ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XV, 1 SECTIO A 1961

Z Katedry Zespołowej Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr A. Bielecki

ZDZISŁAW LEWANDOWSKI

Sur les majorantes des fonctions holomorphes dans le cercle $|z| < 1$

O majorantach funkcji holomorficznych w kole $|z| < 1$

О мажорантах голоморфных функций в круге $|z| < 1$

1. Problème de M. Biernacki et problème inverse.

J'admets que $C_\varrho = \{z:|z| < \varrho\}$, où $\varrho > 0$, et que les symboles $f(z)$ et $F(z)$ désigneront toujours, dans cette note, des fonctions holomorphes dans le cercle C_1, jouissant en outre des propriétés suivantes:

La fonction $F(z)$ est univalente dans C_1, $f(0) = F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ et $\arg f'(0) = 0$. Il s'ensuit que $F(z)$ est une fonction de classe S et que l'on a toujours

$$(1) \qquad F(z) = z+A_2z^2+\ldots, \qquad f(z) = az+a_2z^2+\ldots$$

pour $z \epsilon C_1$, le coefficient a étant un nombre réel, non négatif. J'admets encore que le symbole (F, f, ϱ), où $\varrho \epsilon (0, 1\rangle$, signifiera que $f(C_\varrho) \subset F(C_\varrho)$, c'est-à-dire que $\{u:u = f(z), |z| < \varrho\} \subset \{u:u = F(z), |z| < \varrho\}$, et le symbole $|F, f, \varrho|$ signifiera que $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ pour $|z| \leqslant \varrho$ lorsque $\varrho \epsilon (0, 1)$, ou bien pour $|z| < 1$, lorsque $\varrho = 1$. Il est bien connu que dans nos hypothèses $(F, f, \varrho) \rightarrow (F, f, \sigma)$ pour tout $\sigma \epsilon (0, \varrho\rangle$, $|F, f, \varrho| \rightarrow |F, f, \sigma|$ pour tout $\sigma \epsilon (0, \varrho\rangle$.

Dans le cas particulier où $F(z) = z$, les deux relations (z, f, ϱ) et $|z, f, \varrho|$ sont équivalentes (lemme de Schwarz), ce qui n'est pas vrai en général. Cependant, M. Biernacki ([1], p. 50) a démontré en 1936, à l'aide d'un théorème de Rogosinski ([4], p. 259), que

$$(2) \qquad (F, f, 1) \rightarrow |F, f, \varrho|$$

si le nombre positif ϱ est suffisamment petit. Plus précisément, il existe une constante absolue, c'est-à-dire indépendante d'un choix particulier des fonctions f et F, $r \epsilon \langle 0, 1 \rangle$, telle que la relation (2) subsiste pour tout $\varrho \epsilon \langle 0, r \rangle$, mais pour chaque $\varrho > r$ il existe un couple de fonctions f et F (remplissant les hypothèses énoncées au début de cette note) telles que l'implication (2) est en défaut pour ces fonctions. En plus, M. Biernacki a prouvé (loc. cit.) que $r > \frac{1}{4}$. Plus récemment, en 1952, G. M. Golusin ([2], théorème 8', p. 218) a trouvé, en modifiant un peu la méthode du raisonnement, les limitations plus précises $0{,}35 < r \leqslant \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) = 0{,}386\ldots$, et enfin Shah Tao-shing ([5], N° 4) a montré que

$$r = \tfrac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \tag{3}$$

Ainsi le problème, posé en 1936 par M. Biernacki, se trouve complètement résolu, mais on peut se poser encore d'autres questions: Existe-t-il un nombre positif ϱ tel que l'on ait toujours

$$|F, f, 1| \to (F, f, \varrho), \tag{4}$$

les fonctions F et f étant assujetties aux conditions énoncées plus haut? Le maximum de tels nombres ϱ existe-t-il et quelle est sa valeur numérique?

Ce problème, en quelque sens inverse, semble assez intéressant, mais il n'est pas simple, car les méthodes élaborées par les auteurs cités ne s'appliquent plus, malgré des analogies apparentes. Le théorème que je vais énoncer à la fin de cette note ne contient qu'une réponse partielle aux questions que je viens de poser et il ne constitue qu'une première tentative pour résoudre ce nouveau problème.

2. La fonction $R(a)$ et les constantes R_1 et R_2

Les équations

$$\Phi(x) \equiv \frac{2x}{1+x^2} - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \sqrt{1-\frac{1}{4}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^4} = 0, \tag{5}$$

$$\psi(x) \equiv x^3+x^2+3x-1 = 0, \tag{6}$$

$$\chi(x, a) \equiv \frac{x+a}{1+ax} - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 = 0, \tag{7}$$

où x et a sont supposés réels et appartenant à l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$, jouissent des propriétés suivantes, bien faciles à vérifier par des calculs élémentaires: I. La fonction $\Phi(x)$ est croissante dans $\langle 0, 1 \rangle$ et l'équation (5) admet, dans $\langle 0, 1 \rangle$, une et une seule solution R_1 et on a $0{,}21 < R_1 < 0{,}25$. II. L'équation (6), dont le premier membre $\psi(x)$ est une fonction croissante dans $\langle 0,1\rangle$, a une et une seule solution R_2 dans cet intervalle; $0{,}29 < R_2 < 0{,}30$. III. Pour tout $a\in\langle 0,1\rangle$ fixe, l'équation (7) a dans $\langle 0,1\rangle$ une solution bien déterminée, que je désigne par $R(a)$. Elle est une fonction décroissante dans $\langle 0,1\rangle$ du paramètre a; $R(0) = R_2$, $R(1) = 0$. IV. On a $\chi(x, a) < 0$ pour $0 \leqslant x < R(a)$ et $a\in\langle 0,1\rangle$. V. Si $\chi(a,a) = 2a/(1+a^2)-(1-a)^2/(1+a)^2 < 0$, on a $a < R(a)$, donc $R_1 < R(R_1)$ puisque $\chi(R_1, R_1) < \Phi(R_1) = 0$.

3. Les ensembles U, V, W

Désignons par U l'ensemble des nombres $\varrho\in(0,1\rangle$ tels que la relation (4) soit remplie indépendamment du choix particulier des fonctions F et f, compatibles avec les hypothèses du N° 1. En ajoutant l'hypothèse supplémentaire que $a \leqslant R_1$, ou bien $a > R_1$, dans le développement (1) de la fonction $f(z)$, on obtient pareillement deux autres ensembles que je désigne par V resp. W. Il est facile de voir que les ensembles U, V et W, ainsi définis, sont des intervalles contenus dans $(0,1\rangle$, cf. les remarques au début du N° 1, et que $U = V\cdot W$.

4. $(0, R_1) \subset V$

Supposons que l'on ait $|F,f,1|$ et que le coefficient a dans le développement (1) de la fonction $f(z)$ vérifie l'inégalité $a \leqslant R_1$, et par conséquent $R(a) \geqslant R(R_1)$; cf. III, N° 2. D'après V, N° 2, on a $R_1 < R(R_1)$, donc $R_1 < R(a)$ et, en vertu de IV,

$$\chi(R_1, a) < 0. \tag{9}$$

D'autre part, comme $F(z)\in S$, on a (cf. p. ex. [3], p. 59)

$$|z|/(1+|z|)^2 \leqslant |F(z)| \leqslant |z|/(1-|z|)^2 \quad \text{dans } C_1, \tag{10}$$

tandis que la fonction $g(z) = f(z)/F(z)$, étant holomorphe et inférieure en module à 1 dans C_1, satisfait (cf. p. ex. [3], p. 360) à l'inégalité $|g(z)| \leqslant (|z|+|g(0)|)/(1+|g(0)|\cdot|z|)$. Mais $g(0) = a$, donc

$$|f(z)| \leqslant |F(z)|\frac{|z|+a}{1+a|z|} \quad \text{dans } C_1. \tag{11}$$

Vu (11), (10), (9), (7) et encore une fois (10) on a, sur la circonférence $\Gamma_1 = \{z: |z| = R_1\}$,

$\max|f(z)| \leqslant \max|F(z)|(R_1+a)/(1+aR_1) \leqslant$
$\leqslant [R_1/(1-R_1)^2]\cdot(R_1+a)/(1+aR_1) \leqslant R_1/(1+R_1)^2 \leqslant \min|F(z)|$,

c'est-à-dire le contour $f(\Gamma_1)$ est contenu dans le domaine fermé limité par le contour $F(\Gamma_1)$ et, par conséquent, (F, f, R_1).

Ainsi, j'ai démontré que la relation (4) est toujours remplie pour $\varrho = R_1$ lorsque $a \leqslant R_1$, et que, autrement dit, $(0, R_1\rangle \subset V$.

5. $(0, R_1) \subset W$

Maintenant, je vais m'occuper de la seconde alternative $a > R_1$. Je vais montrer que, dans ce cas, la relation (4) subsiste encore pour tout $\varrho \in (0, R_1)$.

En effet, soit $a > R_1$ et $|F, f, 1|$, ce qui entraîne évidemment l'inégalité $a \leqslant 1$. Fixons un nombre z_0 tel que $0 < |z_0| = R_1$. Le point $a = F(z_0)$ est situé sur le contour $\Lambda_1 = F(\Gamma_1)$ qui, à son tour, est contenu dans le domaine fermé $A = \{w: R_1(1+R_1)^{-2} \leqslant |w| \leqslant R_1(1-R_1)^{-2}\}$, en vertu du théorème bien connu de la déformation pour les fonctions de classe S (cf. par exemple [3], p. 59).

D'autre part, le nombre $2-\sqrt{3}$, inférieur à R_1 (I, N° 2), étant le rayon de convexité pour les fonctions de classe S (cf. par exemple [3], p. 175), le circuit Λ_1 est convexe, ce qui va jouer un rôle essentiel dans la suite.

La demi-droite issue de l'origine O et passant par le point a se coupe avec les deux contours, extérieur et intérieur, de l'anneau A, aux points b et c respectivement. La ligne circulaire de centre b, passant par l'origine O, détermine deux nouveaux points d et e, ses intersections avec le contour intérieur de A. Remarquons que le point a est situé dans le triangle curviligne $bdOeb$ tandis que le triangle $adOea$ est contenu dans le domaine fermé et convexe $D = F(\bar{C}_{R_1})$, limité par le circuit Λ_1. On a donc

$$\lambda = \sphericalangle daO > \mu = \sphericalangle dbO = \arcsin\left(\left(\frac{1-R_1}{1+R_1}\right)^2 \sqrt{1-\tfrac{1}{4}\left(\frac{1-R_1}{1+R_1}\right)^4}\right) = \tag{12}$$
$$= \arcsin \frac{2R_1}{1+R_1^2}$$

pour $a \neq b$. Soit, comme auparavant, $g(z) = f(z)/F(z)$ et posons $h(z) = 1-g(z)$, d'où il s'ensuit que, pour $|z| < 1$, on a $|g(z)| < 1$, $\operatorname{Re} h(z) > 0$, $g(z) = a+\beta_1 z+\ldots$, $h(z) = 1-a-\beta_1 z-\ldots$ et

$$f(z) = F(z)-F(z)h(z). \tag{13}$$

La fonction $H(z) = (1-a)(1+z)(1-az)^{-1}$ est holomorphe dans C_1, $H(0) = 1-a$ et l'image $H(C_1)$ du cercle C_1 est le cercle de rayon 1 et de centre 1. Donc, évidemment

$$h(C_1) \subset H(C_1) \tag{14}$$

et, par conséquent, $h(z) = H(\omega(z))$, où $\omega(z)$ est une fonction holomorphe dans C_1, telle que $|\omega(z)| < 1$ et $\omega(0) = 0$. Il s'ensuit que $h(z) = (1-a)(1+\omega(z))(1-a\omega(z))^{-1}$, d'où

$$|h(z)| \leqslant (1-a)\frac{1+|z|}{1-a|z|}, \tag{15}$$

$$|h(z_0)| \leqslant (1-a)\frac{1+R_1}{1-aR_1} < 1 \tag{16}$$

puisque $R_1 < a$.

D'autre part

$$|\arg h(z_0)| \leqslant \arcsin\frac{2R_1}{1+R_1^2} \leqslant \lambda \tag{17}$$

car $|z_0| = R_1$ et $\operatorname{Re} h(z) > 0$ (cf. par exemple [3], p. 372).

Ceci posé, on constate aisément à l'aide de (13), (16) et (17) que le point $f(z_0) = a - ah(z_0)$ est situé dans l'intérieur ou sur le contour du triangle $adOea$ et, à plus forte raison, $f(z_0) \epsilon D = F(\overline{C}_{R_1})$. Mais le nombre z_0 a été assujetti à la seule condition que $|z_0| = R_1$, donc $f(\Gamma_1) \subset F(\overline{C}_{R_1})$, d'où $f(C_{R_1}) \subset F(C_{R_1})$, et, de même, (F, f, ϱ) pour tout $\varrho \epsilon (0, R_1\rangle$, ce qui prouve que l'on a $(0, R_1) \subset W$.

6. $U \subset (0, R_2)$

Admettons, pour un instant, que

$$f(z) = z^2/(1+z)^2,\ F(z) = z/(1+z)^2. \tag{18}$$

Il est clair que $|F, f, 1|$ et que ces fonctions réalisent les hypothèses énoncées au N° 1. Or, pour tout $\varrho \epsilon (R_2, 1)$ on a $\psi(\varrho) > 0$ (cf. II, N° 1), d'où

$$f(-\varrho) > F(\varrho).$$

Mais cela signifie que l'ensemble $f(C_\varrho)$ n'est pas contenu dans l'ensemble $F(C_\varrho)$, c'est-à-dire la relation (F, f, ϱ) ne subsiste plus. Donc $U \subset (0, R_2\rangle$.

Conclusion.

J'ai démontré aux numéros 4, 5 et 6 que $(0, R_1) \subset V \cdot W = U \subset (0, R_2\rangle$. Il en résulte que $R = \sup U \epsilon \langle R_1, R_2\rangle$ et il est facile de montrer que $R \epsilon U$, c'est-à-dire que $R = \max U$ (je laisse au lecteur la démonstration, basée sur le fait que les domaines $f(C_\varrho)$ et $F(C_\varrho)$ varient d'une manière continue avec ϱ). Je vais énoncer ces résultats sous forme du théorème suivant:

Théorème. *Il existe un nombre positif R jouissant des propriétés suivantes;*

1° $R_1 \leqslant R \leqslant R_2$, *où* $R_1 > 0{,}21$ *et* $R_2 < 0{,}3$ *sont les nombres définis au* $N°$ 2.

2° *Si* $f(z)$ *est une fonction holomorphe pour* $|z| < 1$ *et* $F(z)$ *est une fonction holomorphe et univalente pour* $|z| < 1$, *si* $f(0) = F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ *et* $\arg f'(0) = 0$, *et enfin si* $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ *pour* $|z| < 1$, *alors* $f(C_\varrho) \subset F(C_\varrho)$ *pour tout* $\varrho \in (0, R)$.

3° *Pour tout* $\varrho \in (R, 1)$ *il existe deux fonctions* $f(z)$ *et* $F(z)$ *remplissant toutes les hypothèses du* N° 2°, *pour lesquelles l'inclusion* $f(C_\varrho) \subset F(C_\varrho)$ *ne se conserve plus; si* $\varrho > R_2$, *il suffit de prendre les fonctions* (18.)

Remarque 1. Il est évident que l'on peut remplacer les conditions $F'(0) = 1$ et $\arg f'(0) = 0$ par les suivantes: $\arg f'(0) = \arg F'(0)$ ou bien $f'(0) = 0$.

Remarque 2. Le problème consistant à trouver la valeur précise de la constante R est encore loin d'être résolu, cependant les limitations données ici suffisent déjà pour constater que $R < r$, où r désigne la constante analogue trouvée par Golusin [2], p. 218 et se rapportant au problème de M. Biernacki (voir N° 1), à savoir on a $R < 0{,}30$ et $r = 0{,}386\ldots$ Il est assez intéresant que dans certaines classes de fonctions f et F, le problème de Biernacki et le problème dit inverse conduisent à une constante jouant en même temps le rôle de r et de R; par exemple, si l'on ne considère que des fonctions f et F univalentes et étoilées, on obtient pour tous les deux problèmes la même constante $r^* = \sqrt{2}-1$; voir la note de A. Bielecki et Z. Lewandowski dans ce volume, page 45.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Biernacki, M., *Sur les fonctions univalentes*, Mathematica, Cluj, **12** (1936), p. 49-64.

[2] Голузин, Г. М., *О мажорации подчиненных аналитических функций I*, Математический Сборник, **29** (71), (1951), p. 209-224

[3] Голузин, Г. М., *Геометрическая теория функции комплексного переменного*, Москва-Ленинград (1952).

[4] Rogosinski W., *Zum Schwarzschen Lemma*, Jahrb. D.M.V., **44** (1934),p. 258-261

[5] Shah Tao-shing, *Goluzin's number* $(3-\sqrt{5})/2$ *is the radius of superiority in subordination*, Sci. Rec. 1 (1957), p. 258-261

Streszczenie

Niech R oznacza największą liczbę rzeczywistą dodatnią o następującej własności: jeśli $f(z) = az + a_2 z^2 + \ldots$ (gdzie a jest liczbą rzeczywistą nieujemną) jest holomorficzna a funkcja $F(z) = z + A_2 z^2 + \ldots$

jest holomorficzna i jednolistna, i spełnia nierówność $|F(z)| \geqslant |f(z)|$ dla $|z| < 1$, to obszar, w który funkcja $f(z)$ przekształca koło $|z| < \varrho$, $\varrho \epsilon (0, R)$, zawiera się w obszarze, w który to koło przekształca funkcja $F(z)$. Dowodzi się, że liczba taka istnieje i $0{,}21 < R < 0{,}29$. Dokładna wartość stałej R nie została znaleziona. Wynik ten jest w pewnym sensie odwrotny do pewnego twierdzenia M. Biernackiego [1], str. 50.

Резюме

Пусть R обозначает наибольшее действительное положительное число со следующим свойством: если $f(z) = az + a_2 z^2 + \ldots$ где a действительное неотрицательное число, есть голоморфная функция, а функция $F(z) = z + A_2 z^2 + \ldots$ голоморфна и однолистна и исполняет неравенство $|F(z)| \geqslant |f(z)|$ для $|z| < 1$, то область, в которую функция $f(z)$ преобразует круг $|z| < \varrho$, $\varrho \epsilon (0, R)$, заключается в области, в которую этот же круг преобразуется функцией $F(z)$.

Доказано, что существует такое число и $0{,}21 < R \leqslant 0{,}29\ldots$ Не найдено точное значение постоянной R.

Этот результат в некотором смысле является обращением одной теоремы М. Бернацкого [1], стр. 50.