ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XV, 7 SECTIO A 1961

Z Katedry Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

JAN KISYŃSKI

Sur l'existence des solutions de l'équation $\partial^2x/\partial x\partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$

O istnieniu rozwiązań równania $\partial^2x/\partial x\partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$

О существовании решений уравнения $\partial^2z/\partial x\partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$

I. Problème (S)

La présente note concerne l'existence des solutions d'un problème posé par Mlle Sophie Szmydt [8]. Nous l'énoncerons sous la forme que voici:

Problème (S). *Désignons par R un rectangle: $\alpha_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2$, $\beta_1 \leqslant y \leqslant \beta_2$, où $\alpha_1 < \alpha_2$ et $\beta_1 < \beta_2$, et soit $f(x, y, z, p, q)$ une fonction continue pour $(x, y) \in R$ et z, p, q arbitraires, $G(x, z, q)$ une fonction continue pour $\alpha_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2$, z, q arbitraires et $H(y, z, p)$ une fonction continue pour $\beta_1 \leqslant y \leqslant \beta_2$ et z, p quelconques. Supposons, de plus, que les fonctions $g(x)$ et $h(y)$ soient continues pour $\alpha_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2$, ou bien $\beta_1 \leqslant y \leqslant \beta_2$ respectivement, et qu'elles satisfassent aux conditions suivantes: $\beta_1 \leqslant g(x) \leqslant \beta_2$ pour $x \in \langle\alpha_1, \alpha_2\rangle$ et $\alpha_1 \leqslant h(y) \leqslant \alpha_2$ pour $y \in \langle\beta_1, \beta_2\rangle$. Enfin, soit z^0 un nombre arbitraire et $(x^0, y^0) \in R$.*

Or, il s'agit de trouver une fonction $z(x, y)$, appelée solution du problème (S), qui soit continue dans R avec ses dérivées partielles $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ et $\partial^2 z/\partial x\partial y$, et qui vérifie l'équation

$$\partial^2z/\partial x\partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y) \tag{1}$$

dans le rectangle R et satisfasse aux conditions

$$\partial z/\partial x = G(x, z, \partial z/\partial y) \text{ pour } x \in \langle a_1, a_2\rangle,\ y = g(x),$$
$$\partial z/\partial y = H(y, z, \partial z/\partial x) \text{ pour } y \in \langle \beta_1, \beta_2\rangle,\ x = h(y),$$
$$z(x^0, y^0) = z^0.$$

II. Théorème sur l'existence de solutions du problème (S)

Nous admettons l'hypothèse suivante:

Hypothèse 1. *Les fonctions* $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n(x) - \lambda^{n+1}(x)|$, $T(y) = \sum_{n=0}^{\infty} |\mu^n(y) - \mu^{n+1}(y)|$, *où* $\lambda^0(x) = x$, $\lambda^{n+1}(x) = h\Big(g\big(\lambda^n(x)\big)\Big)$, $\mu^0(y) = y$ *et* $\mu^{n+1}(y) = g\Big(h\big(\mu^n(y)\big)\Big)$, *sont bornées dans les intervalles* $a_1 \leqslant x \leqslant a_2$, $\beta_1 \leqslant y \leqslant \beta_2$.

Hypothèse 2. *Pour* $x \in \langle a_1, a_2\rangle$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2\rangle$ *et pour* $z, p, \bar{p}, q, \bar{q}$ *arbitraires on a*

$$|G(x, z, q) - G(x, z, \bar{q})| \leqslant A \cdot |q - \bar{q}|,$$
$$|H(y, z, p) - H(y, z, \bar{p})| \leqslant B \cdot |p - \bar{p}|,$$

où A et B sont des constantes positives telles que

$$A \cdot B < 1.$$

Hypothèse 3. *Pour* $x \in \langle a_1, a_2\rangle$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2\rangle$ *et* z, p, q *arbitraires on a*

(2) $$|f(x, y, z, p, q)| \leqslant \Phi(|z| + |p| + |q|),$$

(3) $$|G(x, z, q)| \leqslant \Phi(|z|) + C \cdot |q|,\ |H(y, z, p)| \leqslant \Phi(|z|) + D \cdot |p|,$$

où C et D sont des constantes positives telles que

$$C \cdot D < 1,$$

tandis que $\Phi(t)$ est une fonction non négative et non décroissante pour $t \in \langle 0, +\infty)$ *telle que l'on a*

$$\lim_{t \to +\infty} t^{-1}\Phi(t) = 0$$

ou bien

$$\limsup_{t \to +\infty} t^{-1}\Phi(t) = M < +\infty \text{ et } \max(a_2 - a_1, \beta_2 - \beta_1) <$$
$$< [1 + (1 - CD)/M(C + D + 2)]^{1/2} - 1.$$

Hypothèse 4. *La fonction* $\omega(\delta)$ *est continue et non décroissante pour* $\delta \in \langle 0, +\infty)$, *et elle satisfait aux conditions* $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta) > 0$ *pour* $\delta > 0$ *et*

$$\int_0^\delta \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \text{ pour tout } \delta > 0.$$

Dans [6] nous avons démontré (théorème 1) que si les hypothèses 1-4 sont remplies et si $|f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})| \leqslant \omega(|p-\bar{p}| + |q-\bar{q}|)$ pour $(x, y) \in R$ et $z, p, \bar{p}, q, \bar{q}$ arbitraires, alors le problème (5) a une solution. Un travail de F. Guglielmino [5] nous a suggéré l'idée d'une généralisation du résultat mentionné, à savoir le théorème suivant:

Théorème. *Supposons que les hypothèses 1-4 soient remplies et que l'on ait, pour* $(x, y) \in R$ *et* $z, p, \bar{p}, q, \bar{q} \in (-\infty, +\infty)$

(4) $f(x, y, z, \bar{p}, q) - f(x, y, z, p, q) \leqslant \omega(\bar{p} - p)$ *lorsque* $\bar{p} > p$ *et* $y \geqslant g(x)$,
(5) $f(x, y, z, \bar{p}, q) - f(x, y, z, p, q) \leqslant \omega(p - \bar{p})$ *lorsque* $\bar{p} < p$ *et* $y \leqslant g(x)$,
(6) $f(x, y, z, p, \bar{q}) - f(x, y, z, p, q) \leqslant \omega(\bar{q} - q)$ *lorsque* $\bar{q} > q$ *et* $x \geqslant h(y)$,
(7) $f(x, y, z, p, \bar{q}) - f(x, y, z, p, q) \leqslant \omega(q - \bar{q})$ *lorsque* $\bar{q} < q$ *et* $x \leqslant h(y)$,

Dans ces hypothèses il existe une solution du problème (S).

III. Solution du problème (S) comme point invariant d'une opération T

Soit Σ un espace de Banach de fonctions $z(x, y)$ continues admettant une dérivée $\partial z/\partial x$ continue dans R, avec la norme

$$\|z\| = \max_R |z(x, y)| + \max_R |\partial z(x, y)/\partial x|.$$

Nous désignons par T_1 l'opération qui fait correspondre à une fonction $z \in \Sigma$ une fonction $q \in \Sigma$ satisfaisant aux conditions

(8) $\partial q/\partial x = f(x, y, z(x, y), \partial z(x, y)/\partial x, q)$ pour $(x, y) \in R$,
(9) $q(h(y), y) = H(y, z(h(y), y), \partial z(h(y), y)/\partial x)$ pour $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$.

En vertu des inégalités (6), (7) et (2), l'opération T_1 est bien définie et continue dans l'espace Σ; ceci résulte des théorèmes bien connus sur l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires et du fait que ces solutions dépendent d'une façon continue des paramètres contenus dans les équations.

Nous désignons ensuite par T_2 l'opération faisant correspondre à un couple de fonctions $(z, q) \in \Sigma \times \Sigma$ une fonction $p(x, y)$ vérifiant le système d'équations

(10) $\qquad \partial p/\partial y = f(x, y, z(x, y), p, q(x, y))$ pour $(x, y) \in R$,
(11) $\qquad p(x, g(x)) = G\big(x, z(x, g(x)), q(x, g(x))\big)$ pour $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$.

En vertu de (4), (5) et (2) l'opération T_2 transforme le produit cartésien $\Sigma\times\Sigma$ en l'espace des fonctions continues dans R avec la norme $\|p\| = \max_R |p(x, y)|$.

Enfin, désignons par T l'opération qui fait correspondre à une fonction $z\in\Sigma$ la fonction

$$z^*(x, y) = z^0 + \int_{y^0}^{y} q(x^0, v)\,dv + \int_{x^0}^{x} p(u, y)\,du, \tag{12}$$

où $q = T_1 z$ et $p = T_2(z, q)$. Les opérations T_1 et T_2 étant continues, la troisième opération T l'est aussi; on a, en outre, $T(\Sigma)\subset\Sigma$.

Lemme 1. *Pour qu'une fonction $z\in\Sigma$ soit une solution du problème* (S) *il faut et il suffit que l'on ait $z = T(z)$.*

Ce lemme rend possible l'application de la méthode du point fixe de Schauder dans la démonstration de notre théorème. L'opération T introduite par C. Ciliberto dans [1], [2] et [3], et ensuite utilisée par d'autres mathématiciens italiens, comme F. Guglielmino [4], [5] et A. Zitarosa [9], a permis d'obtenir des théorèmes d'existence bien généraux pour divers problèmes concernant l'équation (1). On n'a pas réussi, autant que nous sachions, à obtenir des résultats aussi forts en appliquant des opérations plus simples, dont les définitions n'exigent pas la résolution d'équations différentielles auxiliaires.

D é m o n s t r a t i o n du lemme 1. Supposons d'abord que $z\in\Sigma$ et $z = T(z)$. Ceci veut dire qu'il existe des fonctions p et q, continues dans le rectangle R avec leurs dérivées $\partial p/\partial y$ et $\partial q/\partial x$, satisfaisant aux équations (8), (9), (10) et (11), et telles que l'on ait

$$z(x, y) = z^0 + \int_{y^0}^{y} q(x^0, v)\,dv + \int_{x^0}^{x} p(u, y)\,du. \tag{13}$$

D'après (13) on a $\partial z/\partial x = p$, d'où, en vertu de (8) et (10), il s'ensuit $\partial p/\partial y = \partial q/\partial z$ et l'intégrale curviligne $\int p\,dx + q\,dy$ est indépendante du chemin d'intégration. Donc

$$z(x, y) = z^0 + \int_{x^0}^{x} p(u, y^0)\,du + \int_{y^0}^{y} q(x, v)\,dv$$

d'où $\partial z/\partial y = q$. Ainsi, nous avons établi que z est une solution du problème (S).

Supposons, réciproquement, que z soit une solution de ce problème. Alors $\partial z/\partial y = T_1 z$, $\partial z/\partial x = T_2(z, \partial z/\partial y) = T_2(z, T_1 z)$ et, par conséquent, pour $z^* = Tz$, nous avons

$$z^*(x, y) = z^0 + \int_{y0}^{y} \partial z(x^0, v)/\partial v dv + \int_{x0}^{x} \partial z(u, y)/\partial u du,$$

d'où $z^* = z$.

IV. Un lemme sur les inégalités intégrales

Lemme 2. *Soit $F(t, s)$ une fonction continue pour $t \in \langle t_1, t_2\rangle$ et $s \in \langle 0, +\infty)$, non négative et non décroissante en s, et soit $t_0 \in \langle t_1, t_2\rangle$ un nombre tel, que, pour tout $s_0 \in \langle 0, +\infty)$ et tout $\varepsilon > 0$, l'équation $ds/dt = F(t, s)$ admette une et une seule solution définie dans l'intervalle $\langle t_0, \min(t_0+\varepsilon, t_2)\rangle$, où $s(t_0) = s_0$, et que l'équation $ds/dt = -F(t, s)$ admette une solution unique définie dans $\langle \max(t_0-\varepsilon, t_1), t_0\rangle$ telle que $s(t_0) = s_0$.*

Si les fonctions continues $u(t)$ et $v(t)$ satisfont dans l'intervalle $\langle t_1, t_2\rangle$ aux inégalités

$$0 \leqslant u(t) \leqslant c_0 + \left| \int_{t_0}^{t} F(\tau, u(\tau)) d\tau \right|,$$

$$v(t) \geqslant c_0 + \left| \int_{t_0}^{t} F(\tau, v(\tau)) d\tau \right|,$$

où c_0 est une constante non négative, alors $u(t) \leqslant v(t)$ dans l'intervalle $\langle t_1, t_2\rangle$

Démonstration. Il suffit d'appliquer aux fonctions

$$u_1(t) = c_0 + \left| \int_{t_0}^{t} F(\tau, u(\tau)) d\tau \right|, \quad v_1(t) = c_0 + \left| \int_{t_0}^{t} F(\tau, v(\tau)) d\tau \right|$$

un théorème bien connu sur les inégalités différentielles.

Une autre démonstration s'obtient par un raisonnement analogue à celui contenu dans la démonstration du théorème 1 dans la note [7].

V. L'ensemble W

A partir de ce moment, les hypothèses faites dans l'énoncé du théorème du chapitre II seront supposées remplies.

Lemme 3. *Il existe des constantes P et Q positives et telles que, si $z \in \Sigma$, $z^* = Tz$, $q = T_1 z$ et si*

$$|z(x, y)| \leqslant |z^0| + l\cdot(P+Q), \tag{14}$$

$$|\partial z(x, y)/\partial x| \leqslant P \tag{15}$$

pour $(x,y)\in R$, *où* $l = \max(\alpha_2-\alpha_1, \beta_2-\beta_1)$, *alors*

$$|z^*(x,y)| \leqslant |z^0| + l\cdot(P+Q),$$

$$|\partial z^*(x,y)/\partial x| \leqslant P, \quad |q(x,y)| \leqslant Q,$$

pour $(x,y)\in R$.

L'ensemble de toutes les fonctions $z\in\Sigma$, satisfaisant aux conditions (14) et (15) sera désigné par W.

Démonstration du lemme 2. Comme dans la note [6], p. 83, nous constatons qu'il existe deux nombres positif P et Q satisfaisant aux inégalités

$$\begin{aligned} &l\cdot\Phi((l+1)\cdot(P+Q)+|z^0|)+\Phi(l\cdot(P+Q)+|z^0|)+CQ \leqslant P, \\ (16)\qquad &l\cdot\Phi((l+1)\cdot(P+Q)+|z^0|)+\Phi(l\cdot(P+Q)+|z^0|)+DP \leqslant Q. \end{aligned}$$

Si $z\in W$, la fonction $q = T_1 z$ satisfait, en vertu de (2) et (3), à l'inégalité

$$|q(x,y)| \leqslant \Big|\int_{h(y)}^{x} \Phi\big(l\cdot(P+Q)+|z^0|+P+|q(u,y)|\big)du\Big| + \Phi\big(l\cdot(P+Q)+|z^0|\big)+ \\ +DP.$$

D'autre part la fonction $\bar{q}(x,y) = \text{const} = Q$ remplit, d'après (16), l'inégalité

$$\bar{q}(x,y) \geqslant \Big|\int_{h(y)}^{x} \Phi\big(l\cdot(P+Q)+|z^0|+P+|q(u,y)|\big)du\Big| + \\ +\Phi\big(l\cdot(P+Q)+|z^0|\big)+DP$$

et, en vertu du lemme 2, on a

$$(17)\qquad |q(x,y)| \leqslant Q.$$

Or, sachant déjà que l'inégalité (17) est vérifiée pour $q = T_1 z$, où $z\in W$, nous démontrons, comme pour $p = T_2(z,q)$, où $z\in W$, que l'on a $|p(x,y)| \leqslant P$, ce qui achève la démonstration, eu égard à (12).

VI. Ensemble compact Z

Admettons que

$$\Pi = \{(x,y,z,p,q):(x,y)\in R, |z| \leqslant |z^0|+l\cdot(P+Q), |p| \leqslant P, |q| \leqslant Q\},$$

où P et Q sont des nombres positifs satisfaisant à la condition contenue dans l'énoncé du lemme 3, et posons

$$L = \max_{\pi} |f(x, y, z, p, q)|,$$

$$\varphi(\delta) = \min(\omega(\delta), 2L+1).$$

Désignons par $\Omega(\delta)$ le module de continuité commun des fonctions $f(x, y, z, p, q)$, $G(x, z, q)$, $H(y, z, p)$, $g(x)$ et $h(y)$, où $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, $|z| \leqslant |z^0| + l\cdot(P+Q)$, $|p| \leqslant P$ et $|q| \leqslant Q$. Cela veut dire que la fonction $\Omega(\delta)$ est continue et non décroissante pour $\delta \in \langle 0, +\infty)$, $\Omega(0) = 0$ et

$$|f(x, y, z, p, q) - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| \leqslant \Omega(|x-\bar{x}| + |y-\bar{y}| + |z-\bar{z}| + \\ + |p-\bar{p}| + |q-\bar{q}|),$$

$$|G(x, z, q) - G(\bar{x}, \bar{z}, \bar{q})| \leqslant \Omega(|x-\bar{x}| + |z-\bar{z}| + |q-\bar{q}|),$$
$$|H(y, z, p) - H(\bar{y}, \bar{z}, \bar{p})| \leqslant \Omega(|y-\bar{y}| + |z-\bar{z}| + |p-\bar{p}|),$$
$$|g(x) - g(\bar{x})| \leqslant \Omega(|x-\bar{x}|),$$
$$|h(y) - h(\bar{y})| \leqslant \Omega(|y-\bar{y}|),$$

pour $x, \bar{x} \in \langle a_1, a_2 \rangle$, $y, \bar{y} \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, $|z|, |\bar{z}| \leqslant |z^0| + l\cdot(P+Q)$, $|p|, |\bar{p}| \leqslant P$ et $|q|, |\bar{q}| \leqslant Q$. Supposons la fonction $\Omega(\delta)$ bornée dans l'intervalle $\langle 0, +\infty)$, ce qui ne nuira pas à la généralité. Posons enfin

$$d(\delta) = l\cdot\Omega\big((1+P+Q+L+lL)\delta\big) + L\Omega(\delta) + \\ + \Omega\big((1+P+Q+L+lL)\delta + (P+Q+lL)\Omega(\delta)\big).$$

Or, du lemme 2 dans la note [6], p. 80, il résulte immédiatement qu'il existe deux fonctions $\varepsilon_1(x, y, \delta)$ et $\varepsilon_2(x, y, \delta)$ définies pour $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ et $\delta \in \langle 0, +\infty)$, non négatives, non décroissantes par rapport à δ et telles que, pour tout $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$ et tout $\delta \geqslant 0$ fixés, la fonction $\varepsilon_1(x, y, \delta)$ est continue par rapport à y dans l'intervalle $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, que pour tout $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ et tout $\delta \geqslant 0$ fixés la fonction $\varepsilon_2(x, y, \delta)$ est continue par rapport à x dans l'intervalle $\langle a_1, a_2 \rangle$, que pour $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ et $\delta \geqslant 0$ les inégalités

$$\text{(18)} \qquad \varepsilon_1(x, y, \delta) \geqslant d(\delta) + A\cdot\varepsilon_2(x, g(x), \Omega(\delta)) + \Big|\int_{g(x)}^{y} \varphi\big(\varepsilon_1(x, v, \delta)\big)dv\Big|,$$

$$\text{(19)} \qquad \varepsilon_2(x, y, \delta) \geqslant d(\delta) + B\cdot\varepsilon_1(h(y), y, \Omega(\delta)) + \Big|\int_{h(y)}^{x} \varphi\big(\varepsilon_2(u, y, \delta)\big)du\Big|,$$

sont vérifiées et que l'on a

$$\lim_{\delta\to 0+}\Big(\sup_{\substack{\alpha_1\leqslant x\leqslant \alpha_2\\ \beta_1\leqslant y\leqslant\beta_2}}\varepsilon_1(x,y,\delta)\Big)=0.$$

Ceci posé, soit Z l'ensemble contenu dans l'espace Σ, formé de toutes les fonctions $z(x,y)$ satisfaisant pour $x,\bar{x}\in\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$ et $y,\bar{y}\in\langle\beta_1,\beta_2\rangle$ aux conditions

$$|z(x,y)|\leqslant|z^0|+l\cdot(P+Q),\quad |\partial z(x,y)/\partial x|\leqslant P,$$
$$|z(x,y)-z(x,\bar{y})|\leqslant(Q+lL)\cdot|y-\bar{y}|,$$
$$|\partial z(x,y)/\partial x-\partial z(x,\bar{y})/\partial x|\leqslant L|y-\bar{y}|,$$
$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial z}{\partial x}(\bar{x},y)\right|\leqslant\varepsilon_1(x,y,|x-\bar{x}|).$$

L'ensemble Z est convexe, fermé et, en vertu du théorème d'Arzela, compact dans l'espace Σ.

VII. Inégalités intégrales pour les accroissements des fonctions p et q

Lemme 4. *Si $z\in Z$, $q=T_1z$ et $p=T_2(z,q)$, alors, pour $x,\bar{x}\in\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle$ et $y,\bar{y}\in\langle\beta_1,\beta_2\rangle$, on a*

$$(20)\qquad |q(x,y)-q(x,\bar{y})|\leqslant d(|y-\bar{y}|)+B\cdot\varepsilon_1\big(h(y),y,\Omega(|y-\bar{y}|)\big)+\left|\int_{h(y)}^{x}\varphi\big(|q(u,y)-q(u,\bar{y})|\big)du\right|,$$

$$(21)\qquad |p(x,y)-p(\bar{x},y)|\leqslant d(|x-\bar{x}|)+A\cdot|q(x,g(x))-q(x,g(\bar{x}))|+\left|\int_{g(x)}^{y}\varphi\big(|p(x,v)-p(\bar{x},v)|\big)dv\right|.$$

Démonstration. Nous allons vérifier l'inégalité (20) pour $x\geqslant h(y)$ et $q(x,y)\leqslant q(x,\bar{y})$. Les vérifications de cette inégalité pour $x\geqslant h(y)$ et $q(x,y)>q(x,\bar{y})$, pour $x<h(y)$ et $q(x,y)\leqslant q(x,\bar{y})$, et pour $x<h(y)$ et $q(x,y)>q(x,\bar{y})$ seraient analogues, aussi bien que les démonstrations de l'inégalité (21).

Or, supposons, que $z\in Z$, $q=T_1z$, $x\in\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$, $y,\bar{y}\in\langle\beta_1,\beta_2\rangle$, $x\geqslant h(y)$ et $q(x,y)\leqslant q(x,\bar{y})$ et soit $\bar{x}$ le plus petit nombre de l'intervalle $\langle h(y),x\rangle$ pour lequel $q(u,y)\leqslant q(u,\bar{y})$ lorsque $u\in\langle\bar{x},x\rangle$. Si $q(\bar{x},y)=q(\bar{x},\bar{y})$, nous avons, d'après les définitions de l'ensemble Z et des fonctions $\varphi(\delta)$, $\Omega(\delta)$ et $\bar{d}(\delta)$,

$$|q(x,y)-q(x,\bar{y})| = q(x,\bar{y})-q(x,y) =$$

$$= \int_{\bar{x}}^{x}\Big\{f\Big(u,\bar{y},z(u,\bar{y}),\frac{\partial z}{\partial x}(u,\bar{y}),q(u,\bar{y})\Big)-$$

$$-f\Big((u,y,z(u,y),\frac{\partial z}{\partial x}(u,y),q(u,\bar{y})\Big)\Big\}du+$$

$$+\int_{\bar{x}}^{x}\Big\{f\Big(u,y,z(u,y),\frac{\partial z}{\partial x}(u,y),q(u,\bar{y})\Big)-$$

$$-f\Big(u,y,z(u,y)\frac{\partial z}{\partial x}(u,y),q(u,y)\Big)\Big\}du \leqslant$$

$$\leqslant l\cdot\Omega\big((1+Q+lL+L)\cdot|y-\bar{y}|\big)+\int_{\bar{x}}^{x}\varphi\big(q(u,\bar{y})-q(u,y)\big)du$$

$$\leqslant \bar{d}(|y-\bar{y}|)+\Big|\int_{h(y)}^{x}\varphi\big(|q(u,y)-q(u,\bar{y})|\big)du\Big|.$$

Si $q(\bar{x},y) < q(\bar{x},\bar{y})$, alors $\bar{x} = h(y)$ et

$$|q(x,y)-q(x,\bar{y})| = q(x,\bar{y})-q(x,y) =$$

$$= \Big\{H\Big(\bar{y},z(h(\bar{y}),\bar{y}),\frac{\partial z}{\partial x}(h(\bar{y}),\bar{y})\Big)-H\Big(y,z(h(y),y),\frac{\partial z}{\partial x}(h(\bar{y}),y)\Big)\Big\}+$$

$$+\Big\{H\Big(y,z(h(y),y),\frac{\partial z}{\partial x}(h(\bar{y}),y)\Big)-H\Big(y,z(h(y),y),\frac{\partial z}{\partial x}(h(y),y)\Big)\Big\}+$$

$$+\int_{h(\bar{y})}^{h(y)} f\Big(u,\bar{y},z(u,\bar{y}),\frac{\partial z}{\partial x}(u,\bar{y}),q(u,\bar{y})\Big)du+$$

$$+\int_{h(y)}^{x}\Big\{f\Big(u,\bar{y},z(u,\bar{y}),\frac{\partial z}{\partial x}(u,\bar{y}),q(u,\bar{y})\Big)-$$

$$-f\Big(u,y,z(u,y),\frac{\partial z}{\partial x}(u,y),q(u,\bar{y})\Big)\Big\}du$$

$$+\int_{h(y)}^{x}\left\{f\left(u,y,z(u,y),\frac{\partial z}{\partial x}(u,y),q(u,\bar y)\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(u,y,z(u,y),\frac{\partial z}{\partial x}(u,y),q(u,y)\right)\right\}du$$

$$\leqslant \Omega\big((1+Q+lL+L)\cdot|y-\bar y|+P\Omega(|y-\bar y|)\big)+B\cdot\varepsilon_1\big(h(y),y,\Omega(|y-\bar y|)\big)+$$

$$+L\Omega(|y-\bar y|)+l\cdot\Omega\big((1+Q+lL+L)\cdot|y-\bar y|\big)+\int_{h(y)}^{x}\varphi\big(q(u,\bar y)-q(u,y)\big)du$$

$$\leqslant d(|y-\bar y|)+B\cdot\varepsilon_1\big(h(y),y,\Omega(|y-\bar y|)\big)+\left|\int_{h(y)}^{x}\varphi\big(|q(u,y)-q(u,\bar y)|\big)du\right|.$$

Ceci achève la vérification de l'inégalité (20), pour $x\geqslant h(y)$ et $q(x,y)\leqslant$ $\leqslant q(x,\bar y)$.

VIII. Inclusion $T(Z)\subset Z$

Lemme 5. *On a* $T(Z)\subset Z$.

Démonstration. Etant supposé que $z\in Z$, $z^*=Tz$, $q=T_1z$, on a, d'après le lemme 3, $|z^*(x,y)|\leqslant|z^0|+l(P+Q)$, $|\partial z^*(x,y)/\partial x|\leqslant P$, $|q(x,y)|\leqslant Q$ pour $(x,y)\in R$, d'où, en vertu de (12) et de la définition du nombre L, on a

$$|\partial z^*(x,y)/\partial x-\partial z^*(x,\bar y)/\partial x|\leqslant L\cdot|y-\bar y|,\ |z^*(x,y)-z^*(x,\bar y)|\leqslant (Q+lL)|y-\bar y|,$$

pour $x\in\langle a_1,a_2\rangle$ et $y,\bar y\in\langle\beta_1,\beta_2\rangle$. Pour démontrer que $T(Z)\subset Z$ il reste à prouver que

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial z}{\partial x}(\bar x,y)\right|\leqslant\varepsilon_1(\bar x,y,|x-\bar x|) \tag{22}$$

pour $x,\bar x\in\langle a_1,a_2\rangle$ et $y\in\langle\beta_1,\beta_2\rangle$. Mais il résulte de (19), (20) et du lemme 2 que $|q(x,y)-q(x,\bar y)|\leqslant\varepsilon_2(x,y,|y-\bar y|)$, pour $x\in\langle a_1,a_2\rangle$ et $y,\bar y\in\langle\beta_1,\beta_2\rangle$, donc, en vertu de (21), la fonction $\partial z^*/\partial x=p=T_2(z,q)$ satisfait à l'inégalité

$$\left|\frac{\partial z^*}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial z^*}{\partial x}(\bar x,y)\right|\leqslant d(|x-\bar x|)+A\cdot\varepsilon_2\big(x,g(x),\Omega(|x-\bar x|)\big)+$$

$$+\left|\int_{g(x)}^{y}\varphi\left(\left|\frac{\partial z^*}{\partial x}(x,v)-\frac{\partial z^*}{\partial x}(\bar x,v)\right|\right)dv\right|,$$

pour $x,\bar x\in\langle a_1,a_2\rangle$ et $y\in\langle\beta_1,\beta_2\rangle$ et, en vertu de (18) et d'après le lemme 2, il en résulte l'inégalité (22).

IX. Démonstration du théorème sur l'existence des solutions du problème (S)

L'opération T est continue dans l'espace de Banach Σ, l'ensemble $Z \subset \Sigma$ est non vide, convexe, fermé et compact dans cet espace, et $T(Z) \subset Z$, donc, en vertu du théorème de Schauder bien connu du point fixe, il existe une fonction $z \in Z$, telle que $Tz = z$ et, d'après le lemme 1, cette fonction est la solution du problème (S).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ciliberto, C., *Il problema di Darboux per un'equazione di tipo iperbolico in due variabili*, Ricerche di Mat., **4** (1955), p. 15-29.

[2] — *Sul problema di Darboux per l'equazione $s = f(x, y, z, p, q)$*, Rend. Acc. Sci. di Napoli, Ser 4_a, **22** (1955) p. 221-225.

[3] — *Su alcuni problemi relativi ad una equazione di tipo iperbolico in due variabili*, *Boll.* Unione Mat. Italiana, **3**, 11 (1956), p. 383-393.

[4] Guglielmino, F., *Sul problema di Darboux*, Ricerche di Matematica, **8** (1959), p. 180-196.

[5] — *Sul problema di Goursat*, Ricerche di Matematica, **9** (1960), p. 91-105.

[6] Kisyński, J., *Sur l'existence des solutions d'un problème de M^lle Z. Szmydt relatif à l'équation $\partial^2 z/\partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$*, Ann. Univ. Mariae Curie Skłodowska, Sectio A, **12**, 7 (1958), p. 67-106.

[7] Opial, Z., *Sur un système d'inégalités intégrales*, Ann. Polon. Math., **3**, 2 (1957), p. 200-209.

[8] Szmydt, Z., *Sur un nouveau type des problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, **4**, 2 (1956), p. 67-72.

[9] Zitarosa, A., *Su alcuni sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine*, Ricerche di Matematica, **8** (1959), p. 240-270.

Streszczenie

W pracy niniejszej, stosując metody prac [5] i [6] uogólnia się podane w [6] twierdzenie o istnieniu rozwiązania zagadnienia postawionego przez Zofię Szmydt [8] dla równania $\partial^2 z/\partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$.

Резюме

В этой работе, применяя методы работ [5] и [6], обобщены теоремы, данные в [6], о существовании решения в проблеме, поставленной Софией Шмыд [8] для уравнения $\partial^2 z/\partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$.