - s_1 < \delta$. De (13,1) et de la définition (7,1) nous tirons

$$(13,7) \quad \Psi(a, s_1) = a\{t > s_2\} + a\{s_1 < t \leq s_2\} + E(a\{t \leq s_1\}) \cdot T(s_1).$$

$$(13,8) \quad \Psi(a, s_2) = a\{t > s_2\} + E(a\{s_1 < t \leq s_2\}) \cdot T(s_2) + \\ + E(a\{t \leq s_1\}) \cdot T(s_2).$$

Pour démontrer 8* il suffit de prouver qu'à tout point de l'un des ensembles $\Psi(a, s_1)$, $\Psi(a, s_2)$ correspond un point de l'autre tel que leur distance soit inférieure à ε . D'après (13,7) et (13,8) cela est évident lorsqu'il s'agit des points appartenant à l'ensemble $a\{t > s_2\}$. A tout point de l'un des ensembles $a\{s_1 < t \leq s_2\}$ et $E(a\{s_1 < t \leq s_2\}) \cdot T(s_2)$ correspond un point de l'autre tel que tous les deux sont sur un élément de la famille F contenue dans $E(a)$. Si P et Q forment un tel couple de points et si $P \in a\{s_1 < t \leq s_2\}$, on a $s_1 < t_P < t_Q$; il résulte en outre de la formule (6,7) que $t_Q \leq s_2$, donc $0 \leq t_Q - t_P < \delta \leq \varepsilon$ et la formule (13,6) donne $d(P, Q) < \varepsilon$. Il reste à considérer le cas où le point P appartient à l'un des derniers termes des seconds membres des formules (13,7) et (13,8). Si $P \in E(a\{t \leq s_1\})T(s_2)$ et $t_P \geq s_1$, on trouve d'une façon tout à fait analogue que $d(P, Q) < \varepsilon$; d'autre part, si $t_P < s_1$, il résulte de la formule (6,7), {p. 27}, que le point P appartient aussi à l'ensemble $E(a\{t \leq s_1\}) \cdot T\{t < s_1\} \subset E(a\{t \leq s_1\}) \cdot T(s_1)$, donc $d(P, Q) = 0$. La propriété 8* est ainsi démontrée.

Pour établir la propriété 9* il suffit de prouver que pour toute suite descendante d'ensembles compacts a_n contenus dans l'ensemble $E(a)$ et pour tout s on a

$$\prod_{n=1}^{\infty} \Psi(a_n, s) \subset \Psi\left(\prod_{i=1}^{\infty} a_n, s\right).$$

Pour cela supposons que le point

$$Q \in \prod_{n=1}^{\infty} \Psi(a_n, s).$$

Si $t_Q > s$, la formule (13,2) entraîne

$$Q \in \prod_{n=1}^{\infty} a_n\{t > s\},$$

donc

$$Q \in \Psi\left(\prod_{n=1}^{\infty} a_n, s\right).$$

Par contre, si $t_0 \leq s$, on tire de la même formule

$$Q \in \prod_{n=1}^{\infty} e(a_n \{t \leq s\}, s),$$

il existe donc une suite de points P_n , $P_n \in a_n$, $n = 1, 2, \dots$ et une suite d'éléments I_n de la famille F telle que l'élément I_n ait son origine au point P_n et son extrémité au point Q . Comme $a_1 \subset a_1$ et que l'ensemble a_1 est compact, on a $I_n \subset E(a_1)$, $n = 1, 2, \dots$. Mais $E(a_1)$ est un sous-ensemble compact de l'ensemble W , donc, en vertu de la propriété 3^o de la famille F , on peut extraire de la suite I_n une suite partielle convergente vers un élément de la famille F ayant son origine dans l'ensemble $\prod_{i=1}^{\infty} a_n$ et son

extrémité au point Q . Cela signifie que $Q \in \Psi(\prod_{n=1}^{\infty} a_n, s)$, ce qui prouve 9*.

La démonstration du théorème (13,1) se trouve ainsi achevée.

Théorème (13,1) *Si les hypothèses Z_1 et Z_2F sont vérifiées, si l'ensemble $a \subset U+T$ et s'il n'existe pas de courbes asymptotiques de la famille F issues de l'ensemble a , il existe une fonction $\Psi(a, s)$ du type $\mathcal{B}$ qui balaye l'ensemble a sur T dans l'ensemble $E(a)$.*

La démonstration de ce théorème se fait en répétant presque à la lettre celle du théorème (13,1). Dans la démonstration de la propriété 2* il suffit seulement de profiter du fait que si $(t, x) \in T$, on a $(t, x) \in e((t, x), s) \subset C T$, ce qui résulte de la dernière des propriétés (v_1).

Théorème (13,2). *Admettons les hypothèses Z_1 et Z_3F et supposons que l'ensemble $b \subset W$ et l'ensemble $a \subset U+S$. S'il n'existe pas de fonction $\Gamma(a, s)$ du type $\mathcal{G}_*$ balayant l'ensemble a sur S dans l'ensemble $U+S-b$, on a (u_1) ou bien (u_2) .*

Démonstration. Si le théorème n'était pas vrai, il existerait, en vertu du théorème (13,1), une fonction $\Psi(a, s)$ du type $\mathcal{G}_*$, balayant l'ensemble a sur S dans l'ensemble $E(a)$, les ensembles $E(a)$ et b n'ayant pas de points communs; en vertu de la formule (6,6), {p. 26} on aurait alors $E(a) \subset U+S-b$, en contradiction avec les hypothèses du théorème (13,2).

Théorème (13,2'). *Admettons les hypothèses Z_1 et Z_2F , et supposons que l'ensemble $b \subset W$ et l'ensemble $a \subset U+T$. S'il n'existe pas de fonction $\Gamma(a, s)$ du type $\mathcal{G}$, balayant l'ensemble a sur T dans l'ensemble $U+T-b$, on a (u_1) ou bien (u_2) .*

La démonstration de ce théorème ne diffère de celle du théorème (13,2) que par ce que, au lieu de (6,6), on y profite de la formule (6,3), {p. 26}.

Les théorèmes (13,2) et (13,2') comprennent certains cas dans lesquels les théorèmes des paragraphes précédents ne peuvent être appliqués directement.

On peut définir de façon analogue les fonctions de balayage, des types $\mathcal{G}_+^-$ et $\mathcal{G}_-^-$ se prêtant à l'étude des familles des types $\mathcal{G}_+^-$ et $\mathcal{G}_-^-$. Une fonction de balayage servant à l'étude des familles du type $\mathcal{F}$ différencierait considérablement des fonctions envisagées plus haut et nous ne croyons pas nécessaire de nous en occuper.

Exemple (13,1). Soit

$$W = (t, x_1, x_2) \{ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 9, -\infty < t < +\infty \},$$

$$a = (t, x_1, x_2) \{ (x_1 - 2)^2 + t^2 = 4, x_2 = 0 \},$$

$$b = (t, x_1, x_2) \{ x_1^2 + x_2^2 = 4, t = 0 \}.$$

Admettons l'hypothèse $Z_3 F$ et supposons que les points $(0, -2, 0)$, $(0, 4, 0)$ appartiennent à des composantes distinctes de l'ensemble S . Nous allons montrer:

(j) une courbe asymptotique de la famille F est issue de l'ensemble $a + b$,

(jj) il existe un élément de la famille F issu de l'ensemble a et aboutissant à l'ensemble b .

Démonstration. Pour prouver (j), il suffit de montrer qu'il n'existe pas de fonction $\Gamma(a, s)$ du type $\mathcal{G}_+$ balayant l'ensemble $a + b$ sur S dans l'ensemble $U + S$. Supposons, en effet, qu'une telle fonction existe. En vertu de 5^* il existe un nombre $s_* > 0$ tel que l'ensemble $\Gamma(a + b, s_*)$ soit contenu dans l'ensemble S et il résulte de 4^* que l'ensemble $\Gamma(a + b, s_*)$ contient les points $(0, -2, 0)$, $(0, 4, 0)$. Pourtant, comme ces points appartiennent par hypothèse à des composantes distinctes de l'ensemble S , l'ensemble $\Gamma(a + b, s_*)$ n'est pas connexe. D'autre part, de 6^* et 2^* résulte que l'ensemble $\Gamma(a \{t \leq 0\}, 0)$ est connexe et contenu dans l'ensemble $S(0) = W \{t = 0\} + S \{t < 0\}$. Mais comme les points $(0, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, situés dans des composantes distinctes de l'ensemble $S(0) - b$, appartiennent, d'après 2^* , aussi à l'ensemble $\Gamma(a \{t \leq 0\}, 0)$, on a $\Gamma(a \{t \leq 0\}, 0) \cdot b \neq 0$ et a fortiori $\Gamma(a, 0) \cdot b \neq 0$. Mais $b = \Gamma(b, 0)$, donc les ensembles $\Gamma(a, 0)$, $\Gamma(b, 0)$ ont un point commun; par conséquent il résulte de 6^* et 3^* que l'ensemble $\Gamma(a + b, 0)$ est connexe, on déduit donc de 6^{**} que l'ensemble $\Gamma(a + b, s_*)$ est aussi connexe. Nous arrivons ainsi à une contradiction, ce qui prouve (j).

Pour établir (jj) considérons la famille F restreinte à l'ensemble $W \{t \leq 2\}$, qui contient les circonférences a et b . Dans la démonstration de la propriété (j) nous avons prouvé que $\Gamma(a, 0) \cdot b \neq 0$. Cela signifie qu'il n'existe pas de fonction $\Gamma(a, s)$ du type $\mathcal{G}_+$ balayant l'ensemble a sur $S(2)$ dans l'ensemble $W \{t \leq 2\} - b$; comme la famille F restreinte à l'en-

semble $W\{t \leq 2\}$ ne contient pas de courbes asymptotiques, le théorème (13,2) entraîne (jj), {p. 35}.

Pour l'exemple (13,1) on peut obtenir un résultat plus précis: ou bien il existe une courbe asymptotique de la famille F ayant des points communs avec chacun des ensembles a et b , ou bien il existe au moins deux courbes asymptotiques distinctes issues de l'ensemble $a+b$. En effet, désignons par I une courbe de la famille F dont l'origine appartient à l'ensemble a et l'extrémité à l'ensemble b . Une telle courbe existe d'après (j). Avec l'ensemble $a+b+I$ on peut former deux arcs d'extrémités $(0, -2, 0)$, $(0, 4, 0)$, ayant en commun la courbe I et les points $(0, -2, 0)$, $(0, 4, 0)$. Il est visible qu'il n'existe pas de fonction $\Gamma(a, s)$ du type $\mathcal{G}_*$ balayant l'un quelconque de ces arcs sur S dans l'ensemble $U+S$ et, pour établir notre conclusion, il suffit d'appliquer le théorème (13,2) deux fois, pour chacun de ces arcs séparément⁽²⁾. Si nous avions substitué, dans cet exemple, l'hypothèse $Z_3 F$ à $Z_2 F$, nous serions arrivés aux mêmes résultats en appliquant le théorème (13,2').

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Albrecht, F., *Remarques sur un théorème de T. Ważewski relatif à l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **2** (1954), p. 315-318.
- [2] Bielecki, A., *Extension de la méthode du rétracte de T. Ważewski aux équations au paratingent*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **9**, (1955), p. 37-58.
- [3] Bielecki, A. et Kluczny C., *Sur un théorème concernant des systèmes d'équations différentielles ordinaires*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **14** (1960), p. 117-125.
- [4] Kluczny, C., *Sur certaines familles de courbes en relation avec la théorie des équations différentielles ordinaires I*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **15** (1960), p. 13-40.
- [5] Pliś, A., *On a topological method for studying the behaviour of the integrals of ordinary differential equations*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **2**, 9 (1954), p. 415-418.
- [6] Ważewski, T., *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Ann. Soc. Polon. Math., **20** (1947), p. 279-343.

Streszczenie

Praca niniejsza jest dalszym ciągiem [4].

W przypadku, gdy rodzina F jest jednoznaczna w prawo, to znaczy, gdy każdy punkt zbioru W jest początkiem jedyne go elementu rodziny F wysyczonego w prawo, to $e(P)$ jest funkcją, która punktowi P przyporząd-

⁽²⁾ Nous avons mis à profit l'exemple (13,1) pour illustrer le théorème (13,2), bien que les résultats acquis auraient pu être obtenus en n'appliquant que le théorème (9,2) et un artifice basé sur la remarque (9,1), {33}.

kuje koniec krzywej wysycionej rodziny F wychodzącej z P . Wykazuję, że jeżeli F jest rodziną jednoznaczna w prawo typu $\mathcal{G}_*$, to funkcja $e(P)$ jest ciągła wszędzie tam, gdzie jest określona. Wynika stąd, że do rodzin typu $\mathcal{G}_*$ jednoznacznych w prawo stosują się wyniki podane w pracach [6], [1], [5], [2], [3]. Dla tego przypadku udowadniam inne jeszcze twierdzenie oparte na pojęciu homotopii.

Mówimy, że zbiór Z daje się ściągnąć do punktu P w zbiorze B , jeżeli istnieje homotopia $H(y, s)$, gdzie $y = (t, x)$, taka że dla $y \in Z$ jest $H(y, 0) = y$, $H(y, 1) = P$, a ponadto $H(y, s) \in B$ dla $0 \leq s \leq 1$. Otóż, jeżeli rodzina F typu $\mathcal{G}_*$ jest jednoznaczna w prawo i jeżeli $a \subset U + S$ i $b \subset S$, a ponadto istnieje podzbiór Z zbioru $S - b$, który daje się ściągnąć do punktu w zbiorze $a + S - b$, ale nie daje się ściągnąć do punktu w zbiorze $S - b$, to ze zbioru a wychodzi krzywa asymptotyczna rodziny F lub też istnieje element rodziny F o początku w zbiorze a i końcu w zbiorze b .

W ostatnim rozdziale wprowadzam nowy formalizm, oparty na pojęciu pewnego ciągłego przekształcenia zbiorów, nazwanego przeze mnie wymiataniem, które określam przy pomocy następujących definicji.

Załóżmy, że R' jest podzbiorem zbioru R , a zbiór $A \subset U + R'$. Funkcję $\Gamma(a, s)$ zaliczam do typu $\mathcal{G}_*$, jeżeli są spełnione następujące warunki:

1* Funkcja $\Gamma(a, s)$ jest określona dla wartości argumentu a będących podzbiorem zbioru A i dla dowolnych wartości parametru s , a jej wartości są podzbiorem zbioru A .

2* $\Gamma((t_1, x_1), s) = (t_1, x_1)$ dla $s \leq t_1$, a jeżeli $(t_1, x_1) \in R'$, to $\Gamma((t_1, x_1), s) = (t_1, x_1)$ dla każdego s .

3* Jeżeli punkt (t_1, x_1) nie należy do zbioru R' i $s > t_1$, to $\Gamma((t_1, x_1), s) \subset W\{t = s\} + R'\{t_1 < t < s\}$, gdzie $W\{t = s\}$ oznacza zbiór takich punktów (t, x) zbioru W , że $t = s$, a $R'\{t_1 < t < s\}$ zbiór punktów (t, x) należących do R' takich, że $t_1 < t < s$.

4* $\Gamma(a, s) = \sum_{(t, x) \in a} \Gamma((t, x), s)$.

5* Jeżeli zbiór a jest domknięty i ograniczony, to i zbiór $\Gamma(a, s)$ jest domknięty i ograniczony, a ponadto istnieje liczba s_* taka, że $\Gamma(a, s_*) \subset R'$ i dla $s \geq s_*$ jest $\Gamma(a, s) = \Gamma(a, s_*)$.

6* Jeżeli zbiór a jest spójny, to i zbiór $\Gamma(a, s)$ jest spójny.

7* $\Gamma(\Gamma(a, s_1), s_2) = \Gamma(a, s_2)$ dla $s_1 \leq s_2$.

8* Funkcja $\Gamma(a, s)$ jest jednostajnie ciągła ze względu na s w zbiorze podzbiorów domkniętych i ograniczonych zbioru A , to znaczy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ i dla każdego zbioru domkniętego i ograniczonego $a \subset A$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeżeli $|s_1 - s_2| < \delta$, to $\Gamma(a, s_1) \subset K(\Gamma(a, s_2), \varepsilon)$, gdzie $K(\gamma, \varepsilon)$ oznacza otoczenie zbioru γ o promieniu ε .

9* Funkcja $\Gamma(a, s)$ jest górnio półciągła w sensie inkluzji ze względu na a w zbiorze wszystkich podzbiorów domkniętych i ograniczonych

zbioru A , to znaczy, że jeżeli $a_1 \supset a_2 \supset \dots$ jest ciągiem zstępującym zbiorów domkniętych, ograniczonych i niepustych zawartych w zbiorze A oraz $\prod_{i=1}^{\infty} a_i = a$, to dla każdego s jest $\prod_{i=1}^{\infty} \Gamma(a_i, s) \subset \Gamma(a, s)$.

Przy tych samych założeniach co do zbiorów R' i A zaliczamy funkcję $\Gamma(a, s)$ do typu $\mathcal{G}$, jeżeli spełnia warunki 1^* oraz $3^* - 9^*$, a zamiast 2^* warunek następujący:

$2^{**} \Gamma((t_1, x_1), s) = (t_1, x_1)$ dla $s \leq t_1$, a jeżeli $(t_1, x_1) \in R'$, to $(t_1, x_1) \in \Gamma((t_1, x_1), s) \subset R'$.

O funkcjach typu $\mathcal{G}_*$ czy $\mathcal{G}$ mówię, że wymiatają zbiór A w sobie na R' i podaję następującą definicję:

Funkcja $\Gamma(a, s)$ typu $\mathcal{G}_*$ czy $\mathcal{G}$ wymiata zbiór a na R' w obrębie zbioru C , jeżeli istnieje zbiór A taki, że funkcja $\Gamma(a, s)$ wymiata go w sobie na R' , a ponadto $a \subset A \subset C$.

Dowodzę, że jeżeli rodzina F jest typu $\mathcal{G}_*$ a zbiór $b \subset W$ i $a \subset U + S$ i jeżeli nie istnieje funkcja $\Gamma(a, s)$ typu $\mathcal{G}_*$ wymiatająca zbiór a na R' w obrębie zbioru $U + S - b$, to ze zbioru a wychodzi krzywa asymptotyczna rodziny F lub też istnieje element rodziny F o początku w zbiorze a i końcu w zbiorze b . Jeżeli w sformułowaniu tego twierdzenia zastąpimy $\mathcal{G}_*$ przez $\mathcal{G}$, a S przez T , to otrzymane w ten sposób twierdzenie będzie także prawdziwe.

Twierdzenia te obejmują pewne przypadki, do których nie można stosować wprost teorii rozwiniętej w pierwszej części pracy niniejszej.

Резюме

Эта работа является продолжением работы [4].

В случае, когда семейство F однозначно вправо, в том смысле что всякая точка множества W является началом единственного элемента семейства F высущенного вправо, то $e(P)$ является функцией, которая точке P ставит в соответствие конец высущенной кривой семейства F исходящей из точки P .

Доказываю, что если F семейство однозначно вправо типа $\mathcal{G}_*$, то функция $e(P)$ непрерывна всюду где является определенной. Отсюда следует, что для семейств типа $\mathcal{G}_*$ однозначных вправо имеют место результаты данные в работах [6], [1], [5], [2], [3]. Кроме этого доказываю, что при этих предположениях имеет место еще одна теорема использующая понятие гомотопии.

Скажем, что множество Z можно стянуть в точку P во множестве B если существует гомотопия $H(y, s)$, где $y = (t, x)$ такая, что $H(y, 0) = y$, $H(y, 1) = P$ для $y \in Z$ и $H(y, s) \in B$ для $0 \leq s \leq 1$. Если теперь, семейство F типа $\mathcal{G}_*$ однозначно вправо, а $a \subset U + S$, $b \subset S$ и кроме

того существует подмножество Z множества $S-b$ которое можно стянуть в точку во множестве $a+S-b$, но не можно стянуть в точку во множестве $S-b$, то из множества a исходит асимптотическая кривая семейства F или существует элемент семейства F с началом во множестве a и концом во множестве b .

В последней главе введен мною новый формализм, опирающийся на понятие некоторого непрерывного преобразования множеств, названного мною выметанием, которое определяю при помощи следующих определений.

Предположим, что R' подмножество множества R , а множество A такое, что $A \subset U+R'$. Функцию $\Gamma(a, s)$ мы считаем принадлежащей типу $\mathcal{G}$, если исполняются следующие условия:

1* Функция $\Gamma(a, s)$ определена для переменной a , являющейся подмножеством множества A и для произвольных значений параметра s , а её значениями являются подмножества множества A .

2* $\Gamma((t_1, x_1), s) = (t_1, x_1)$ для $s \leq t_1$, и если $(t_1, x_1) \in R'$ то $\Gamma((t_1, x_1), s) = (t_1, x_1)$ для всякого s .

3* Если точка (t_1, x_1) не принадлежит множеству R' и $s > t_1$ то $\Gamma((t_1, x_1), s) \subset W\{t=s\} + R'\{t_1 < t < s\}$, где $W\{t=s\}$ множество точек $(t, x) \in W$ таких, что $t=s$, а $R'\{t_1 < t < s\}$ множество точек $(t, x) \in R'$ таких, что $t_1 < t < s$.

4* $\Gamma(a, s) = \sum_{(t, x) \in a} \Gamma((t, x), s)$.

5* Если множество a замкнуто и ограничено, то и множество $\Gamma(a, s)$ замкнуто и ограничено, и кроме того существует число s_* такое, что $\Gamma(a, s_*) \subset R'$ и для $s \geq s_*$ имеет место $\Gamma(a, s) = \Gamma(a, s_*)$.

6* Если множество a связно, то и множество $\Gamma(a, s)$ связно.

7* $\Gamma(\Gamma(a, s_1), s_2) = \Gamma(a, s_2)$ для $s_1 \leq s_2$.

8* $\Gamma(a, s)$ является равномерно непрерывной функцией переменной s во множестве замкнутых и ограниченных подмножеств множества A , это значит, что для всякого $\epsilon > 0$ и для всякого замкнутого и ограниченного множества $a \subset A$ существует $\delta > 0$ такое, что, если $|s_1 - s_2| < \delta$, то $\Gamma(a, s_1) \subset K(\Gamma(a, s_2), \epsilon)$ где $K(\gamma, \epsilon)$ обозначает окрестность множества γ радиуса ϵ .

9* $\Gamma(a, s)$ является полунепрерывной сверху в смысле инклюзии функцией переменной a во множестве подмножеств замкнутых и ограниченных множества A , это значит, если $a_1 \supset a_2 \supset \dots$ последовательность замкнутых, ограниченных, непустых множеств, $a_i \subset A$ и $\bigcap_{i=1,2,\dots} a_i = a$, то для всякого s имеет место $\bigcap_{i=1}^{\infty} \Gamma(a_i, s) \subset \Gamma(a, s)$.

При тех-же предположениях относительно множеств R' и A считаем функцию $\Gamma(a, s)$ принадлежащей типу $\mathcal{G}$, если удовлетво-

ряет условиям 1^* , 3^*-9^* но вместо 2^* удовлетворяет следующему условию:

2^{**} $\Gamma((t_1, x_1), s) = (t_1, x_1)$ для $s \leq t_1$, и если $(t_1, x_1) \in R'$ то $(t_1, x_1) \in \Gamma((t_1, x_1), s) \subset R'$.

О функциях типа $\mathcal{G}_*$ или $\mathcal{G}$ я говорю, что выметают множество A в себе на R' .

Скажем, что функция $\Gamma(a, s)$ типа $\mathcal{G}_*$ или $\mathcal{G}$ выметает множество a на R' в пределах множества C , если существует множество A такое, что функция $\Gamma(a, s)$ выметает его в себе на R' и $a \subset A \subset C$.

Доказываю, что если семейство F типа $\mathcal{G}_*$, $b \subset W$, $a \subset U+S$, и не существует функция $\Gamma(a, s)$ типа $\mathcal{G}_*$ выметающая множество a на R' в пределах множества $U+S-b$, то из множества a исходит асимптотическая кривая семейства F или существует элемент семейства F с началом во множестве a и концом во множестве b . Если в формулировке этой теоремы заменим $\mathcal{G}_*$ через $\mathcal{G}$, а S через T , то полученная теорема тоже верна.

Эти теоремы заключают в себе некоторые случаи, к которым нельзя прямо применять теорию развитую в первой части этой работы.