ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XIV, 7 SECTIO A 1960

Z Katedry Zespołowej Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr A. Bielecki

ADAM BIELECKI et CZESŁAW KLUCZNY

Sur une généralisation d'un théorème de H. Kneser

O uogólnieniu twierdzenia H. Knesera

Обобщение одной теоремы Г. Кнезера

1. Hypothèses et notations

Nous désignons par X l'espace cartésien à n dimensions des points $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ etc. Les points de l'espace $X^* = (-\infty, \infty) \times X$ seront désignés par les symboles: $P = (t, x) = (t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $R = (s, y)$ etc. Nous admettons les hypothèses suivantes:

Hypothèses. *La frontière d'un ensemble* $\omega \subset X^*$, *non vide et ouvert est la somme de deux ensembles disjoints* Φ *et* Ψ, *l'ensemble* Ψ *étant fermé. Une fonction* $f(t, x)$, *à valeurs dans l'espace* X, *est définie et continue dans l'ensemble* $\Delta = \omega + \Phi$. *Les intégrales de l'équation différentielle ordinaire vectorielle* $x' = f(t, x)$, que nous appellerons tout court intégrales, *jouissent de la propriété suivante: Si une intégrale* $x = \varphi(t)$, $a \leqslant t \leqslant \beta$, *issue d'un point* $P = (a, \xi) \in \omega$ *aboutit en un point* $R = (\beta, \eta) \in \Phi$, *alors elle ne peut plus être prolongée au-delà de ce point*(1).

Nous allons encore introduire quelques définitions et notations.

Le symbole Π_σ désignera l'hyperplan $t = \sigma$ et $E(P)$ — la zone d'émission (positive) du point $P = (\tau, \xi)$, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points situés sur les intégrales $x = \varphi(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant a$, $\tau \leqslant a$, satisfaisant à la condition $\varphi(\tau) = \xi$; $e(P) = E(P) \cdot \Phi$.

---

(1) Cette condition coïncide avec celle que tout point „de sortie" est un point „de sortie forte", dans la note [2], p. 46.

Une intégrale issue d'un point $P \epsilon \omega$ contenue dans ω et saturée à droite, c'est-à-dire ne pouvant plus être prolongée dans le sens positif de l'axe t, sera appelée asymptotique; cf. [2], p. 50, ou bien [5], p. 301.

Nous dirons que la suite d'intégrales $x = \varphi_i(t)$, $t \epsilon \delta_i$, où $i = 1, 2, 3, \ldots$ et les δ_i désignent des intervalles, converge vers l'arc $x = \varphi_0(t)$, $t \epsilon \delta_0$ si, pour tout intervalle fermé $\langle \mu, \nu \rangle$, contenu dans l'intérieur de δ_0, il existe un entier positif N tel que la suite de fonctions $\varphi_i(t)$, $i = N, N+1, \ldots$, converge uniformément vers la fonction $\varphi_0(t)$ dans l'intervalle $\langle \mu, \nu \rangle$. Il est bien connu que, si une suite d'intégrales est contenue dans un ensemble compact $\Delta' \subset \Delta$, on peut en extraire une suite partielle d'intégrales convergente vers une intégrale qui peut se réduire à un point; cf. [2], p. 42-45.

Enfin nous désignons par Δ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, l'ensemble des points appartenant à Δ, dont les distances à l'origine ne surpassent pas le nombre i et les distances à l'ensemble Ψ ne sont pas inférieures à $1/i$. Évidemment, ces ensembles sont bornés et fermés, $\Delta_i \subset \Delta_{i+1}$ et $\sum \Delta_i = \Delta$. Nous posons encore $\Phi_i = \omega \,.\, \mathrm{Front}\ \Delta_i$.

2. Théorèmes

Théorème 1. *Dans les hypothèses énoncées au* N° 1, *si par un point* $P = (\tau, \xi) \epsilon \omega$ *il ne passe aucune intégrale asymptotique, il existe un entier positif* k *tel que* $E(P) \subset \Delta_k$.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait une suite infinie d'intégrales $x = \varphi_i(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant a_i$, $i = m, m+1, \ldots$, satisfaisant aux conditions: $\varphi_i(\tau) = \xi$, l'arc $\varphi_i \subset \Delta_i$ et $(a_i, \varphi_i(a_i)) \epsilon \Phi_i$. L'ensemble Δ_m étant compact, on pourrait en extraire une suite partielle d'intégrales φ_i^m dont les portions contenues dans Δ_m formeraient une suite convergente vers une intégrale $x = \psi_m(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \beta_m$, joignant dans Δ_m le point P à un point $(\beta_m, \psi_m(\beta_m)) \epsilon \Phi_m$. Pareillement, on pourrait extraire de la suite $\varphi_i^{m'}$ une nouvelle suite partielle d'intégrales, convergente, dans Δ_{m+1}, vers une intégrale $x = \psi_{m+1}(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \beta_{m+1}$, joignant le point P à l'ensemble Φ_{m+1}. Évidemment $\beta_{m+1} \geqslant \beta_m$ et $\psi_{m+1}(t) = \psi_m(t)$ pour $\tau \leqslant t \leqslant \beta_m$. En répétant ce procédé, on obtiendrait une suite infinie d'intégrales $x = \psi_i(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \beta_i$, $i = m, m+1, \ldots$, issues du point P et jouissant des propriétés suivantes: $\psi_i(t) = \psi_j(t)$, pour $\tau \leqslant t \leqslant \beta_i$ et $i \leqslant j$, et $(\beta_i, \psi_i(\beta_i)) \epsilon \Phi_i$. On constate sans peine que, en vertu de l'hypothèse du N° 1, l'intégrale $x = \psi(t)$, que nous définissons comme la somme de toutes les intégrales ψ_m, devrait être saturée à droite et contenue dans ω, contrairement à l'hypothèse de l'énoncé du théorème, d'après laquelle il n'existe aucune intégrale asymptotique issue du point P. Cette contradiction achève la démonstration.

Théorème 2. *Dans les hypothèses du théorème 1 les ensembles $E(P)$ et $e(P)$ sont non vides, bornés et fermés.*

En effet, fixons un indice k tel que $E(P) \subset \Delta_k$ et supposons que R soit un point appartenant à la fermeture de l'ensemble $E(P)$. Donc il existe une suite de points $R_i = (\sigma_i, \eta_i) \epsilon E(P)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, convergente vers le point R et une suite d'intégrales $x = \varphi_i(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \alpha_i$, contenues dans $E(P)$ et telles que $\varphi_i(\tau) = \xi$ et $\varphi_i(\sigma_i) = \eta_i$. L'ensemble Δ_k étant compact, on peut en extraire une suite partielle d'intégrales, convergente vers une intégrale joignant les points P et R. Donc $R \epsilon E(P)$, d'où il s'ensuit que l'ensemble $E(P)$ est fermé.

L'ensemble $e(P)$ est non vide, car dans le cas contraire toute intégrale passant par le point P et saturée à droite serait asymptotique, contrairement à l'hypothèse. Puisque $E(P) \subset \Delta_k$, l'ensemble $e(P) = E(P) \cdot \Phi = E(P) \cdot [\Delta_k \cdot (\Phi + \Psi)]$ est borné et fermé, comme produit de deux ensembles bornés et fermés.

Théorème 3. *Dans les hypothèses du théorème 1 l'ensemble $e(P)$ est connexe.*

Supposons, en effet, que l'ensemble $e(P)$ ne soit pas connexe. Il en résulte que $e(P) = a + b$, où a et b sont deux ensembles non vides, fermés et n'ayant pas de points communs.

Désignons par Θ l'ensemble des nombres s satisfaisant à cette condition:

Il existe deux intégrales $x = \varphi(t)$, $t \epsilon \langle s, \alpha \rangle$ et $x = \psi(t)$, $t \epsilon \langle s, \beta \rangle$ telles que $\big(s, \varphi(s)\big) = \big(s, \psi(s)\big) \epsilon E(P)$, $\big(\alpha, \varphi(\alpha)\big) \epsilon a$ et $\big(\beta, \varphi(\beta)\big) \epsilon b$.

Or, il est clair que $\tau \epsilon \Theta$ et, par conséquent, l'ensemble Θ est non vide. Il est borné puisqu'il en était ainsi de l'ensemble $E(P)$. Donc il existe une borne supérieure θ de l'ensemble Θ et $\theta \geqslant \tau$. Nous allons voir que $\theta \epsilon \Theta$.

En effet, il existe une suite de points $R_i = (\theta_i, \zeta_i) \epsilon E(P)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, et deux suites d'intégrales $\varphi_i(t)$, $\theta_i \leqslant t \leqslant \alpha_i$ et $\psi_i(t)$, $\theta_i \leqslant t \leqslant \beta_i$, contenues dans la zone d'émission $E(P)$ et telles que $\varphi_i(\theta_i) = \psi_i(\theta_i) = \zeta_i$, $\big(\alpha_i, \varphi_i(\alpha_i)\big) \epsilon a$, $\big(\beta_i, \psi_i(\beta_i)\big) \epsilon b$ et $\theta_i \to \theta$ lorsque i augmente indéfiniment. Comme l'ensemble $E(P)$ est compact, on peut en extraire deux suites partielles d'intégrales, convergentes vers deux intégrales qui joignent un point $R = (\theta, \zeta) \epsilon E(P)$ aux ensembles a et b; donc $\theta \epsilon \Theta$. Fixons un tel point R.

D'après ce que nous avons déjà établi, il existe une intégrale joignant les points P et R qui peut être prolongée jusqu'à un point A de l'ensemble

$a \subset \Phi$. Comme $P \epsilon \omega$, tous les points de cette intégrale, situés entre P et A, doivent appartenir à l'ensemble ω, en vertu de l'hypothèse du N° 1, et, par conséquent, $R \epsilon \omega$ ou bien $R = A \epsilon a$. Mais, dans le cas où $R \notin \omega$, on aurait non seulement $R \epsilon a$, mais aussi $R \epsilon b$, d'où $a \cdot b \neq 0$, contrairement à l'hypothèse $a \cdot b = 0$, admise au début. Nous avons ainsi démontré que $R \epsilon \omega$.

Soit $E_\sigma = \Pi_\sigma \cdot E(R)$. En vertu d'un théorème bien connu de H. Kneser [4], voir aussi [3], il existe un nombre $\sigma > \theta$ tel que l'ensemble E_σ est un continu borné, c'est-à-dire un ensemble non vide, borné, fermé et connexe. D'autre part $E_\sigma = a_\sigma + b_\sigma$, où a_σ (resp. b_σ) désigne l'ensemble des points de E_σ qui sont les origines d'intégrales aboutissant à l'ensemble a (resp. b). Comme $\sigma > \theta$, il s'ensuit des définitions de l'ensemble Θ et du nombre θ que ces ensembles a_σ et b_σ sont disjoints. Nous allons montrer qu'ils doivent être fermés.

Dans ce but, supposons que $V \epsilon \bar{a}_\sigma$. Il existe donc une suite de points $V_i \epsilon a_\sigma$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, telle que $V_i \to V$ pour $i \to \infty$, et une suite d'intégrales φ_i issues des points correspondants V_i dont chacune aboutit à l'ensemble a. Comme auparavant, on en extrait une suite partielle d'intégrales convergente vers une intégrale joignant le point V à l'ensemble a et, ainsi, on constate que $V \epsilon a_\sigma$. Donc $\bar{a}_\sigma \subset a_\sigma$, c'est-à-dire l'ensemble a_σ est fermé. Pareillement on prouve que l'ensemble b_σ est fermé.

Nous sommes ainsi arrivés à la conclusion que l'ensemble E_σ est une somme de deux ensembles séparés, ce qui est impossible, l'ensemble E_σ étant un continu. Cette contradiction montre bien que l'ensemble $e(P)$ devait aussi être connexe, ce qui achève notre démonstration.

3. Corollaires

Supposons que l'ensemble ω soit un domaine limité par deux hyperplans: $\tau < t < \beta$, que l'ensemble Φ soit l'hyperplan $t = \beta$ et que toute intégrale issue d'un point $P = (\tau, \xi) \epsilon \omega$ dans une direction dans laquelle l'argument t croît, aboutit à un point de l'hyperplan Π_β. Dans ce cas particulier, l'intersection $e(P)$ de la zone d'émission $E(P)$ avec l'hyperplan Π_β est, d'après nos théorèmes 1-3, un continu borné. Nous voyons donc que le théorème bien connu de H. Kneser [4] que nous venons d'appliquer dans la démonstration du théorème 3, aussi bien que sa généralisation due à E. Kamke [3], sont des conséquences immédiates de nos théorèmes.

D'autre part, les théorèmes 1-3 se prêtent encore à une généralisation. On peut, notamment, remplacer dans les énoncés de ces théorèmes les intégrales d'une équation différentielle ordinaire (vectorielle) par les solutions d'une équation au paratingent; pour la théorie de telles équations voir [1], [2], [6] et [7]. Les démonstrations subsistent grâce au fait que les solutions d'une équation au paratingent jouissent de propriétés qui étaient essentielles dans nos raisonnements.

Le problème envisagé dans cette note s'est imposé à l'occasion des recherches de l'un des auteurs([2]) qui a étudié l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles moyennant certaines méthodes topologiques inspirées par le travail bien connu de T. Ważewski [5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bielecki, A., *Sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour l'unicité des solutions des systèmes d'équations différentielles ordinaires et des équations au paratingent*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **2** (1947, 1948), p. 49-106.

[2] — *Extension de la méthode du rétracte de T. Ważewski aux équations au paratingent*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **9** (1955, 1958), p. 37-61.

[3] Kamke, E., *Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen*, IIs Acta Math. (Upsala), **58** (1932), p. 57-85.

[4] Kneser, H., *Über die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen dass der Lipschitz-Bedingung nicht genügt*, Sitz.-Ber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Mat. Kl., 1923, p. 171-174.

[5] Ważewski, T., *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Ann. Soc. Polon. Math., **20** (1947), p. 279-313.

[6] Zaremba, S. K., Sur les équations au paratingent, Bull. Sci. Math., **60**, 2 (1936), p. 139-160.

[7] — O równaniach paratyngensowych (en polonais), Ann. Soc. Polon. Math., Suppl. **9** (1935).

Streszczenie

W przestrzeni $(n+1)$-wymiarowej punktów $P = (t, x) = (t, x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_n)$ zawarty jest zbiór otwarty ω; Front $\omega = \Phi + \Psi$, zbiór Ψ jest domknięty, $\Delta = \omega + \Phi$. Funkcja $f(t, x)$, przyjmująca wartości z przestrzeni n-wymiarowej punktów $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jest określona i ciągła w Δ. Całki: $x = \varphi(t)$, równania różniczkowego zwyczajnego (wektorowego) $x' = f(t, x)$ mają tę własność, że jeśli którakolwiek z nich wychodzi z punktu zbioru ω, w kierunku rosnącego t, i dociera do jakiegoś punktu zbioru Φ, to poza ten punkt przedłużyć się nie daje.

([2]) En préparation un travail de C. Kluczny sur ce sujet.

Dowodzi się, że jeśli punkt $P \epsilon \omega$ i nie wychodzi zeń żadna całka asymptotyczna, t.j. wysycona w kierunku rosnącego t i zawarta całkowicie w ω, to zbiór $e(P) = E(P) \cdot \Phi$, gdzie $E(P)$ oznacza dodatnią strefę emisji punktu P ze względu na rozważane równanie różniczkowe, jest kontinuum ograniczonym. Jest to uogólnienie znanego twierdzenia H. Knesera o przekrojach, prostopadłych do osi t, stref emisji punktów. Wynik ten uogólnia się na równania paratyngensowe z zachowaniem metody dowodu.

Резюме

В $(n+1)$-мерном пространстве точек $P = (t, x) = (t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ заключено открытое множество ω. Ограничение его $\mathrm{Front}\,\omega = \Phi + \Psi$, Ψ множество замкнутое, $\Delta = \omega + \Phi$. Функция $f(t, x)$, принимающая значения из n-мерного пространства точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена и непрерывна на множестве Δ. Решения $x = \varphi(t)$ обыкновенного дифференциального уравнения (векторного) $x' = f(t, x)$ обладают тем свойством, что, если любой из них выходит из точек множества ω в направлении растущего t и достигает какую-нибудь точку множества Φ, то за эту точку не может он быть продолжен.

Доказано, что, если точка $P \epsilon \omega$ и из неё не выходит никакой асимптотический, т. е. непродолжимый, интеграл в направлении возрастающих t, заключенный полностью в ω, то множество $e(P) = E(P) \cdot \Phi$, где $E(P)$ обозначает положительную зону эмиссии точки P для рассматриваемого дифференциального уравнения, является ограниченным континуумом.

Это обобщение известной теории Кнезера о перпендикулярных к оси t разрезах зон эмиссии точек. Этот результат обобщается на паратингентные уравнения с сохранением метода доказательства.