

ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA

VOL. XV, 2

SECTIO A

1961

Z Katedry Zespołowej Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS

Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

CZESŁAW KLUCZNY

**Sur certaines familles de courbes en relation avec la théorie des
équations différentielles ordinaires I**

O pewnych rodzinach krzywych w powiązaniu z teorią równań różniczkowych
zwykłych I

О векторных семействах кривых в связи с теорией обыкновенных
дифференциальных уравнений

1. Dans son travail [7], T. Ważewski a donné une méthode nouvelle et bien générale, basée sur la notion du rétracte, très maniable dans divers problèmes concernant l'allure asymptotique des solutions de systèmes d'équations différentielles ordinaires et dans certains problèmes aux limites. Cette méthode a été ensuite développée et modifiée par plusieurs auteurs [1], [6], [2], [3], [4], qui ont remplacé la notion du rétracte, fondamentale dans la méthode de T. Ważewski, par d'autres notions topologiques: rétracte quasi-isotope de déformation [6], homéomorphie [3] ou homotopie [4]. Pour abréger le langage, j'appellerai „méthodes du rétracte” toutes ces théories inspirées par la note [7].

Les théorèmes fondamentaux dans ces diverses variantes de la méthode du rétracte peuvent toujours être ramenés à une forme compatible avec le schème général suivant.

Ecrivons sous forme vectorielle

$$(1) \quad x' = f(t, x)$$

un système d'équations différentielles ordinaires, dans lequel le second membre est une fonction vectorielle définie et continue dans un ensemble W contenu dans l'espace à $n+1$ dimensions. Nous désignerons par U

l'intérieur de l'ensemble W et admettrons que $R = W \cdot \text{Front } W$. Nous supposons que l'ensemble $\Psi = \text{Front } W - R$ est fermé et que, de plus, l'ensemble Z est contenu dans l'ensemble W .

Or, moyennant certaines hypothèses α sur le comportement local des intégrales à la frontière de l'ensemble W et certaines hypothèses β caractérisant, à l'aide des notions du rétracte, de l'homotopie etc., la position de l'ensemble Z par rapport aux ensembles U et R , il existe toujours une demi-intégrale issue d'un point de l'ensemble Z et asymptotique à droite, c'est-à-dire saturée à droite par rapport à l'ensemble W , mais contenue entièrement dans l'ensemble U .

Dans de nombreuses applications de la méthode du rétracte, le problème de l'étude des propriétés asymptotiques des intégrales d'un système donné d'équations différentielles ou bien les problèmes aux limites relatifs à un tel système se ramènent à démontrer l'existence d'une intégrale asymptotique (dans le sens précisé plus haut) issue de l'ensemble Z ; tout ce qu'il y a de difficile, c'est de définir convenablement les ensembles W et Z et de vérifier si les hypothèses α et β sont satisfaites. La vérification des hypothèses α est d'un caractère plutôt numérique, puisque la forme du second membre de l'équation (1) y joue un rôle essentiel. Pour vérifier les hypothèses β il est nécessaire de connaître les théorèmes topologiques correspondants, ce qui peut être, à part les cas triviaux les plus simples, très embarrassant, puisqu'il s'agit alors de théorèmes topologiques bien particuliers, dont la préparation même peut présenter des difficultés. D'autre part, il est à remarquer que, dans ces cas typiques les plus simples, on peut d'habitude se passer d'un appareil topologique plus considérable, puisqu'il suffit alors d'appliquer des notions relatives à la structure d'un ensemble, aussi élémentaires que celles d'ensemble fermé, borné ou compact. Dans ce travail je me propose, entre autres, de montrer justement l'utilité de ces plus simples moyens dans les problèmes que l'on traite d'habitude par les méthodes du rétracte.

Sous sa forme primitive [7], la méthode du rétracte s'appliquait aux équations satisfaisant à la condition d'unicité, bien que son inventeur T. Ważewski eût indiqué comment il était possible d'aborder par elle indirectement aussi les équations ne satisfaisant pas à cette condition. A. Bielecki [2], [3], a étudié les équations de cette classe, et même des équations plus générales, notamment les équations au paratingent. Ses résultats, constituant une généralisation des résultats établis dans [7] et [6], ont été obtenus par une méthode de „régularisation”, qui consistait à remplacer l'équation considérée par une équation plus régulière dans un sous-ensemble de l'ensemble W et respectant les propriétés essen-

tielles et l'équation donnée aux points de l'ensemble frontière R . Donc, au fond, cet auteur aussi n'a appliqué les méthodes topologiques qu'aux équations satisfaisant à la condition d'unicité.

Je me propose encore, dans ce travail, de construire un appareil topologique capable d'être appliqué directement aussi aux équations ne satisfaisant pas à la condition d'unicité. Dans les cas simples, il suffit déjà de mettre en jeu les moyens élémentaires dont j'ai parlé plus haut. J'ai eu pourtant en vue la construction d'un formalisme englobant aussi les cas plus compliqués ainsi que ceux où, l'équation ne satisfaisant pas à la condition d'unicité, les notions du rétracte, de l'homotopie etc. ne peuvent plus être appliquées. Dans ce but je définis la notion de „balayage” qui se ramène, dans le cas où il y a unicité, à un type particulier d'homotopie et qui me servira à construire une nouvelle variante de la „méthode du rétracte”.

Un autre but que vise ce travail est d'atténuer, par rapport aux travaux cités, les conditions α . En particulier, la condition de T. Wazewski qui exclut les „glissements intérieurs” peut être remplacée par des conditions moins gênantes. Dans cet ordre d'idées il y aura avantage à modifier la notion d'intégrale asymptotique, que je définirai comme une intégrale de l'équation (1) saturée à droite par rapport à l'ensemble W et définie dans un intervalle ouvert à droite. L'intégrale asymptotique ainsi définie n'est plus nécessairement contenue tout entière dans l'intérieur de l'ensemble W . Sous des hypothèses plus fortes, en particulier sous celles qui avaient été admises dans les travaux cités, les deux définitions de l'intégrale asymptotique reviennent au même.

Ce qui importe dans les recherches qui font l'objet de ce travail, ce n'est pas que les courbes considérées sont intégrales d'un système d'équations différentielles; l'essentiel, ce sont certaines propriétés topologiques de la famille de ces intégrales, c'est pourquoi j'ai donné à mon exposé une forme abstraite, en considérant la famille des courbes qui satisfont aux postulats correspondant aux propriétés des familles d'intégrales de l'équation (1). Par suite, les théorèmes établis dans ce travail pourront être appliqués à certaines généralisations des équations différentielles, par exemple aux équations au paratingent.

Quant au théorème (11,2), il présente un caractère un peu différent; il concerne le cas où la famille de courbes considérée satisfait à la condition d'unicité convenablement formulée, ce qui m'a permis d'appliquer la notion classique de l'homotopie. Ce théorème peut remplacer, dans diverses applications, le „théorème du rétracte” du travail [7].

2. Désignons par D_0 un espace métrique complet, dans lequel les sphères fermées sont compactes, par x un point de cet espace et par

$\varrho(x_1, x_2)$ la distance des points x_1 et x_2 . Définissons D comme l'espace des points $y = (t, x)$ tels que $x \in D_0$ et $-\infty < t < +\infty$. Par distance $d(y_1, y_2)$ des points $y_1 = (t_1, x_1)$, $y_2 = (t_2, x_2)$ de l'espace D nous entendons $\max\{|t_1 - t_2|, \varrho(x_1, x_2)\}$. Il en résulte que la sphère $K(y_1, r)$ de centre y_1 et de rayon r est l'ensemble des points (t, x) tels que $|t - t_1| < r$ et $\varrho(x, x_1) < r$. Dans l'espace D , qui est un espace métrique et complet, de même que dans l'espace D_0 , tout ensemble fermé et borné est compact.

Il sera commode d'admettre les notations suivantes. Si Z est un sous-ensemble quelconque de l'ensemble W , nous désignerons par $Z|t < \tau$ l'ensemble de tous les points (t, x) appartenant à l'ensemble Z tels que $t < \tau$. Nous écrirons d'une manière analogue $Z|t \leq \tau$, $Z|t_1 < t < t_2$, $Z|t \in \Delta$, où Δ désigne un intervalle de la variable t etc.

Dans la suite le terme courbe sera toujours entendu dans le sens de la définition suivante:

Définition (2,1). Nous appelons *courbe* l'ensemble de points (t, x) tels que $t \in \Delta$ et $x = \varphi(t)$, où Δ désigne un intervalle qui peut être fermé ou non et qui peut ne pas être borné, et $\varphi(t)$ désigne une fonction continue à valeurs dans l'espace D_0 ; un tel ensemble sera désigné par $\{t, \varphi(t)\}|t \in \Delta$. Lorsque $\Delta_1 \subset \Delta$, la courbe $\{t, \varphi(t)\}|t \in \Delta_1$ sera dite *partie de la courbe* $\{t, \varphi(t)\}|t \in \Delta$ correspondant à l'intervalle Δ_1 . Si $\Delta = \langle t_1, t_2 \rangle$ ou bien $\Delta = \langle t_1, t_2 \rangle$, où $-\infty < t_1 < t_2 \leq +\infty$, nous dirons que le point $(t_1, \varphi(t_1))$ est l'*origine* de la courbe et que celle-ci est *issue* de ce point. Si $\Delta = \langle t_1, t_2 \rangle$ ou bien $\Delta = [t_1, t_2]$, nous appellerons le point $(t_2, \varphi(t_2))$ *extrémité* de la courbe, qui dans ce cas, sera dite *aboutissant* à ce point.

Définition (2,2). Une courbe d'équation $x = \varphi(t)$, $t \in \Delta$ est dite *courbe du type $\mathcal{L}$* si Δ est un intervalle fini de la forme $\langle t_1, t_2 \rangle$. Les courbes du type $\mathcal{L}$ et les points sont appelés *éléments du type $\mathcal{L}$* . Si un élément du type $\mathcal{L}$ est un point, on dira qu'il a son origine et son extrémité en ce point.

Définition (2,3). D'un ensemble F dont tout élément est soit une courbe contenue dans l'ensemble $W \subset D$, soit un point de l'ensemble W , nous dirons qu'il est une *famille du type $\mathcal{F}$* , définie dans l'ensemble W , si les conditions suivantes sont remplies (cf. [9]):

1° Les points de l'ensemble W sont éléments de l'ensemble F ,

2° Toute courbe qui est une partie d'une courbe de l'ensemble F ou bien qui est somme de deux éléments de l'ensemble F appartient à cet ensemble⁽¹⁾. De plus, si toute partie de la courbe I qui est une courbe

⁽¹⁾ En particulier, la somme d'une courbe appartenant à l'ensemble F et d'un point appartenant à l'ensemble W appartient à l'ensemble F , pourvu que cette somme soit une courbe.

du type $\mathcal{L}$ appartient à l'ensemble F , la courbe I lui appartient aussi.

3° Si W^* est un sous-ensemble compact, c'est-à-dire borné et fermé, de l'ensemble W et F^* désigne le sous-ensemble de l'ensemble F auquel appartiennent tous les éléments du type $\mathcal{L}$ contenus dans l'ensemble W^* , et seulement ces éléments, alors l'ensemble F^* est compact. Autrement dit: de toute suite d'éléments du type $\mathcal{L}$ appartenant à l'ensemble F et contenus dans un sous-ensemble compact de l'ensemble W on peut extraire une suite partielle convergente vers un élément de l'ensemble F du type $\mathcal{L}$, la convergence étant entendue dans le sens de la définition suivante.

Définition (2,4). Une suite d'éléments $I_1, I_2, \dots$ du type $\mathcal{L}$ converge vers un élément I du type $\mathcal{L}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre N tel que pour $n > N$ on ait $I \subset K(I_n, \varepsilon)$ et $I_n \subset K(I, \varepsilon)$, où $K(A, \varepsilon)$ désigne un ε -voisinage de l'ensemble A .

Les conditions 1°, 2°, 3° seront appelées dans la suite *propriétés de la famille F* .

Théorème (2,1). Si l'ensemble W_0 est un sous-ensemble compact de l'ensemble W et si F_0 désigne l'ensemble des éléments de la famille F contenus dans l'ensemble W_0 , les courbes de l'ensemble F_0 sont équicontinues.

Démonstration. Supposons que les courbes de l'ensemble F_0 ne soient pas équicontinues. Alors il existe: un nombre positif ε , une suite de fonctions $\varphi^m(t)$ et une suite d'intervalles $\langle t_1^m, t_2^m \rangle$ tels que $0 < t_2^m - t_1^m \leq 1/m$ et que l'équation $x = \varphi^m(t)$, $t_1^m \leq t \leq t_2^m$ soit l'équation d'une courbe I^m de la famille F_0 et que l'on ait de plus $|\varphi^m(t_2^m) - \varphi^m(t_1^m)| \geq \varepsilon$, $m = 1, 2, \dots$. Comme les courbes I^m sont contenues dans l'ensemble W_0 , qui est compact et $W_0 \subset W$, il résulte de la propriété 3° de la famille F que l'on peut extraire de la suite I^m une suite partielle I^{m_k} convergente vers un élément I du type $\mathcal{L}$ de la famille F_0 . Posons:

$$\begin{aligned} \varphi^m(t_1^m) &= \bar{x}^m, & \varphi^m(t_2^m) &= \bar{x}^m, & \lim_{k \rightarrow +\infty} t_1^{m_k} &= t_1, \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} t_2^{m_k} &= t_2, & \lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{x}^{m_k} &= \bar{x}, & \lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{x}^{m_k} &= \bar{x}. \end{aligned}$$

Les points $(t_1, \bar{x})$, $(t_2, \bar{x})$ appartiennent à l'élément I . D'autre part, des inégalités $0 < t_2^{m_k} - t_1^{m_k} \leq 1/m_k$ et $|\bar{x}^{m_k} - \bar{x}^{m_k}| \geq \varepsilon$ il s'ensuit que $t_2 = t_1$ et $|\bar{x} - \bar{x}| \geq \varepsilon$; par conséquent l'ensemble contenant les points $(t_1, \bar{x})$, $(t_2, \bar{x})$ ne peut être un élément de la famille F_0 . La contradiction obtenue établit le théorème (2,1).

3. Définition (3,1). Un point de l'ensemble W qui n'est pas l'origine (l'extrémité) d'une courbe de la famille F sera dit *point extrémal droit (gauche)* et l'ensemble de tous ces points sera désigné par S (par S^-).

Définition (3,2). Nous dirons que l'élément I de la famille F peut être prolongé à droite (à gauche) s'il existe une courbe I_1 de la famille F telle que $I \subset I_1$ et un point appartenant à la courbe I_1 dont la coordonnée temporelle est supérieure (inférieure) à la coordonnée temporelle d'un point quelconque de l'élément I .

Définition (3,3). L'élément I de la famille F est dit *saturé à droite (à gauche)* si l'élément I ne peut être prolongé à droite (à gauche).

Théorème (3,1). Si l'élément I a son extrémité (son origine) en un point qui n'appartient pas à l'ensemble S (à l'ensemble S^-), l'élément I peut être prolongé à droite (à gauche).

Ce théorème résulte immédiatement de la définition des ensembles S et S^- et de la propriété 2° de la famille F .

Théorème (3,2). Si la courbe I n'est pas du type $\mathcal{L}$, mais si elle est contenue dans un sous-ensemble compact W_0 de l'ensemble W , il existe une courbe de la famille F du type $\mathcal{L}$ qui est un prolongement de la courbe I .

Démonstration. Supposons que l'équation de la courbe I soit $x = \varphi(t)$, $t_1 \leq t < t_2$ et que $I \subset W_0$. Il existe une suite de nombres $\tau_0, \tau_1, \dots$ telle que $t_1 = \tau_0 < \tau_1 < \dots$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = t_2$. Désignons par I_n la partie de

la courbe I correspondant à l'intervalle $\langle t_1, \tau_n \rangle$, $n = 1, 2, \dots$. De la propriété 3° de la famille F résulte que la suite $I_1, I_2, \dots$ converge vers une courbe I_0 définie dans l'intervalle $\langle t_1, t_2 \rangle$, qui est une courbe de la famille F et qui contient la courbe I . Le théorème se trouve ainsi établi dans le cas où la fonction $\varphi(t)$ est définie dans un intervalle de la forme $\langle t_1, t_2 \rangle$. Dans les autres cas la démonstration est analogue.

Des théorèmes (3,1) et (3,2) résulte le suivant:

Théorème (3,3). Un élément de la famille F ayant son origine (son extrémité) au point P est saturé à droite (à gauche) si et seulement s'il a son extrémité dans l'ensemble S (son origine dans l'ensemble S^-) ou bien s'il n'est contenu dans aucun sous-ensemble compact de l'ensemble W . Dans ce dernier cas, l'élément saturé est une courbe définie dans un intervalle ouvert à droite (à gauche) ou dans un intervalle illimité à droite (à gauche).

Définition (3,4). Une courbe I de la famille F sera dite *asymptotique à droite (à gauche) par rapport à l'ensemble W (2)*, si elle est une courbe saturée à droite et n'a pas d'extrémité (à gauche et n'a pas d'origine).

(2) Nous omettrons dans la suite l'expression „par rapport à l'ensemble W ”.

Du théorème (3,3) et de la définition (3,4) résulte:

Théorème (3,4). *Une courbe de la famille F ayant son origine (son extrémité) au point P est asymptotique à droite (à gauche) si et seulement si elle n'est contenue dans aucun sous-ensemble compact de l'ensemble W .*

4. Définition (4,1). Nous appellerons *zone d'émission droite (gauche) de l'ensemble a* contenu dans l'ensemble W l'ensemble de tous les points situés sur les éléments de la famille F qui ont leur origine (leur extrémité) dans l'ensemble a . La zone d'émission droite (gauche) de l'ensemble a sera désignée par $E(a)$ (resp. $E^-(a)$). La somme $E(a) + E^-(a)$ sera appelée *zone d'émission totale de l'ensemble a* .

Nous nous bornerons à énoncer quelques propriétés de la zone d'émission droite. L'adjectif „droit” sera omis partout où il n'y aura pas de malentendu à craindre.

$$(i_1) \quad E(a) = \sum_{(t,x) \in a} (t, x),$$

(i₂) $(\tau, \xi) \in E(\tau, \xi)$ et $E(\tau, \xi) = (\tau, \xi)$ seulement si le point $(\tau, \xi) \in S$,

(i₃) si $(\tau_1, \xi_1) \in E(\tau, \xi)$, on a $E(\tau_1, \xi_1) \subset E(\tau, \xi)$,

(i₄) si $(\tau_1, \xi_1) \in E(\tau, \xi)$ et $\tau \leq \tau_2 \leq \tau_1$, il existe un ξ_2 tel que $(\tau_2, \xi_2) \in E(\tau, \xi)$ et $(\tau_1, \xi_1) \in E(\tau_2, \xi_2)$.

Les propriétés (i₁) et (i₂) résultent directement de la définition (4,1); les autres sont des conséquences des propriétés de la famille F et du fait que le point $(t, x) \in E(\tau, \xi)$ si et seulement s'il existe un élément de la famille F d'origine (τ, ξ) et d'extrémité (t, x) .

De (i₁)-(i₄) résultent encore aisément les propriétés suivantes de la zone d'émission:

$$(i_5) \quad E(a + \beta) = E(a) + E(\beta); \text{ si } a \subset \beta, \text{ on a } E(a) \subset E(\beta); a \subset E(a),$$

si $\beta \subset E(a)$, on a $E(\beta) \subset E(a)$; $E(E(a)) = E(a)$.

Nous établirons maintenant un théorème qui sera fondamental dans l'étude des propriétés asymptotiques des familles du type $\mathcal{F}$. Dans ce but nous admettrons encore l'hypothèse suivante qui sera valable dans toute la suite de ce travail.

Hypothèse Z_1 . *L'ensemble W des points (t, x) est contenu dans l'espace D . En désignant $U = \text{Int } W$, $R = W \cdot \text{Front } W$ nous supposons que l'ensemble $\Psi = \text{Front } W - R$ est fermé⁽³⁾.*

(³) En particulier, l'ensemble Ψ peut être vide.

Nous noterons $Z_1 F$ l'hypothèse que l'ensemble F est une famille du type $\mathcal{F}$ définie dans l'ensemble W et que l'hypothèse Z_1 est vérifiée. Dans ce qui suit nous admettrons l'hypothèse $Z_1 F$.

Théorème (4,1). *Si l'ensemble α est compact, $\alpha \subset W$ et s'il n'existe pas de courbes asymptotiques de la famille F issues de l'ensemble α , la zone d'émission de l'ensemble α est un ensemble compact.*

Démonstration. Considérons un point quelconque A et soit $r_1, r_2, \dots$ une suite croissante vers $+\infty$. Désignons par K_i une sphère fermée de centre A et de rayon r_i . Nous supposons que le nombre r_1 est assez grand pour que $\alpha \subset K_1$. D'après l'hypothèse Z_1 on a $d(\alpha, \Psi) > 0$. Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ une suite décroissante vers zéro telle que $\varepsilon_1 < d(\alpha, \Psi)$. Posons $W_n = K_n - K(\Psi, \varepsilon_n)$, où $K(\Psi, \varepsilon_n)$ désigne le voisinage ouvert de l'ensemble Ψ de rayon ε_n , $n = 1, 2, \dots$. L'ensemble α est contenu dans chacun des ensembles W_n , $n = 1, 2, \dots$. Nous allons montrer qu'il existe un m tel que $E(\alpha) \subset W_m$. Sinon il existerait une suite $I_1, I_2, \dots$ de courbes de la famille F , chacune issue de l'ensemble α , telle que la courbe I_n ait son extrémité sur la frontière de l'ensemble W_n , $n = 1, 2, \dots$. Supposons que le point P_n soit l'origine de la courbe I_n . Pour $n \geq k$ désignons par I_n^k la partie de la courbe I_n contenue dans l'ensemble W_k , qui est une courbe de la famille F dont l'origine est au point P_n et l'extrémité sur la frontière de l'ensemble W_k . En vertu de la propriété 3° de la famille F et du fait que l'ensemble α est compact, on peut extraire de la suite I_n une suite partielle I_{n_1} telle que la suite de courbes $I_{n_1}^1$ converge vers une courbe I^1 de la famille F issue d'un point P appartenant à l'ensemble α et ayant son extrémité sur la frontière de l'ensemble W_1 . De la suite I_{n_1} on peut pareillement extraire une suite partielle I_{n_2} telle que la suite de courbes $I_{n_2}^2$ converge vers une courbe I^2 de la famille F issue du point P et ayant son extrémité sur la frontière de l'ensemble W_2 .

En procédant ainsi nous obtenons finalement une suite $I^1, I^2, \dots$ de courbes de la famille F issues du point P , telle que la courbe I^k aboutisse à la frontière de l'ensemble W_k , $k = 1, 2, \dots$ et que l'on ait en outre $I_1 \subset I_2 \subset \dots$. La courbe $I = I_1 + I_2 + \dots$ serait alors, en vertu de la propriété 2° de la famille F , une courbe de la famille F , cette courbe n'étant contenue dans aucun des ensembles W_k , $k = 1, 2, \dots$. Comme l'ensemble Ψ est fermé (cf. hypothèse Z_1), tout sous-ensemble compact de l'ensemble W est contenu dans un des ensembles W_k , $k = 1, 2, \dots$; par conséquent la courbe I ne serait contenue dans aucun sous-ensemble compact de l'ensemble W et, en vertu du théorème (3,4), elle serait une courbe asymptotique. Nous arrivons ainsi à une contradiction avec les hypothèses du

théorème (4,1), ce qui prouve qu'il existe un nombre m tel que $E(a) \subset W_m$, c'est-à-dire que l'ensemble $E(a)$ est borné. Il reste à montrer qu'il est fermé.

Comme $E(a) \subset W$, on a $E(a) \subset W \cdot W_m$. L'ensemble $W \cdot W_m$ est un sous-ensemble compact de l'ensemble W . Supposons que le point $Q_n \in E(a)$, $n = 1, 2, \dots$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = Q$. Il s'ensuit qu'il existe une suite $P_1, P_2, \dots$

de points appartenant à l'ensemble a et une suite de courbes $J_1, J_2, \dots$ de la famille F telle que la courbe J_n a son origine au point P_n et son extrémité au point Q_n . Comme $J_n \subset W \cdot W_n$, $n = 1, 2, \dots$, il résulte de la propriété 3° de la famille F qu'il existe aussi une courbe de la famille F dont l'origine est un certain point P et l'extrémité est le point Q . Le point P est en même temps un point d'accumulation de la suite $P_1, P_2, \dots$ et, comme l'ensemble a est compact, il appartient à a . Cela signifie qu'il existe une courbe de la famille F issue de l'ensemble a et aboutissant au point Q , donc le point $Q \in E(a)$, ce qu'il fallait démontrer.

Du théorème (4,1) résulte en particulier que s'il n'existe pas de courbes asymptotiques de la famille F issues du point P appartenant à l'ensemble W , la zone d'émission du point P est un ensemble compact.

Théorème (4,2). *Un point appartenant à l'ensemble W donne issue à une courbe asymptotique de la famille F si et seulement si la zone d'émission de ce point n'est pas un ensemble compact.*

Démonstration. Si le point P appartient à l'ensemble W et l'ensemble $E(P)$ est compact et si une courbe I de la famille F est issue du point P , cette courbe est contenue dans l'ensemble $E(P)$, qui est un sous-ensemble compact de l'ensemble W , et, en vertu du théorème (3,4), elle ne peut être une courbe asymptotique. Cette remarque avec le théorème (4,1) achève la démonstration du théorème (4,2).

Théorème (4,3). *Tout point de l'ensemble W est l'origine (extrémité) d'un élément de la famille F saturé à droite (à gauche).*

Démonstration. Si le point $(\tau, \xi) \in W$ et si l'ensemble $E(\tau, \xi)$ n'est pas compact, il existe, en vertu du théorème (4,2), une courbe asymptotique issue du point (τ, ξ) et, comme telle, cette courbe est saturée à droite. D'autre part, si l'ensemble $E(\tau, \xi)$ est compact, il existe un point (τ_1, ξ_1) appartenant à $E(\tau, \xi)$, tel que le nombre τ_1 soit la plus grande des coordonnées temporelles des points appartenant à $E(\tau, \xi)$. Donc le point $(\tau_1, \xi_1) \in S$ et il existe un élément de la famille F , dont l'origine est le point (τ, ξ) et l'extrémité est le point (τ_1, ξ_1) . En vertu du théorème (3,3) cet élément est un élément saturé de la famille F . La seconde partie du théorème se démontre d'une manière analogue.

Corollaire (4,1). Tout élément de la famille F dont l'origine (extrémité) est le point P est une partie d'un élément saturé de la famille F d'origine (extrémité) au point P .

Corollaire (4,2). La zone d'émission droite (gauche) de l'ensemble α est l'ensemble des points situés sur les éléments de la famille F ayant leur origine (extrémité) dans l'ensemble α et saturés à droite (à gauche).

5. Dans la suite nous nous occuperons de théorèmes relatifs à l'existence d'une courbe asymptotique de la famille F . Nous rappelons que les hypothèses Z_1 et $Z_1 F$ restent en vigueur.

Théorème (5,1). *Si l'ensemble $S \subset S^-$, si de tout point de l'ensemble $W - S$ est issue une courbe asymptotique de la famille F , en particulier, si l'ensemble S est vide, de tout point de l'ensemble W est issue une courbe asymptotique.*

Démonstration. En vertu du théorème (4,3) de tout point de l'ensemble $W - S$ est issu un élément saturé de la famille F et, comme $S \subset S^-$, cet élément n'a pas d'extrémité, donc il est une courbe asymptotique (à droite).

Comme simple conséquence du théorème (4,1) nous obtenons:

Théorème (5,2). *Si l'ensemble a , contenu dans l'ensemble W , est compact, mais la zone d'émission de l'ensemble a n'est pas un ensemble compact, il existe une courbe asymptotique de la famille F issue de l'ensemble a .*

Donc, pour prouver qu'il existe une courbe asymptotique de la famille F issue de l'ensemble compact $a \subset W$, il suffit de prouver que $E(a)$ ne peut être un ensemble compact, d'où le théorème suivant:

Théorème (5,3). *Supposons que la famille F ne possède pas de courbes asymptotiques à gauche. Si l'ensemble $W - S \cdot S^-$ n'est pas borné et l'ensemble $a = S^- - S \cdot S^-$ est contenu dans un sous-ensemble compact W^* de l'ensemble W , il existe une courbe asymptotique de la famille F issue de l'ensemble a .*

Démonstration. Nous montrerons d'abord que $W - S \cdot S^- \subset E(a)$. Si le point $P \in W$, alors le point P est l'extrémité d'un élément I de la famille F saturé à gauche dans l'ensemble W et, comme il n'existe pas de courbes asymptotiques à gauche, l'élément I a son origine dans l'ensemble S^- . Il en résulte que $W \subset E(S^-)$ et, comme $S \cdot S^- = E(S \cdot S^-)$, on a $W - S \cdot S^- \subset E(S^- - S \cdot S^-)$. Mais $S^- - S \cdot S^- = a$, donc $W - S \cdot S^- \subset E(a)$ et a fortiori $W - S \cdot S^- \subset E(W^*)$; l'ensemble W^* étant compact par hypothèse, il existe, en vertu du théorème (5,2) une courbe asymptotique I_1 de la famille F issue d'un point Q appartenant à l'ensemble W^* .

Comme nous avons montré que le point Q donne issue à une courbe (asymptotique), on a $Q \notin S$. Par conséquent, si $Q \notin a$, ($a = S^- - S \cdot S^-$), on a $Q \notin S^-$ et, par suite, le point Q est l'extrémité d'une courbe I_2 de la famille F , saturée à gauche et ayant son origine en un point Q_1 appartenant à l'ensemble S^- . En outre $Q_1 \notin S$, donc $Q_1 \in a$. La somme $I_1 + I_2$ est une courbe asymptotique de la famille F issue de l'ensemble a . Le théorème (5,3) se trouve ainsi démontré.

Il n'y aura certainement pas de courbes asymptotiques à gauche si pour tout τ l'ensemble $W\{t \leq \tau\}$ est compact (ou vide). En effet, si le point $(t_1, x_1) \in W$, toute courbe de la famille F dont ce point est l'extrémité est contenue dans l'ensemble compact $W\{t \leq t_1\}$, donc une telle courbe ne peut être asymptotique.

De cette remarque et des théorèmes (5,3) et (3,4) résulte le théorème suivant:

Théorème (5,4). *Si l'ensemble $W - S \cdot S^-$ n'est pas borné, mais pour tout τ l'ensemble $W\{t \leq \tau\}$ est compact, et si en outre l'ensemble $a = S^- - S \cdot S^-$ est borné, il existe une courbe asymptotique de la famille F issue de l'ensemble a .*

Ayant en vue les applications, nous énoncerons un simple cas particulier de ce théorème.

Théorème (5,5). *Si l'ensemble W n'est pas borné, mais pour tout τ l'ensemble $W\{t \leq \tau\}$ est compact, et si en outre l'ensemble S^- est borné, il existe une courbe asymptotique de la famille F issue de l'ensemble S^- .*

Remarque (5,1). Si l'on change le sens de l'axe t , les courbes asymptotiques à droite deviendront asymptotiques à gauche, les points extrémités droites deviendront extrémités gauches et la zone d'émission droite deviendra zone d'émission gauche. En profitant de cette remarque on énoncera aisément les théorèmes relatifs à l'existence de courbes asymptotiques à gauche de la famille F . Ainsi, par exemple, dans les théorèmes (5,1) et (5,4) il suffit de remplacer S par S^- et vice-versa S^- par S , et l'expression „il existe une courbe asymptotique issue de l'ensemble a ” par „il existe une courbe asymptotique à gauche dont l'extrémité est dans l'ensemble a ”, pour obtenir des théorèmes sur l'existence d'une courbe asymptotique à gauche.

Remarque (5,2). Désignons par $F(\tau)$ l'ensemble des éléments de la famille F contenus dans l'ensemble $W\{t \leq \tau\}$ et, de même que dans l'hypothèse Z_1 posons:

$$(5,1) \quad R(\tau) = W\{t \leq \tau\} \cdot \text{Front } W\{t \leq \tau\},$$

$$(5,2) \quad \Psi(\tau) = \text{Front } W\{t \leq \tau\} - R(\tau),$$

et

$$(5,3) \quad S(\tau) = W\{t = \tau\} + S\{t < \tau\}.$$

On a $R(\tau) = W\{t = \tau\} + R\{t < \tau\}$ et $\Psi(\tau) = \Psi\{t \leq \tau\}$. De la dernière égalité il s'ensuit que l'ensemble $\Psi(\tau)$ est fermé. Cela signifie que l'ensemble $W\{t \leq \tau\}$ (s'il n'est pas vide) satisfait à l'hypothèse Z_1 , et l'ensemble $F(\tau)$ est une famille du type $\mathcal{F}$, définie dans l'ensemble $W\{t \leq \tau\}$. Nous dirons aussi que l'ensemble $F(\tau)$ est une famille F restreinte à l'ensemble $W\{t \leq \tau\}$. L'ensemble $S(\tau)$ est l'ensemble des points extrémités de la famille $F(\tau)$.

Tous les théorèmes établis pour la famille F définie dans l'ensemble W sont évidemment vrais pour la famille $F(\tau)$ et l'ensemble $W\{t \leq \tau\}$, pourvu que celui-ci ne soit pas vide. Il en est de même pour la famille F restreinte à l'ensemble $W\{t \geq \tau\}$.

Nous n'avons pas encore donné de théorèmes relatifs aux problèmes aux limites pour la familles du type $\mathcal{F}$. Bien que triviaux, ces théorèmes peuvent pourtant être énoncés. Par exemple, supposons que l'ensemble S soit vide et que, pour tout τ , l'ensemble $W\{t \leq \tau\}$ soit compact. Dans ce cas il résulte du théorème (5,1) que de tout point $P \in W$ est issu un élément de la famille F qui aboutit à l'ensemble $W\{t = \tau\}$, où $\tau \geq t_P$, le symbol t_P désignant l'abscisse du point P . Il est aussi clair que l'ensemble S^- donne issue à un élément de la famille F aboutissant à un point quelconque de l'ensemble W .

Voici un exemple pour illustrer la théorie.

Exemple (5,1). Soit D_0 un espace euclidien à n dimensions et $\varphi(t)$ une fonction (scalaire) définie et continue pour toute valeur de la variable t , telle que $\varphi(t) \geq 0$. Posons: $W = (t, x)\{|x| \leq \varphi(t), -\infty < t < \infty\}$. L'ensemble W satisfait à l'hypothèse Z_1 . Admettons l'hypothèse $Z_1 F$. Je dis que si l'un des ensembles S^- ou S est vide, il existe une courbe de la famille F définie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

Démonstration. Supposons que l'ensemble S^- soit vide et désignons par F_0 la famille F restreinte à l'ensemble $W\{t \geq 0\}$ et par S_0^- l'ensemble des points extrémités gauches de la famille F_0 . Comme nous avons supposé $S^- = 0$, on voit aisément que $S_0^- = W\{t = 0\}$. L'ensemble $W\{t \geq 0\}$ et la famille F_0 vérifient les hypothèses du théorème (5,5), donc il existe un point P , appartenant à l'ensemble $W\{t = 0\}$, dont est issue une courbe asymptotique I^+ de la famille F_0 . Cette courbe n'est contenue dans aucun des ensembles $W\{0 \leq t \leq \tau\}$, puisque ces ensembles sont compacts, donc la courbe I^+ est définie dans l'intervalle $\langle 0, +\infty \rangle$. En vertu de la remarque (5,1) et du théorème (5,1) tout

point de l'ensemble $W\{t=0\}$ est l'extrémité d'une courbe de la famille F asymptotique à gauche. Désignons par I^- la courbe asymptotique à gauche de la famille F dont le point P est l'extrémité. La courbe I^- est définie dans l'intervalle $(-\infty, 0)$ et la somme $I^- + I^+$ est une courbe de la famille F définie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

Dans le cas où l'ensemble S est vide la démonstration est tout à fait analogue. Dans ce cas la conclusion du théorème résulte aussi de la remarque (5,1).

Dans l'exemple considéré on peut, au lieu de supposer que l'un des ensembles S^- ou S est vide, admettre que $S^- \subset S$ ou $S \subset S^-$, si pour tout τ l'ensemble $W\{t=\tau\}$ n'est contenu ni dans l'ensemble S ni dans l'ensemble S^- .

6. Dans la suite de ce travail nous nous occuperons d'une famille plus rapprochée des familles d'intégrales d'un système d'équations différentielles.

Définition (6,1). Nous dirons que la famille F est une famille du type $\mathcal{G}_0$, définie dans l'ensemble W , si F est une famille du type $\mathcal{F}$ définie dans l'ensemble W et si, de plus, la condition suivante est vérifiée:

4^+ Si le point $P \in U$, $U = \text{Int } W$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que l'intersection de la zone d'émission du point P avec l'hyperplan $t = \tau$ est un continu pour $t_P \leq \tau \leq t_P + \varepsilon$ (⁴).

En vertu de la définition, une famille du type $\mathcal{G}_0$ possède aussi les propriétés 1°-3° d'une famille du type $\mathcal{F}$. La condition 4^+ signifie que la condition de Kneser est vérifiée localement à droite. De 4^+ il s'ensuit, autrement que dans le cas d'une famille quelconque du type $\mathcal{F}$, que l'ensemble des points extrémités droits de la famille F est contenu dans l'ensemble R (⁵).

Définition (6,2). Nous admettons qu'un point P de l'ensemble W appartient à l'ensemble T (à l'ensemble T^-) si tout élément de la famille F dont l'origine (extrémité) est le point P est contenu dans l'ensemble R .

Hypothèse Z_2 . Si une courbe de la famille F a son origine dans l'ensemble U et si elle rencontre l'ensemble R au point Q , alors $Q \in T$.

Hypothèse Z_3 . Si une courbe de la famille F a son origine dans l'ensemble U et si elle rencontre l'ensemble R au point Q , alors $Q \in S$.

Les hypothèses Z_2 et Z_3 permettent d'exclure de nos considérations certains types de „glissements intérieurs”. (⁶) Comme, dans ce travail,

(⁴) Nous entendons par continu un ensemble non vide, qui est connexe et compact.

(⁵) Les points extrémités gauches peuvent être situés dans l'ensemble U .

(⁶) Dans les travaux [7], [1], [6], [2], [4] la condition analogue est plus forte.

nous allons considérer la famille du type $\mathcal{G}_0$ sous l'une des hypothèses Z_2 ou Z_3 , nous admettrons pour des raisons de commodité la convention suivante: la notation Z_2F (Z_3F) signifie que dans l'ensemble W on a défini une famille F du type $\mathcal{G}_0$ et que, en outre, l'hypothèse Z_2 (Z_3) est vérifiée; une famille du type $\mathcal{G}_0$, définie dans l'ensemble W et vérifiant l'hypothèse Z_2 (Z_3) sera désignée par *famille du type $\mathcal{G}(\mathcal{G}_*)$* .

Définition (6,3). Le point P sera appelé *point de sortie forte (entrée forte)*, si $P \in S$ ($P \in S^-$) et s'il existe une courbe de la famille F ayant son extrémité (origine) au point P et contenue, à part le point P , dans l'ensemble U . L'ensemble des points de sortie forte (entrée forte) sera désigné par S_* (S_*^-).⁽⁷⁾

De la définition (6,3) résulte que dans l'hypothèse Z_3 on peut remplacer S par S_* .

Des définitions (6,1) et (6,2) il s'ensuit que si l'hypothèse Z_2F est vérifiée (l'hypothèse Z_1 reste en vigueur dans tout le travail), alors:

$$(6,1) \quad S \subset T \subseteq R, \quad T^- \subset R,$$

$$(6,2) \quad \text{si } a \in T, \text{ on a } E(a) \subset T,$$

$$(6,3) \quad E(U+T) = U+T.$$

En outre

$$(6,4) \quad T+T^- = R.$$

Nous nous bornerons à la démonstration de la formule (6,4). Il résulte de (6,1) que $T+T^- \subset R$. Il reste à montrer que $R \subset T+T^-$. Supposons qu'il existe un point P tel que $P \in R$, mais $P \notin T$ et $P \notin T^-$. Comme $P \notin T^-$, il existe en vertu de la définition (6,2) une courbe de la famille F ayant son origine dans l'ensemble U et son extrémité au point P . Mais $P \in R$, donc il résulte de l'hypothèse Z_2 que $P \in T$. La contradiction obtenue prouve que l'on a $R \subset T+T^-$, c.q.f.d.

Sous l'hypothèse Z_3F on a, de plus, les relations suivantes:

$$(6,5) \quad S+T^- = R,$$

$$(6,6) \quad E(U+S) = U+S, \quad E(U+S_*) = U+S_*.$$

La formule (6,5) peut être établie en raisonnant comme dans la démonstration de la formule (6,4), les formules (6,6) résultent des définitions (3,1) et (6,3).

(⁷) La définition (6,3) coïncide avec celle d'un point de sortie forte donnée par A. Bielecki [2]. Cette notion est un peu plus générale que la notion de point de sortie stricte (cf. [7]).

Pour compléter les formules (5,1)-(5,3) posons

$$(6,7) \quad T(\tau) = W\{t = \tau\} + T\{t < \tau\}.$$

7. Dans la suite nous admettrons l'hypothèse $Z_2 F$.

Définition (7,1). L'ensemble $e(a) = E(a) \cdot T$ sera appelé *trace d'émission de l'ensemble a*, l'ensemble $e(a, \tau) = E(a) \cdot T(\tau)$ *trace d'émission de l'ensemble a dans l'ensemble T(τ)*.

L'ensemble $e(a, \tau)$ n'est pas vide si l'ensemble a contient un point de coordonnée temporelle ne surpassant pas le nombre τ . Les ensembles $e(a)$ et $e(a, \tau)$ ont les propriétés suivantes:

(v₁) $e(a) \subset E(a)$, $e(a + b) = e(a) + e(b)$; si $a \subset b$, on a $e(a) \subset e(b)$;
si $a \subset S$, on a $e(a) = a$; si $a \subset T$, on a $e(a) = E(a) \subset T$,

(v₂) si $E(a) \subset W\{t \leq \bar{t}\}$, on a $e(a) = e(a, \bar{t})$,

(v₃) $e(e(a)) = e(a)$,

(v₄) si $a \subset W\{t \leq \tau\}$ et $\tau \leq \bar{t} \leq \bar{\bar{t}}$, on a $e(a, \bar{t}) = e(e(a, \bar{t}), \bar{\bar{t}})$.

Les propriétés (v₁) résultent de la définition (7,1), des propriétés correspondantes de la zone d'émission et des formules (6,1) et (6,2). Nous établirons en détail les propriétés (v₂)-(v₄). Comme $E(a) \subset W\{t \leq \bar{t}\}$, l'ensemble $E(a) \cdot W\{t = \bar{t}\}$ est contenu dans l'ensemble $S\{t = \bar{t}\}$ ou bien il est vide, donc $E(a) \cdot W\{t = \bar{t}\} = E(a) \cdot S\{t = \bar{t}\} = E(a) \cdot T\{t \geq \bar{t}\}$. Par conséquent, d'après la définition (7,1) et la formule (6,7), on a

$$e(a, \bar{t}) = E(a) \cdot T(\bar{t}) = E(a) \cdot (W\{t = \bar{t}\} + T\{t < \bar{t}\}) = E(a) \cdot T = e(a).$$

Nous avons ainsi démontré (v₂). En vertu de la définition (7,1) et des propriétés de la zone d'émission nous obtenons:

$$e(e(a)) = E(e(a)) \cdot T \subset E(E(a)) \cdot T = E(a) \cdot T = e(a)$$

et

$$e(a) = e(a) \cdot T \subset E(e(a)) \cdot T = e(e(a)).$$

La propriété (v₃) est ainsi démontrée. Nous établirons maintenant (v₄). En tenant compte des propriétés de la zone d'émission nous déduisons de la définition (7,1)

$$(7,1) \quad e(e(a, \bar{t}), \bar{\bar{t}}) = E(e(a, \bar{t})) \cdot T(\bar{\bar{t}}) \subset E(E(a)) \cdot T(\bar{\bar{t}}) = E(a) \cdot T(\bar{\bar{t}}) = e(a, \bar{\bar{t}}).$$

D'autre part, si le point $Q \in e(a, \bar{t})$, il existe un point P tel que $P \in a \subset W\{t \leq \bar{t}\}$ et un élément I de la famille F dont l'origine est le point P et l'extrémité le point Q . Mais $e(a, \bar{t}) \subset T(\bar{t}) \subset R(\bar{t}) \subset \text{Front } W\{t \leq \bar{t}\}$. Comme $W\{t \leq \bar{t}\} \subset W\{t \leq \bar{\bar{t}}\}$ et que l'élément I est issu de l'ensemble

$W\{t \leq \bar{t}\}$ et aboutit à la frontière de l'ensemble $W\{t \leq \bar{t}\}$, cet élément rencontre la frontière de l'ensemble $W\{t \leq \bar{t}\}$. Soit Q_1 celui des points appartenant à l'ensemble $I \cdot \text{Front } W\{t \leq \bar{t}\}$ qui a la plus grande coordonnée temporelle. Le point $Q_1 \in T(\bar{t})$ et, comme $Q_1 \in E(a)$, le point $Q_1 \in e(a, \bar{t})$. Cela signifie que $Q \in E(e(a, \bar{t}))$ et, comme $Q \in T(\bar{t})$, on a $Q \in E(e(a, \bar{t})) \cdot T(\bar{t}) = e(e(a, \bar{t}), \bar{t})$. Ce résultat, avec (7,1), établit la propriété (v₄).

8. Dans ce paragraphe nous établirons des théorèmes qui joueront dans la suite un rôle fondamental. (Les hypothèses en rigueur sont Z_1 et $Z_2 F$).

Théorème (8,1). *Si l'ensemble compact a est contenu dans l'ensemble $U+T$ et s'il n'existe pas de courbes asymptotiques de la famille F issues de l'ensemble a , la trace d'émission de l'ensemble a est un ensemble compact.*

Démonstration. Comme $e(a) = E(a) \cdot T$, $T \subset \text{Front } W$ et $E(a) \subset U+T$, on a $e(a) = E(a) \cdot \text{Front } W$, d'où il résulte, d'après le théorème (4,1), que $e(a)$ est un ensemble compact.

Théorème (8,2). *Si le point P appartient à l'ensemble $U+T$ et s'il n'existe pas de courbes asymptotiques de la famille F issues du point P , la trace d'émission du point P est un continu^(*).*

Démonstration. En vertu du théorème (8,1) l'ensemble $e(P)$ est compact. Il reste à prouver qu'il est connexe. Si $P \in T$, on a, en vertu de (v₁), $e(P) = E(P)$, donc l'ensemble $e(P)$, étant la somme des arcs issus du point P , est connexe. Pour établir le théorème (8,2) il reste à montrer que l'ensemble $e(P)$ est connexe dans le cas où le point P appartient à l'ensemble U . Supposons donc que $P \in U$ et que l'ensemble $e(P)$ soit la somme de deux ensembles séparés b et c qui sont compacts, puisque l'ensemble $e(P)$ est compact, donc:

$$(8,1) \quad e(P) = b + c, \quad b \cdot c = 0, \quad b = \bar{b}, \quad c = \bar{c}.$$

L'ensemble $E(P)$ étant borné, il existe un nombre $\bar{t}$ tel que $E(P) \subset W\{t \leq \bar{t}\}$. Désignons par α l'ensemble des nombres τ ayant la propriété suivante: pour tout $t \geq \tau$ il existe des ensembles b_t, c_t tels que $b_t \cdot c_t = 0$, $b_t = \bar{b}_t$, $c_t = \bar{c}_t$, et, de plus, $e(P, t) = b_t + c_t$, $e(b_t) = b$ et $e(c_t) = c$.

L'ensemble α a les propriétés suivantes:

(i) $t_P \notin \alpha, \bar{t} \in \alpha,$

(ii) si $t_1 \in \alpha$ et $t_2 > t_1$, on a $t_2 \in \alpha,$

(iii) si $t_1 \in \alpha$, il existe un nombre $t_3 < t_1$ tel que $t_3 \in \alpha.$

(*) Dans [5] les auteurs ont donné une généralisation d'un théorème de Kneiser sur l'intersection de la zone d'émission d'un point avec l'hyperplan $t = \text{const.}$ Le théorème (8,2) est une nouvelle généralisation de ce théorème.

Nous allons démontrer ces propriétés. Comme $e(P, t_P) = P$, on a $t_P \notin a$. Pour prouver que $\bar{t} \in a$ il suffit, en tenant compte de (8,1), de montrer que pour $t^* \geq \bar{t}$ on a $e(P, t^*) = e(P)$, $e(b) = b$ et $e(c) = c$. Comme $E(P) \subset W\{t \leq \bar{t}\} \subset W\{t \leq t^*\}$, la première de ces relations résulte de la propriété (v₂). Il reste à établir les deux autres. En vertu de la propriété (v₃) on a $e(e(P)) = e(P)$, donc (8,1) et la définition (7,1) entraînent $e(b+c) = b+c \subset T$, d'où, avec (6,2), on tire

$$(8,2) \quad b \subset e(b) \subset b+c.$$

On a aussi $e(b) \cdot c = 0$. Sinon il existerait un élément I de la famille F issu d'un point Q appartenant à l'ensemble b et aboutissant à l'ensemble c . Comme $b \subset T$, on aurait $e(Q) = E(Q)$, donc $I \subset e(Q) \subset e(P)$, ce qui est impossible à cause de (8,1). Par conséquent $e(b) \cdot c = 0$ et (8,2) entraîne $e(b) = b$. On démontre de même que $e(c) = c$ et la propriété (i) est ainsi établie. La propriété (ii) résulte directement de la définition de l'ensemble a . Nous passons à la démonstration de la propriété (iii). Lorsque $t_1 \leq \bar{t}$, la propriété (iii) résulte de (i) et (ii). Soit $t_1 > \bar{t}$ et posons

$$(8,3) \quad d(b_{t_1}, c_{t_1}) = 3\eta.$$

On a $\eta > 0$. Comme l'ensemble $E(P)$ est compact, les courbes de la famille F contenues dans l'ensemble $E(P)$ forment, en vertu du théorème (2,1), un ensemble de courbes équicontinues, il existe donc un nombre $\delta > 0$ tel que pour toute courbe de la famille F d'équation $x = \varphi(t)$, contenue dans $E(P)$ et définie dans l'intervalle $\langle t_2, t_3 \rangle$, on a

$$(8,4) \quad |\varphi(t_2) - \varphi(t_3)| < \eta \text{ si } t_1 - \delta \leq t_2 < t_3 \leq t_1.$$

Posons $\delta_0 = \min(\delta, \eta)$ et soit t^* un nombre quelconque appartenant à l'intervalle $\langle t_1 - \delta_0, t_1 \rangle$. De la propriété (v₄) il vient

$$(8,5) \quad e(e(P, t^*), t_1) = e(P, t_1)$$

donc, si le point $Q \in e(P, t^*)$, il existe un élément de la famille F issue du point Q et ayant son extrémité dans l'ensemble $e(P, t_1)$. Si $t_Q < t^*$, il résulte de la définition (7,1) et de la formule (6,7) que le point Q appartient aussi à l'ensemble $e(P, t_1)$ et l'élément en question se réduit à un point. Si $t_Q \geq t^*$, on a $t_1 - \delta_0 \leq t_Q \leq t_1$ et il résulte de (8,4) que

$$(8,6) \quad d(Q, e(P, t_1)) < \eta.$$

Désignons par b_{t_*} , c_{t_*} les sous-ensembles de l'ensemble $e(P, t^*)$ définis par les relations

$$(8,7) \quad d(b_{t_*}, b_{t_1}) < \eta, \quad d(c_{t_*}, c_{t_1}) < \eta.$$

L'ensemble $e(P, t^*)$ étant compact, nous tirons de (8,7), (8,6) et (8,3)

$$(8,8) \quad b_{t^*} + c_{t^*} = e(P, t^*), \quad b_{t^*} \cdot c_{t^*} = 0, \quad b_{t^*} = \bar{b}_{t^*}, \quad c_{t^*} = \bar{c}_{t^*}$$

ainsi que $e(b_{t^*}, t_1) \subset b_{t_1}$ et $e(c_{t^*}, t_1) \subset c_{t_1}$; en outre, comme (8,5) et (8,8) entraînent $e(b_{t^*}, t_1) + e(c_{t^*}, t_1) = b_{t_1} + c_{t_1}$, il vient

$$(8,9) \quad e(b_{t^*}, t_1) = b_{t_1} \text{ et } e(c_{t^*}, t_1) = c_{t_1}.$$

Des propriétés (v_2) , (v_4) et des égalités (8,9) nous déduisons, en tenant compte du fait que $t_1 \in \alpha$ et $e(b_{t_1}) = b$,

$$(8,10) \quad e(b_{t^*}) = e(b_{t^*}, \bar{t}) = e(e(b_{t^*}, t_1), \bar{t}) = e(b_{t_1}, \bar{t}) = e(b_{t_1}) = b.$$

On obtient pareillement

$$(8,10') \quad e(c_{t^*}) = c.$$

A cause du choix de t^* les relations (8,8), (8,10) et (8,10') sont vérifiées pour $t_1 - \delta_0 \leq t^* \leq t_1$ et, comme le nombre t_1 appartient à l'ensemble α , ces relations subsistent encore pour $t > t_1$.

Les propriétés des ensembles b_{t^*} et c_{t^*} que nous venons d'établir prouvent que le nombre t^* appartient à l'ensemble α . La propriété (iii) est ainsi démontrée.

Des propriétés (i)-(iii) résulte que l'ensemble α admet une borne inférieure qui n'appartient pas à α . Posons $\inf \alpha = t_0$. Il existe un point Q appartenant à $e(P, t_0)$ tel que

$$(8,11) \quad e(Q) \cdot b \neq 0 \text{ et } e(Q) \cdot c \neq 0,$$

sinon, pour tout point Q appartenant à $e(P, t_0)$ on aurait $e(Q) \subset b$ ou bien $e(Q) \subset c$, donc l'ensemble $e(P, t_0)$ serait la somme de deux ensembles disjoints b_0, c_0 tels que $e(b_0) \subset b$ et $e(c_0) \subset c$; comme il résulte des propriétés (v_1) , (v_2) , (v_4) que $e(b_0) + e(c_0) = e(b_0 + c_0) = e(e(P, t_0)) = e(e(P, t_0), \bar{t}) = e(P, \bar{t}) = e(P) = b + c$, on aurait $e(b_0) = b$ et $e(c_0) = c$. A cause de la propriété 3° de la famille F et de la compacité des ensembles $e(b_0)$, $e(c_0)$ et $E(P)$ il résulte aisément que les ensembles b_0 et c_0 , eux aussi, seraient compacts. D'après la définition du nombre t_0 et les propriétés démontrées des ensembles b_0 et c_0 il en résulterait, contrairement à l'hypothèse, que le nombre t_0 appartient à l'ensemble α . Par conséquent le point Q ayant les propriétés demandées existe. Il ne peut pas appartenir à l'ensemble T ; dans le cas contraire $e(Q)$ serait un ensemble connexe, contenu dans l'ensemble T , par conséquent, d'après (8,11), il contiendrait des points n'appartenant pas à $b + c$. Mais, comme $Q \in E(P)$, on a $e(Q) = e(P)$, donc

l'ensemble $e(P)$ contiendrait aussi des points n'appartenant pas à l'ensemble $b+c$, contrairement à l'hypothèse $e(P) = b+c$.

Nous avons ainsi prouvé que $Q \notin T$ et, comme $Q \in e(P, t_0)$, de la définition (7,1) et de la formule (6,7) il s'ensuit que $Q \in W\{t = t_0\}$, c'est-à-dire $t_Q = t_0$. Comme $e(P, t_0) \subset U+T$ et $Q \notin T$, on a $Q \in U$ et, en vertu de la propriété 4⁺ de la famille du type $\mathcal{G}$ il existe un nombre t_2 tel que $t_0 < t_2 \leq \bar{t}$ et que l'ensemble $e(Q, t_2)$ est un continu. Mais le nombre t_2 appartient à l'ensemble a , donc il existe des ensembles b_2 et c_2 séparés tels que $e(P, t_2) = b_2 + c_2$ et que, de plus, $e(b_2) = b$ et $e(c_2) = c$. Comme $Q \in E(P)$, on a $e(Q, t_2) \subset e(P, t_2)$, donc l'ensemble $e(Q, t_2)$, étant un continu, serait contenu dans l'un des ensembles b_2 ou c_2 . Si $e(Q, t_2) \subset b_2$, nous déduisons des propriétés (v₂), (v₄) $e(Q) = e(Q, \bar{t}) = e(e(Q, t_2), \bar{t}) \subset e(b_2, \bar{t}) = e(b_2) = b$, en contradiction avec la relation $e(Q) \cdot c \neq 0$. Pareillement, l'hypothèse $e(Q, t_2) \subset c_2$ mène à une contradiction avec la relation $e(Q) \cdot b \neq 0$. Il en résulte que le point Q ne peut appartenir à l'ensemble U . La contradiction ainsi obtenue achève la démonstration du théorème (8,2)⁽⁹⁾.

Théorème (8,3). *Si l'ensemble connexe a est contenu dans l'ensemble $U+T$ et s'il n'existe pas de courbes asymptotiques issues de l'ensemble a , la trace d'émission de l'ensemble a est un ensemble connexe.*

Démonstration. Supposons que l'on ait $e(a) = b+c$, $b \cdot \bar{c} = 0$, $\bar{b} \cdot c = 0$. Si le point $P \in a$, l'ensemble $e(P)$ est d'après le théorème (8,2), un continu, donc $e(P) \subset b$ ou bien $e(P) \subset c$. Désignons par β et γ les sous-ensembles de l'ensemble a tels que $P \in \beta$ si $e(P) \subset b$ et $P \in \gamma$ si $e(P) \subset c$. On a $\beta + \gamma = a$ et $\beta \cdot \gamma = 0$. Mais l'ensemble a est connexe par hypothèse, donc $\beta \cdot \gamma \neq 0$ ou bien $\beta \cdot \bar{\gamma} \neq 0$.

Admettons la première alternative et supposons que le point $Q_0 \in \beta \cdot \gamma$. Comme $Q_0 \in \bar{\beta}$, il existe une suite de points $Q_1, Q_2, \dots$, appartenant à l'ensemble β , tels que $\lim_{i \rightarrow +\infty} Q_i = Q_0$ et une suite d'éléments $I_1, I_2, \dots$, telle que l'élément I_k est issu du point Q_k , $k = 1, 2, \dots$ et a son extrémité dans l'ensemble b . Posons $\sum_{i=0}^{\infty} Q_i = Z$. L'ensemble Z est un sous-ensemble compact de l'ensemble W et, en vertu du théorème (4,1), la zone d'émission de l'ensemble Z est un ensemble compact; comme les courbes $I_1, I_2, \dots$

⁽⁹⁾ Il pourrait paraître impossible que des courbes asymptotiques soient issues d'un point dont la trace d'émission est un continu. On peut pourtant donner des exemples simples de familles du type $\mathcal{G}$ qui prouvent qu'il n'en est rien. Mais si l'ensemble W est tel que pour τ_1, τ_2 quelconques l'ensemble $W\{\tau_1 < t < \tau_2\}$ soit borné et que la trace d'émission d'un point appartenant à l'ensemble W soit un continu, alors il n'existe pas de courbes asymptotiques issues de ce point.

sont contenues dans $E(Z)$, il résulte immédiatement de la propriété 3° de la famille F qu'il existe un élément de la famille F issue du point Q_0 et ayant son extrémité P_0 dans l'ensemble $\bar{b}$. Le point P_0 appartient à l'ensemble R et, comme $Q_0 \in U+T$, il s'ensuit de l'hypothèse $Z_2 F$ que $P_0 \in T$, c'est-à-dire $e(Q_0) \cdot \bar{b} \neq 0$. D'autre part, $Q_0 \in \gamma$ et $e(Q_0) \subset c$, en contradiction avec l'hypothèse $\bar{b} \cdot c = 0$.

En admettant la seconde alternative nous arriverions de la même façon à une contradiction avec l'hypothèse $b \cdot \bar{c} = 0$. Les contradictions ainsi obtenues achèvent la démonstration du théorème (8,3).

Remarque (8.1). On peut donner des exemples, même triviaux, qui montrent que la trace d'émission d'un point P appartenant à l'ensemble W peut ne pas être un continu, bien qu'il n'existe pas de courbes asymptotiques issues du point P . Pourtant s'il existe un nombre $\tau > t_P$ tel que l'ensemble $e(P, \tau)$ soit un continu et qu'il soit contenu dans l'ensemble $U+T$, alors $e(P)$ est aussi un continu. En effet, comme il n'existe pas de courbes asymptotiques issues du point P , l'ensemble $E(P)$ est compact et, en vertu de (v_2) il existe un nombre $\bar{t}$ tel que $e(P) = e(P, \bar{t})$; par conséquent de la propriété (v_4) nous obtenons $e(P) = e(e(P, \tau), \bar{t}) = e(e(P, \tau))$. Il suit de là et des théorèmes (8,1), (8,3) que $e(P)$ est un continu.

Cette remarque généralise le théorème (8,2) et peut servir à généraliser le théorème (8,3).

9. Nous nous occuperons maintenant de théorèmes relatifs aux propriétés asymptotiques et aux limites d'une famille F du type $\mathcal{G}$. Une telle famille étant aussi une famille du type $\mathcal{F}$, les théorèmes établis précédemment restent en vigueur. Pour en obtenir d'autres, nous nous appuyons sur les théorèmes du paragraphe 8, surtout sur le théorème (8,3).

Lemme. Supposons que l'ensemble σ et la famille F du type $\mathcal{G}$ satisfont à la condition:

$$(9,1) \quad e(U + \sigma) = \sigma.$$

* Si l'ensemble b est contenu dans l'ensemble W et l'ensemble a , connexe et contenu dans l'ensemble $U + \sigma$, a des points communs avec deux composantes distinctes de l'ensemble $\sigma - b^{(10)}$, on a l'une des deux alternatives suivantes (u_1) : il existe une courbe asymptotique de la famille F issue de l'ensemble a , ou bien

⁽¹⁰⁾ Nous admettons par là même que l'ensemble $\sigma - b$ n'est pas connexe. La même remarque se rapporte aux ensembles $T - b$, $S - b$, $S_* - b$, dont il est question dans les théorèmes (9,1)-(9,3).

(u_2) : il existe un élément de la famille F dont l'origine est dans l'ensemble a et l'extrémité dans l'ensemble b .

Démonstration. D'après les hypothèses du lemme il existe deux composantes distinctes T_1 et T_2 de l'ensemble $\sigma - b$ et deux points P_1 et P_2 tels que

$$(9,2) \quad P_1 \in T_1 \cdot a, \quad P_2 \in T_2 \cdot a.$$

Mais il résulte de (9,1) et de la définition (7,1) que $\sigma \subset T$, donc les points P_1 et P_2 appartiennent à l'ensemble T et, en vertu de cette même définition, on a $P_1 \in e(P_1)$ et $P_2 \in e(P_2)$. Il suit de là et de (9,2) que l'ensemble $e(a)$ a des points communs avec les ensembles T_1 et T_2 . Si l'alternative (u_2) n'avait pas lieu, la zone d'émission de l'ensemble a serait disjointe de l'ensemble b et, comme $e(a) \subset E(a)$, on aurait

$$(9,3) \quad e(a) \cdot b = 0.$$

Mais de l'hypothèse $a \subset U + \sigma$ et de (9,1) il s'ensuit que $e(a) \subset \sigma$, d'où il résulte, d'après (9,3) que l'on a $e(a) \subset \sigma - b$. Pourtant nous avons déjà prouvé que l'ensemble $e(a)$ a des points communs avec deux composantes distinctes de l'ensemble $\sigma - b$, donc il en résulterait que l'ensemble $e(a)$ n'est pas connexe. D'autre part, comme $\sigma \subset T$, on a $a \subset U + T$; par conséquent, si l'alternative (u_1) , elle aussi, n'avait pas lieu, l'ensemble $e(a)$ serait connexe en vertu du théorème (8,3). La contradiction obtenue achève la démonstration du lemme.

Remarque (9.1). Le lemme que nous venons d'établir peut être généralisé. En effet, il est visible d'après la démonstration qu'au lieu d'admettre la connexité de l'ensemble a il aurait suffi de supposer qu'il existe un nombre i tel que $a \subset W\{t \leq i\}$ et que l'ensemble $e(a, i)$ soit connexe. Dans ce cas il n'y aurait qu'à tenir compte du fait que $e(a) = e(e(a, i))$. Dans l'exemple (13,1) nous nous occupons d'un tel cas. Un autre exemple d'un tel ensemble est fourni par un ensemble du type d'Antoine (cf. [8]).

Du lemme précédent résultent trois théorèmes que nous énoncerons ci-dessous. La conclusion de chacun d'eux coïncide avec celle du lemme et nous la désignerons pour abrégé: „ (u_1) ou bien (u_2) ”.

Théorème (9.1). Si l'ensemble b est contenu dans l'ensemble W et si l'ensemble connexe a , contenu dans l'ensemble $U + T$, a des points communs avec deux composantes distinctes de l'ensemble $T - b$, on a (u_1) ou bien (u_2) .

Démonstration. De la formule (6,3) et de la définition (7,1) il s'ensuit que $e(U+T) = T$ et le théorème (9,1) résulte du lemme en y substituant T au lieu de σ .

Les deux théorèmes suivants se rapportent au cas où la famille F est du type $\mathcal{G}_*$.

Théorème (9.2). *Admettons l'hypothèse $Z_3 F$. Si l'ensemble b est contenu dans l'ensemble W et si l'ensemble connexe a , contenu dans l'ensemble $U+S$, a des points communs avec deux composantes distinctes de l'ensemble $S-b$, alors (u_1) ou bien (u_2) .*

Théorème (9.3). *Admettons l'hypothèse $Z_3 F$. Si l'ensemble b est contenu dans l'ensemble W et si l'ensemble connexe a , contenu dans l'ensemble $U+S_*$, a des points communs avec deux composantes distinctes de l'ensemble S_*-b , alors (u_1) ou bien (u_2) .*

Les théorèmes (9,2) et (9,3) résultent du lemme de la même manière que le théorème (9,1) si, au lieu de la formule (6,3), on fait usage de (6,6).

Comme une famille du type $\mathcal{G}_*$ est une famille du type $\mathcal{G}$, tous les trois théorèmes peuvent être appliqués aux familles du type $\mathcal{G}_*$. Comme les ensembles T , S et S_* ne sont pas nécessairement identiques, aucun de ces théorèmes ne résulte des deux autres et tous les trois sont indispensables pour la théorie.

Chacun des théorèmes (9,1)-(9,3) peut être généralisé moyennant la remarque (9,1). De la remarque (8,1) il s'ensuit que leur généralisation peut être poussée encore plus loin, mais nous laisserons maintenant ce sujet de côté.

10. Définition (10.1). Nous dirons que la famille F est une famille du type $\mathcal{G}_0^-$ définie dans l'ensemble W , si elle est une famille du type $\mathcal{F}$ définie dans l'ensemble W et si, de plus, la condition suivante est remplie:

4- Si le point $P \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'intersection de la zone d'émission gauche du point P avec l'hyperplan $t = \tau$ est pour $t_P - \varepsilon \leq \tau \leq t_P$ un continu.

Hypothèse Z_2^- . Si une courbe de la famille F a son extrémité dans l'ensemble U et rencontre l'ensemble R au point Q , alors $Q \in T^-$.

Hypothèse Z_3^- . Si une courbe de la famille F a son extrémité dans l'ensemble U et rencontre l'ensemble R au point Q , alors $Q \in S^-$.

Par $Z_2^- F$ ($Z_3^- F$) nous désignerons l'hypothèse suivante: dans l'ensemble W se trouve définie une famille F du type $\mathcal{G}_0^-$ et, en outre, l'hypothèse Z_2^- (Z_3^-) est vérifiée. Une famille du type $\mathcal{G}_0^-$ satisfaisant à l'hypothèse Z_2^- (Z_3^-) sera dite famille du type $\mathcal{G}^-$ ($\mathcal{G}_*^-$).

Remarque (10.1). Si l'on change le sens de l'axe t , les rôles des ensembles T^- , S^- , S_*^- , $E^-(a)$ d'une part, et ceux des ensembles T , S , S_* , $E(a)$ de l'autre seront interchangés, aussi bien que le rôle des familles du type $\mathcal{G}^-$ ($\mathcal{G}_*^-$) et du type $\mathcal{G}$ ($\mathcal{G}_*$) ou encore celui des courbes asymptotiques à gauche et à droite. Il s'ensuit qu'il est facile d'établir, pour les familles des types $\mathcal{G}^-$ et $\mathcal{G}_*^-$, des théorèmes analogues aux théorèmes (9,1)-(9,3); ces nouveaux théorèmes s'obtiennent en remplaçant T , T^- , S ... respectivement par T^- , T , S^- , ..., les hypothèses Z_2F , Z_3F par Z_2^-F , Z_3^-F , la conclusion (u_1) par la suivante: (u_1^-) : il existe une courbe asymptotique à gauche de la famille F dont l'extrémité est dans l'ensemble a .

Pour illustrer la théorie que nous venons d'exposer nous allons donner quelques exemples, dans lesquels l'espace D_0 sera l'espace euclidien E^2 des points $x = (x_1, x_2)$.

Exemple (10.1). $W = (t, x_1, x_2) \{ |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1, -1 \leq t < +\infty \}$. Posons $\sigma = (t, x_1, x_2) \{ |x_1| = 1, |x_2| < 1, -1 < t < +\infty \}$ et désignons par $a(x_2)$, avec $|x_2| < 1$, le segment d'extrémités $(0, -1, x_2)$, $(0, 1, x_2)$.

Dans chacun des cas:

(j) si l'hypothèse Z_2F est vérifiée et $\sigma \subset T \subset \sigma$,

(jj) si l'hypothèse Z_3F est vérifiée et $\sigma \subset S \subset \sigma$,

(jjj) si l'hypothèse Z_3F est vérifiée et $\sigma \subset S_* \subset \sigma$,

on constate, en appliquant respectivement les théorèmes (9,1), (9,2), (9,3), qu'il existe une courbe asymptotique de la famille F issue du segment $a(x_2)$.

Désignons par $b(x_1)$, avec $|x_1| < 1$, le segment d'extrémités $(\tau, x_1, -1)$, $(\tau, x_1, 1)$, où τ désigne un nombre positif quelconque et considérons l'ensemble $W\{t \leq \tau\}$. Le segment $b(x_1)$ divise les ensembles $T(\tau)$, $S(\tau)$, $S_*(\tau)$ respectivement dans les cas (j), (jj), (jjj) en deux parties et chacune des extrémités du segment $a(x_2)$ appartient à chacune de ces parties. Comme la famille F restreinte à l'ensemble $W\{t \leq \tau\}$ ne contient pas de courbes asymptotiques, nous déduisons des théorèmes (9,1)-(9,3) que dans chacun des cas (j)-(jjj) il existe un élément de la famille F issue du segment $a(x_2)$ et aboutissant dans l'ensemble $b(x_1)$.

Exemple (10.2). $W = (t, x_1, x_2) \{ x_1 \geq 0, |x_2| \leq x_1, -\infty < t < +\infty \}$. Admettons l'hypothèse Z_3F et supposons que les points de la droite l d'équation $x_1 = x_2 = 0$ ne soient pas des points extrémités, alors que $\text{Front } W - l \subset S$. L'ensemble S est donc la somme de deux demi-plans S_1 et S_2 , limités par la droite l . Si le point $A_1 \in S_1$ et le point $A_2 \in S_2$, il

existe une courbe asymptotique de la famille F issue du segment A_1A_2 . Cela résulte immédiatement du théorème (9,2) ($a = A_1A_2$, $b = 0$).

Si l'on suppose de plus que dans l'ensemble $W\{t \leq \tau\}$ la famille F n'a pas de courbes asymptotiques à droite, et que les points A_1, A_2 appartiennent à cet ensemble, et si b désigne une demi-droite quelconque contenue dans l'ensemble $W\{t = \tau\}$ et passant par le point $(\tau, 0, 0)$, alors il existe un élément de la famille F issu du segment A_1A_2 et ayant son extrémité sur la demi-droite b .

Cette conclusion résulte, elle aussi, du théorème (9,2) si on applique celui-ci à la famille F restreinte à l'ensemble $W\{t \leq \tau\}$. L'ensemble $S(\tau)$ est séparé par une partie de la droite $x_1 = x_2 = 0$ et par la demi-droite b .

Toutes les hypothèses de cet exemple seront vérifiées, en particulier, lorsque la famille F est une famille d'intégrales d'un système d'équations différentielles voisines d'équations linéaires et les racines caractéristiques ont des signes différents.

Exemple (10.3). $W = (t, x_1, x_2)\{x_1^2 + x_2^2 \leq 1, t \geq 0\}$. Désignons par a une courbe de Jordan contenue dans l'ensemble $W\{t = 0\}$ et contenant dans son intérieur le point $(0, 0, 0)$, par $K(t)$ une courbe d'équation $x_1 = \sin \lambda(t)$, $x_2 = \cos \lambda(t)$, $t \geq 0$, où $\lambda(t)$ est une fonction quelconque continue et définie pour $t \geq 0$. Enfin, admettons l'hypothèse $Z_2^- F$ et supposons que la demi-droite $x_1 = x_2 = 0$, $t \geq 0$ soit une courbe de la famille F .

Nous allons montrer que si les points de la courbe $K(t)$ n'appartiennent pas à l'ensemble T , il existe une courbe asymptotique de la famille F issue de la courbe a .

Démonstration. Comme la courbe a est un ensemble compact, il suffit, d'après le théorème (5,2), de prouver que l'ensemble $E(a)$ est non borné. Dans ce but nous aurons à résoudre un problème aux limites; nous montrerons notamment qu'il existe un élément de la famille F issue de l'ensemble a et aboutissant à chacun des ensembles $b(\tau)$, où $b(\tau)$ désigne le segment joignant le point $(\tau, 0, 0)$ au point $K(\tau) = (\tau, \sin \lambda(\tau), \cos \lambda(\tau))$. Comme $K(\tau) \in R$, mais $K(\tau) \notin T$, il résulte de la formule (6,4)⁽¹¹⁾ que $K(\tau) \in T^-$, donc le point $K(\tau)$ appartient aussi à la trace d'émission gauche du point $K(\tau)$.

D'autre part, comme le point $(0, 0, 0)$ est l'origine de la courbe de la famille F d'équation $x_1 = x_2 = 0$, $0 \leq t \leq \tau$, $\tau > 0$, dont l'extrémité est le point $(\tau, 0, 0)$, le point $(0, 0, 0)$ appartient à la trace d'émission

⁽¹¹⁾ Il suit de la remarque (10,1) que la formule (6,4) subsiste aussi sous l'hypothèse $Z_3^- F$.

gauche du point $(\tau, 0, 0)$. Il s'ensuit que les points $K(\tau)$ et $(\tau, 0, 0)$ appartiennent à la trace d'émission gauche du segment $b(\tau)$, et en outre ces points appartiennent à deux composantes distinctes de l'ensemble T -séparées par la courbe a . Mais comme l'ensemble $b(\tau)$ est connexe et il n'existe pas de courbes asymptotiques à gauche ayant leur extrémité dans l'ensemble $b(\tau)$, il résulte du théorème (9,1) et de la remarque (10,1) qu'il existe une courbe de la famille F ayant son origine dans l'ensemble a et son extrémité dans l'ensemble $b(\tau)$. Le nombre τ étant arbitraire, cela prouve que $E(a)$ est un ensemble non borné, c.q.f.d.

Dans cet exemple on aurait pu admettre, comme dans l'exemple (10,1), au lieu des hypothèses $Z_2^- F$ et $K(t) \nsubseteq T$, les hypothèses $Z_3^- F$ et $K(t) \nsubseteq S_+$. En effet, il résulte de la formule (6,6) que dans ce cas on a aussi $K(t) \nsubseteq T^-$, et dans la démonstration il n'y a plus rien à changer⁽¹²⁾.

L'exemple (10,3) montre qu'en appliquant les théorèmes (5,2) et (9,1), ou (5,2) et (9,2), ou bien (5,2) et (9,3), on peut constater, dans certains cas, qu'il existe des courbes asymptotiques à droite d'une famille du type $\mathcal{G}^-$ ou $\mathcal{G}_+$.

La II^{mo} partie du travail paraîtra dans le tome XV de ces Annales.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Albrecht, F., *Remarques sur un théorème de T. Ważewski relatif à l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 2 (1954), p. 315-318.
- [2] Bielecki, A., *Extension de la méthode du rétracte de T. Ważewski aux équations au paratingent*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 9, 3 (1955), p. 37-58.
- [3] — *Certaines propriétés topologiques des solutions des équations au paratingent*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 9, 4 (1955), p. 63-79.
- [4] Bielecki, A. et Kluczny, C., *Sur un théorème concernant des systèmes d'équations différentielles ordinaires*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 14, 8 (1960), p. 115-123.
- [5] — *Sur une généralisation d'un théorème de H. Kneser*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 14, 7 (1960), p. 109-114.
- [6] Pliś, A., *On a topological method for studying the behaviour of the integrals of ordinary differential equations*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 2, 9 (1954), p. 415-418.
- [7] Ważewski, T., *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Ann. Soc. Polon. Math., 20 (1947), p. 279-313.

⁽¹²⁾ L'exemple (10,1) a été emprunté au travail [7], les suivants sont des modifications d'exemples donnés dans [4] en rapport avec l'étude de la famille d'intégrales d'un système d'équations différentielles satisfaisant à la condition d'unicité.

- [8] Ważewski, T. et Szarski, J., *Sur l'existence des intégrales asymptotiques des équations différentielles issues d'un ensemble de dimension zéro*, Colloquium Math., **6** (1958), p. 215-218.
- [9] Zaremba S. K., *Sur certaines familles de courbes en relation avec la théorie des équations différentielles*, Ann. Soc. Polon. Math., **15** (1936), p. 83-100.

Streszczenie

W przestrzeni $(-\infty, \infty) \times D_0$ punktów (t, x) , gdzie $t \in (-\infty, \infty)$ a x jest elementem przestrzeni metrycznej D_0 , w której kule domknięte są zwarte, dany jest zbiór W ; $U = \text{Int } W$, zbiór $W - W$ jest domknięty.

Zbiór F , którego elementami są punkty zbioru W lub zawarte w nim krzywe ciągłe $x = \varphi(t)$, gdzie t przebiega jakiś przedział Δ , nazywam rodziną typu $\mathcal{F}$, jeżeli: 1° $W \subset F$. 2° Każda krzywa, będąca częścią krzywej zbioru F lub sumą takich krzywych, należy do F ; krzywa, której każdy zwarty (tj. domknięty i ograniczony) odcinek należy do F , należy także do F . 3° Każdy ciąg elementów zwartych zbioru F , zawarty w podzbiorze zwartym zbioru W , zawiera w sobie podciąg zbieżny do jakiegoś zwartego elementu zbioru F (zbieżność w sensie Hausdorffa w przestrzeni zbiorów).

Początkiem i końcem krzywej $x = \varphi(t)$, $t \in \Delta$, nazywam jej punkty odpowiadające początkowi i końcowi przedziału Δ (mogą istnieć lub nie). Element punktowy jest identyczny ze swym początkiem i końcem. Przez S (lub T) oznaczam zbiór punktów zbioru W , nie będących początkami krzywych rodziny F (krzywych rodziny F mających punkty wspólne z wnętrzem W). Krzywą wysyconą w prawo rodziny F określa się analogicznie jak wysyconą całkę równania różniczkowego; jeśli nie ma ona końca, to nazywa się asymptotyczną w prawo. Przez $E(a)$ oznaczam prawą strefę emisji zbioru $a \subset W$. Formułuję warunki:

4⁺ Jeśli $P = (t_0, x_0) \in U$, to przecięcie się strefy emisji $E(P)$ z hiperpłaszczyzną $t = \tau > t_0$ jest kontinuum dla τ dostatecznie bliskich t_0 .

Z_2 (lub Z_3). Jeśli koniec krzywej rodziny F , wychodzącej z U , należy do $W - U$, to należy do T (odp. do S).

Rodzinę typu $\mathcal{F}$ zaliczam do typu $\mathcal{G}$ (lub $\mathcal{G}_*$), jeśli spełnia warunki 4⁺ i Z_2 (odp. Z_3); typ $\mathcal{G}$ obejmuje typ $\mathcal{G}_*$. (Rodziny całek układów równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego i różne ich znane uogólnienia spełniają warunki 1°, 2°, 3° i 4⁺). Dowodzę między innymi twierdzeń następujących:

(4,1) Jeśli ze zbioru zwartego $a \subset W$ nie wychodzą krzywe asymptotyczne rodziny $F \in \mathcal{F}$, to zbiór $E(a)$ jest zwarty.

(8,3) Jeśli ze zbioru spójnego $a \subset U+T$ nie wychodzą krzywe asymptotyczne rodziny $F \in \mathcal{G}$, to zbiór $e(a) = E(a) \cdot T$ jest spójny (uogólnienie wyniku [6]). Jako wnioski otrzymuję np. twierdzenia:

(5,2) Jeśli strefa emisji $E(a)$ zbioru zwartego $a \subset W$, odpowiadająca rodzinie $F \in \mathcal{F}$, nie jest zwarta, to ze zbioru a wychodzi krzywa asymptotyczna rodziny F .

(9,1) Jeśli $F \in \mathcal{G}$ (lub $\mathcal{G}_*$) a zbiór $b \subset W$ i zbiór spójny $a \subset U+T$ (lub $a \subset U+S$) ma punkty wspólne z dwiema różnymi komponentami zbioru $T-b$ (lub $S-b$), to ze zbioru a wychodzi krzywa asymptotyczna rodziny F lub pewien element rodziny F ma początek w a i koniec w b .

Twierdzenia te mogą być stosowane do badania własności asymptotycznych całek układów równań różniczkowych zwyczajnych i ich uogólnień, jak również do pewnych zadań brzegowych w teorii tych równań. W pewnych przypadkach twierdzenia (5,2) i (9,4) mogą być wyzyskane (dla wykazania istnienia krzywych asymptotycznych w lewo (przykład (10,3))).

Резюме

В пространстве $(-\infty, \infty) \times D_0$ точек (t, x) , где $t \in (-\infty, \infty)$, а x есть элемент метрического пространства D_0 , в котором замкнутые шары компактны, дано множество W ; $U = \text{Int } W$, множество $\bar{W} - W$ замкнутое.

Множество F , которого элементами являются точки множества W , или заключенные в нем непрерывные кривые $x = \varphi(t)$, где t принадлежит некоторому отрезку Δ , я называю семейством типа $\mathcal{F}$, если: 1° $W \subset F$. 2° Всякая кривая, являющаяся частью кривой множества F или суммой таких кривых, принадлежит к F ; кривая, которой всякий компактный (т. е. замкнутый и ограниченный) отрезок принадлежит к F , тоже принадлежит к F . 3° Всякая последовательность компактных элементов множества F , заключенная в компактном подмножестве множества W , включает в себе подпоследовательность, сходящуюся к какому-то компактному элементу множества F (сходимость в смысле Гаусдорффа в пространстве множеств).

Началом и концом кривой $x = \varphi(t)$, $t \in \Delta$, я называю её точки соответствующие началу и концу отрезка Δ (они могут существовать или нет). Точечный элемент тождествен со своим началом и концом. Через S (или T) я обозначаю множество точек множества W , не являющихся началами кривых семейства F (кривых семейства F , имеющих общие точки с внутренней частью W). Кривая семейства F , непро-

должимая вправо, определяется аналогично, как непродолжимый интеграл дифференциального уравнения; если у неё нет конца, то называется асимптотической вправо. Через $E(a)$ я обозначаю правую зону эмиссии множества $a \subset W$. Я формулирую условия:

4⁺ Если $P = (t_0, x_0) \in U$, то пересечение зоны эмиссии $E(P)$ с гиперплоскостью $t = \tau > t_0$ является континуумом для τ достаточно близких к t_0 .

Z_2 (или Z_3). Если конец кривой семейства F , выходящей из U принадлежит к $W - U$, то он принадлежит к T (к S).

Семейство типа $\mathcal{F}$ я причисляю к типу $\mathcal{G}$ (или $\mathcal{G}_*$), если оно исполняет условия 4⁺ и Z_2 (соответственно Z_3); тип $\mathcal{G}$ включает тип $\mathcal{G}_*$. (Семейства интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и различные известные их обобщения исполняют условия 1°, 2°, 3°, 4⁺). Доказаны среди иных следующие теоремы:

(4,1). Если из компактного множества $a \in W$ не выходят асимптотические кривые семейства $F, F \in \mathcal{F}$, то множество $E(a)$ компактно.

(8,3) Если из связного множества $a \subset U + T$ не выходят асимптотические кривые семейства $F \in \mathcal{G}$, то множество $e(a) = E(a) \cdot T$ связно (обобщение результата [6]). Как следствия, я получаю, например, теоремы:

(5,2) Если зона эмиссии $E(a)$ компактного множества $a \in W$, соответствующая семейству $F \in \mathcal{F}$, не компактна, то из множества a выходит асимптотическая кривая семейства F .

(9,1) Если $F \in \mathcal{G}$ (или $\mathcal{G}_*$), а множество $b \subset W$, и связное множество $a \subset U + T$ (или $a \subset U + S$) имеет общие точки с двумя различными компонентами множества $T - b$ (или $S - b$), то из множества a выходит асимптотическая кривая семейства F , или некоторый элемент семейства F имеет начало в a и конец в b .

Эти теоремы могут быть применимы к исследованию свойств асимптотических интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений и их обобщений, а также к некоторым краевым задачам в теории этих уравнений. В некоторых случаях теоремы (5,2) и (9,4) могут быть использованы для доказательства существования кривых асимптотических влево (пример (10,3)).