

Z Katedry Zespołowej Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

JAN KISYŃSKI

**Application de la méthode des approximations successives dans la
théorie de l'équation $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$**

Zastosowanie metody kolejnych przybliżeń w teorii równania

$$\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$$

Применение метода последовательных приближений в теории уравнения

$$\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$$

Dans ce travail nous étudions l'existence, l'unicité et la dépendance continue des conditions initiales et du second membre des solutions de l'équation

$$(1) \quad \partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y).$$

La méthode utilisée comprend les trois étapes suivantes:

1° Considérant l'équation (1) dans le domaine des fonctions à valeurs dans un espace de Banach arbitraire, nous établissons par approximations successives l'existence et l'unicité des solutions. La démonstration de la convergence des approximations successives se fait par la même méthode que dans notre note [8] et elle s'appuie sur le schéma général abstrait donné par T. Ważewski [14]. Nous admettons dans nos raisonnements que la fonction $f(x, y, z, p, q)$, qui figure au second membre de l'équation (1) est continue et qu'elle vérifie, par rapport à z , p et q , une condition analogue à celle de Osgood, assurant l'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires. (Cette condition, en tant que condition d'existence et d'unicité des solutions du problème de Cauchy, a été

introduite dans la théorie de l'équation (1) par C. Foias, T. Gussi et V. Poenaru [4]).

2° Considérant l'équation (1) dans le domaine des fonctions à valeurs dans un espace convenable de suites convergentes, nous obtenons, comme conséquence des théorèmes sur l'existence et l'unicité des solutions, des théorèmes concernant leur dépendance continue des conditions initiales et du second membre de l'équation.

3° Pour l'équation (1), considérée dans le domaine des fonctions à valeurs dans un espace euclidien à n dimensions, nous démontrons un théorème sur l'existence des solutions, en admettant que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ est continue et vérifie par rapport à p et q une condition du type de Osgood. En profitant d'une élégante idée de C. Ciliberto [1], § 1, nous obtenons la démonstration moyennant le théorème du point fixe de Schauder, en nous appuyant sur les théorèmes, établis auparavant sous des hypothèses plus fortes, sur l'existence et l'unicité des solutions et leur dépendance continue du second membre de l'équation.

Dans ce travail nous considérons, pour l'équation (1), le problème posé par Mlle S. Szmydt [13]. Ce problème étant insoluble en toute généralité, nous nous bornons à un cas particulier, comprenant le problème de Goursat, considéré dans un rectangle dont les côtés ont les directions caractéristiques.

Dans le travail [9] nous avons appliqué les mêmes raisonnements pour les solutions à dérivées sommables des problèmes de Cauchy et de Darboux, introduites par R. Conti [2] et [3].

1. Énoncé des théorèmes relatifs au problème de Mlle Szmydt.

Une fonction $z(x, y)$ à valeurs dans un espace de Banach quelconque, définie sur un ensemble Z , sera dite fonction de classe C^* sur cet ensemble, si elle admet dans celui-ci des dérivées au sens de la norme $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ et $\partial^2 z/\partial x \partial y$, continues au sens de la norme. Le problème de Mlle Szmydt pour l'équation (1) dans le domaine des fonctions à valeurs dans un espace de Banach sera formulé comme il suit:

Problème (S). *Nous supposons données les fonctions $g(x)$ et $h(y)$, continues respectivement dans les intervalles $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$, satisfaisant dans ces intervalles aux inégalités $c \leq g(x) \leq d$ et $a \leq h(y) \leq b$. Soit E un espace de Banach quelconque. Nous supposons données les fonctions continues $G(x, z, q)$, $H(y, z, p)$ et $f(x, y, z, p, q)$ à valeurs dans l'espace E , définies pour $x \in \langle a, b \rangle$, $y \in \langle c, d \rangle$ et $z, p, q \in E$; enfin, soient les nombres $x^0 \in \langle a, b \rangle$, $y^0 \in \langle c, d \rangle$ et un élément $z^0 \in E$. Déterminer une fonction*

$z(x, y)$, à valeurs dans l'espace E , de classe C^* dans le rectangle $R = ((x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d)$ satisfaisant dans ce rectangle à l'équation (1) et aux conditions

$$(2) \quad \begin{aligned} \partial z / \partial x &= G(x, z, \partial z / \partial y) \text{ pour } x \in \langle a, b \rangle, y = g(x), \\ \partial z / \partial y &= H(y, z, \partial z / \partial x) \text{ pour } y \in \langle c, d \rangle, x = h(y), \\ z(x^0, y^0) &= z^0. \end{aligned}$$

Une fonction $z(x, y)$ vérifiant les conditions précédentes sera appelée solution du problème (S).

Le problème (S), posé sous une forme aussi générale, peut être insoluble ou bien admettre plus d'une solution (cf. [5], p. 103-105, [6], p. 74 et [13], p. 72). C'est pourquoi nous nous bornerons à un cas particulier, en admettant relativement à la configuration des courbes $y = g(x)$ et $x = h(y)$ les hypothèses suivantes, proposées par M. A. Bielecki, dont le sens géométrique est bien net.

Hypothèses (B). Il existe des fonctions φ_1, φ_2 et φ_3 , et un nombre $\varepsilon_0 > 0$ tels que:

- (i) la fonction $\varphi_1(x)$ soit de classe $C^{(1)}$ dans l'intervalle $\langle x^0, b \rangle$, $\varphi_1(x^0) = y^0$, $\varphi_1(b) = d$ et $\varphi_1'(x) > 0$ pour $x \in \langle x^0, b \rangle$,
- (ii) la fonction $\varphi_2(x)$ soit de classe $C^{(1)}$ dans l'intervalle $\langle a, x^0 \rangle$, $\varphi_2(a) = d$, $\varphi_2(x^0) = y^0$ et $\varphi_2'(x) < 0$ pour $x \in \langle a, x^0 \rangle$,
- (iii) la fonction $\varphi_3(x)$ soit de classe $C^{(1)}$ dans l'intervalle $\langle a, x^0 \rangle$, $\varphi_3(a) = c$, $\varphi_3(x^0) = y^0$ et $\varphi_3'(x) > 0$ pour $x \in \langle a, x^0 \rangle$,
- (iv) $\varphi_4(x) + \varepsilon_0(x - x^0) \leq g(x) \leq \varphi_1(x) - \varepsilon_0(x - x^0)$ pour $x \in \langle x^0, b \rangle$,
où $\varphi_4(x) = \varphi_3(\varphi_2^{-1}(\varphi_1(x)))$,
- (v) $\varphi_3(x) + \varepsilon_0(x^0 - x) \leq g(x) \leq \varphi_2(x) - \varepsilon_0(x^0 - x)$ pour $x \in \langle a, x^0 \rangle$,
- (vi) $\varphi_2^{-1}(y) + \varepsilon_0(y - y^0) \leq h(y) \leq \varphi_1^{-1}(y) - \varepsilon_0(y - y^0)$ pour $y \in \langle y^0, d \rangle$,
- (vii) $\varphi_3^{-1}(y) + \varepsilon_0(y^0 - y) \leq h(y) \leq \varphi_4^{-1}(y) - \varepsilon_0(y^0 - y)$ pour $y \in \langle c, y^0 \rangle$.

Théorème 1. Supposons rempli l'ensemble des conditions suivantes: 1° les fonctions $g(x)$ et $h(y)$ vérifient les hypothèses (B) et satisfont aux conditions de Lipschitz

$$(3) \quad \begin{aligned} |g(x') - g(x'')| &\leq L \cdot |x' - x''| \quad \text{pour } x', x'' \in \langle a, b \rangle, \\ |h(y') - h(y'')| &\leq L \cdot |y' - y''| \quad \text{pour } y', y'' \in \langle c, d \rangle, \end{aligned}$$

où L est une constante positive,

2° les fonctions $G(x, z, q)$ et $H(y, z, p)$ satisfont aux conditions de Lipschitz

$$(4) \quad \begin{aligned} \|G(x, z, q) - G(x, \bar{z}, \bar{q})\| &\leq K \cdot \|z - \bar{z}\| + L_1(x) \cdot \|q - \bar{q}\|, \\ \|H(y, z, p) - H(y, \bar{z}, \bar{p})\| &\leq K \cdot \|z - \bar{z}\| + L_2(y) \cdot \|p - \bar{p}\| \end{aligned}$$

pour $x \in \langle a, b \rangle$, $y \in \langle c, d \rangle$ et $z, p, q, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q} \in E$, où K est une constante positive, $L_1(x)$ et $L_2(y)$ sont des fonctions à valeurs positives, continues respectivement dans les intervalles $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$, satisfaisant à la condition

$$(5) \quad L_1(x^0) \cdot L_2(y^0) < 1,$$

3° la fonction $f(x, y, z, p, q)$ satisfait à la condition

$$(6) \quad \|f(x, y, z, p, q) - f(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})\| \leq \omega(\|z - \bar{z}\| + \|p - \bar{p}\| + \|q - \bar{q}\|)$$

pour $(x, y) \in R$ quelconques et $z, p, q, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q} \in E$, où $\omega(\delta)$ est une fonction continue et non décroissante pour $\delta \in \langle 0, +\infty \rangle$, telle que $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta) > 0$ pour $\delta > 0$ et que

$$(7) \quad \int_0^{\delta} \frac{du}{\omega(u)} = +\infty.$$

Dans ces conditions le problème (S) admet exactement une solution.

Théorème 2. Supposons vérifiées les hypothèses admises dans l'énoncé du théorème 1 au sujet des fonctions $g(x)$ et $h(y)$. Soit une suite de fonctions $f_n(x, y, z, p, q)$, $n = 0, 1, \dots$, à valeurs dans l'espace E , continues pour $(x, y) \in R$ et $z, p, q \in E$, telle que

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{(x, y) \in R} \|f_n(x, y, z, p, q) - f_0(x, y, z, p, q)\| = 0$$

pour $z, p, q \in E$ quelconques fixés et que

$$(9) \quad \|f_n(x, y, z, p, q) - f_n(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})\| \leq \omega(\|z - \bar{z}\| + \|p - \bar{p}\| + \|q - \bar{q}\|)$$

pour tous les $n = 0, 1, \dots$, $(x, y) \in R$ et $z, p, q, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q} \in E$, où la fonction $\omega(\delta)$ a les mêmes propriétés que dans le théorème 1.

Soient encore deux suites $G_n(x, z, q)$ et $H_n(y, z, p)$, $n = 0, 1, \dots$, de fonctions à valeurs dans l'espace E , continues pour $x \in \langle a, b \rangle$ et $y \in \langle c, d \rangle$ et $z, p, q \in E$, telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} \|G_n(x, z, q) - G_0(x, z, q)\| = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{c \leq y \leq d} \|H_n(y, z, p) - H_0(y, z, p)\| = 0$$

pour $z, p, q \in E$ quelconques fixés, et que

$$\|G_n(x, z, q) - G_n(x, \bar{z}, \bar{q})\| \leq K \cdot \|z - \bar{z}\| + L_1(x) \cdot \|q - \bar{q}\|,$$

$$\|H_n(y, z, p) - H_n(y, \bar{z}, \bar{p})\| \leq K \cdot \|z - \bar{z}\| + L_2(y) \cdot \|p - \bar{p}\|$$

pour tous les $n = 0, 1, \dots$, $x \in \langle a, b \rangle$, $y \in \langle c, d \rangle$ et $z, p, q, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q} \in E$, où K est une constante positive, $L_1(x)$ et $L_2(y)$ sont des fonctions à valeurs positives, continues respectivement dans les intervalles $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$, vérifiant la condition (5). Enfin, soit une suite z_n^0 , $n = 0, 1, \dots$, d'éléments de l'espace E telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n^0 - z_0^0\| = 0$.

Pour tout $n = 0, 1, \dots$ désignons par $z_n(x, y)$ une fonction, dont l'existence et l'unicité sont assurées par le théorème 1, à valeurs dans l'espace E , de classe C^* dans le rectangle R , satisfaisant dans ce rectangle à l'équation

$$(10) \quad \partial^2 z_n / \partial x \partial y = f_n(x, y, z_n, \partial z_n / \partial x, \partial z_n / \partial y)$$

et vérifiant les conditions

$$(11) \quad \begin{aligned} \partial z_n / \partial x &= G_n(x, z_n, \partial z_n / \partial y) && \text{pour } x \in \langle a, b \rangle, y = g(x), \\ \partial z_n / \partial y &= H_n(y, z_n, \partial z_n / \partial x) && \text{pour } y \in \langle c, d \rangle, x = h(y), \\ z_n(x^0, y^0) &= z_n^0. \end{aligned}$$

Dans ces conditions on a

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_R (\|z_n - z_0\| + \|\partial z_n / \partial x - \partial z_0 / \partial x\| + \|\partial z_n / \partial y - \partial z_0 / \partial y\| + \|\partial^2 z_n / \partial x \partial y - \partial^2 z_0 / \partial x \partial y\|) = 0.$$

Théorème 3. Soit E un espace euclidien à n dimensions et supposons rempli l'ensemble des conditions suivantes:

1° les fonctions $g(x)$ et $h(y)$ vérifient les hypothèses (B) et satisfont aux conditions de Lipschitz (3)⁽¹⁾,

2° les fonctions $G(x, z, q)$ et $H(y, z, p)$ satisfont aux inégalités

$$\|G(x, z, 0)\| \leq A + B \cdot \|z\| \text{ et } \|H(y, z, 0)\| \leq A + B \cdot \|z\|, \quad A, B = \text{const} \geq 0$$

pour $x \in \langle a, b \rangle$, $y \in \langle c, d \rangle$ et $z \in E$ quelconques, et aux conditions de Lipschitz

$$\|G(x, z, q) - G(x, z, \bar{q})\| \leq L_1(x) \cdot \|q - \bar{q}\|,$$

$$\|H(y, z, p) - H(y, z, \bar{p})\| \leq L_2(y) \cdot \|p - \bar{p}\|$$

pour $x \in \langle a, b \rangle$, $y \in \langle c, d \rangle$ et $z, p, q, \bar{p}, \bar{q} \in E$, où les fonctions $L_1(x)$ et $L_2(y)$ ont les mêmes propriétés que dans le théorème 1,

(1) En appliquant les méthodes du travail [6] on peut établir le théorème 3 sans supposer vérifiées les conditions de Lipschitz (3).

3° la fonction $f(x, y, z, p, q)$ satisfait aux inégalités

$$\|f(x, y, z, 0, 0)\| \leq A + B \cdot \|z\|, \quad A, B = \text{const} \geq 0,$$

pour $(x, y) \in R$ et $z \in E$ quelconques, et

$$\|f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})\| \leq \omega(\|p - \bar{p}\| + \|q - \bar{q}\|)$$

pour $(x, y) \in R$ et $z, p, q, \bar{p}, \bar{q} \in E$, où la fonction $\omega(\delta)$ a les mêmes propriétés que dans le théorème 1.

Dans ces conditions il existe une solution du problème (S).

2. Théorèmes auxiliaires.

Nous admettrons dans la suite que $x^0 = y^0 = 0$. Outre qu'elle permettra de simplifier l'écriture, cette convention n'aura aucune influence sur le fond des raisonnements. De plus, nous supposons toujours vérifiée l'hypothèse faite dans l'énoncé du théorème 1 au sujet des fonctions $g(x)$ et $h(y)$. Dans les considérations de ce chapitre la fonction auxiliaire $t(x, y)$, pour la construction de laquelle nous renvoyons au premier chapitre du travail [7], jouera un rôle fondamental.

Transformation T. Posons $\chi(y) = \varphi_2(\varphi_3^{-1}(y))$ pour $y \in \langle c, 0 \rangle$. Alors nous aurons $\varphi_1(\varphi_4^{-1}(y)) = \varphi_1(\varphi_1^{-1}(\varphi_2(\varphi_3^{-1}(y)))) = \chi(y)$ pour $y \in \langle c, 0 \rangle$. Désignons par T la transformation du plan xy en le plan uv , définie par les formules

$$u = U(x) = \begin{cases} -(x-a)\varphi_2'(a) - \varphi_2(a) & \text{pour } x < a, \\ -\varphi_2(x) & \text{pour } x \in \langle a, 0 \rangle, \\ \varphi_1(x) & \text{pour } x \in \langle 0, b \rangle, \\ (x-b)\varphi_1'(b) + \varphi_1(b) & \text{pour } x > b, \end{cases}$$

$$v = V(y) = \begin{cases} -(y-c)\chi'(c) - \chi(c) & \text{pour } y < c, \\ -\chi(y) & \text{pour } y \in \langle c, 0 \rangle, \\ y & \text{pour } y > 0. \end{cases}$$

La transformation T transforme les courbes d'équations $y = \varphi_1(x)$, $x \in \langle 0, b \rangle$, $y = \varphi_2(x)$, $x \in \langle a, 0 \rangle$, $y = \varphi_3(x)$, $x \in \langle a, 0 \rangle$, $y = \varphi_4(x)$, $x \in \langle 0, b \rangle$, respectivement en segments de droite d'équations $u = v$, $u \in \langle 0, U(b) \rangle$, $u = -v$, $u \in \langle U(a), 0 \rangle$, $u = v$, $u \in \langle U(a), 0 \rangle$, $u = -v$, $u \in \langle 0, U(b) \rangle$; elle transforme les courbes d'équations $y = g(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, et $x = h(y)$, $y \in \langle c, d \rangle$, en courbes d'équations $v = a(u)$, $u \in \langle U(a), U(b) \rangle$ et $u = \beta(v)$,

$v \in \langle V(c), V(d) \rangle$, où $\alpha(u) = V(g(U^{-1}(u)))$ et $\beta(v) = U(h(V^{-1}(v)))$. En posant $\theta = 1 - \varepsilon_0 \min(\min U' / \max V', \min V' / \max U')$, où ε_0 est le nombre positif qui intervient dans les hypothèses (B), on voit aisément que $0 < \theta < 1$ et

$$(13) \quad \begin{aligned} |\alpha(u)| &\leq \theta \cdot |u| && \text{pour } u \in \langle U(a), U(b) \rangle, \\ |\beta(v)| &\leq \theta \cdot |v| && \text{pour } v \in \langle V(c), V(d) \rangle. \end{aligned}$$

De plus, puisque les fonctions φ_i et φ_i^{-1} , $i = 1, 2, 3, 4$, sont de classe C^1 , on constate, en tenant compte de (3), que les fonctions $\alpha(u)$ et $\beta(v)$ satisfont aux conditions de Lipschitz

$$(14) \quad \begin{aligned} |\alpha(u') - \alpha(u'')| &\leq \lambda_0 \cdot |u' - u''| && \text{pour } u', u'' \in \langle U(a), U(b) \rangle, \\ |\beta(v') - \beta(v'')| &\leq \lambda_0 \cdot |v' - v''| && \text{pour } v', v'' \in \langle V(c), V(d) \rangle, \end{aligned}$$

où λ_0 désigne une constante positive.

La fonction $t(x, y)$ et les ensembles S_t . Pour les fonctions $\alpha(u)$ et $\beta(v)$ que nous venons de définir, construisons une famille d'octogones W_s et une fonction $s(u, v)$ de même que nous l'avons fait au premier chapitre du travail [7]⁽²⁾. (Les fonctions $\alpha(u)$ et $\beta(v)$ doivent être prolongées sur les intervalles $-\infty < u < +\infty$ et $-\infty < v < +\infty$). Soit N la constante intervenant dans le lemme 1 du travail [7]. Posons

$$\begin{aligned} m &= \min(\min U', \min V'), \\ S_t &= T^{-1}(W_{mN-t}) \quad \text{pour } t \in \langle 0, +\infty \rangle, \\ t(x, y) &= m^{-1}Ns(U(x), V(y)) \quad \text{pour } x \text{ et } y \text{ quelconques.} \end{aligned}$$

En s'appuyant sur les considérations du premier chapitre du travail [7], on vérifie aisément que la famille d'ensembles fermés S_t et la fonction $t(x, y)$ ainsi définies ont les propriétés suivantes:

$$(15) \quad S_0 = \{(0, 0)\},$$

$$(16) \quad 0 \leq t' < t'' \Rightarrow S_{t'} \subset \text{Int}(S_{t''}) \Rightarrow \text{Fr}(S_{t'}) \cap \text{Fr}(S_{t''}) = \emptyset,$$

$$(17) \quad \text{les courbes fermées } \text{Fr}(S_t), t \in \langle 0, +\infty \rangle, \text{ recouvrent tout le plan } xy,$$

$$(18) \quad \text{les ensembles } S_t \text{ dépendent continûment du paramètre } t, \text{ c'est-à-dire}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0+} \max_{(x,y) \in S_t} d((x,y), S_{t_0}) = 0 \quad \text{pour tout } t_0 \geq 0, \text{ où } d((x,y), S_{t_0}) \text{ désigne}$$

la distance du point (x, y) à l'ensemble S_{t_0} ,

⁽²⁾ Dans cette construction on profite des conditions (14), donc indirectement des conditions (3).

- (19) $t(x, y)$ est l'unique nombre non négatif t tel que $(x, y) \in \text{Fr}(S_t)$,
 (20) $t(x, y) \leq t_0 \equiv (x, y) \in S_{t_0}$,
 (21) la fonction $t(x, y)$ est continue et non négative,
 (22) si $y'' \geq y' \geq g(x)$, où $x \in \langle a, b \rangle$, on a $y'' - y' \leq t(x, y'') - t(x, y')$,
 (23) si $y'' \leq y' \leq g(x)$, où $x \in \langle a, b \rangle$, on a $y' - y'' \leq t(x, y'') - t(x, y')$,
 (24) si $x'' \geq x' \geq h(y)$, où $y \in \langle c, d \rangle$, on a $x'' - x' \leq t(x'', y) - t(x', y)$,
 (25) si $x'' \leq x' \leq h(y)$, où $y \in \langle c, d \rangle$, on a $x' - x'' \leq t(x'', y) - t(x', y)$,
 (26) $t(x, g(x)) \leq t(x, y)$ pour $x \in \langle a, b \rangle$, $y \in (-\infty, +\infty)$,
 (27) $t(h(y), y) \leq t(x, y)$ pour $y \in \langle c, d \rangle$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Des propriétés (22)-(25) il résulte (la preuve est la même que celle du lemme 2 du travail [7]) que si $\Phi(t)$ est une fonction continue et non négative pour $t \in \langle 0, +\infty \rangle$, on a :

$$(28) \quad \int_{y'}^{y''} \Phi(t(x, y)) dy \leq \int_{t(x, y')}^{t(x, y'')} \Phi(\tau) d\tau \text{ pour } y'' \geq y' \geq g(x),$$

$$(29) \quad \int_{y''}^{y'} \Phi(t(x, y)) dy \leq \int_{t(x, y'')}^{t(x, y')} \Phi(\tau) d\tau \text{ pour } y'' \leq y' \leq g(x),$$

$$(30) \quad \int_{x'}^{x''} \Phi(t(x, y)) dx \leq \int_{t(x', y)}^{t(x'', y)} \Phi(\tau) d\tau \text{ pour } x'' \geq x' \geq h(y),$$

$$(31) \quad \int_{x''}^{x'} \Phi(t(x, y)) dx \leq \int_{t(x', y)}^{t(x'', y)} \Phi(\tau) d\tau \text{ pour } x'' \leq x' \leq h(y).$$

Lemme 1. Soient λ un nombre positif, $D_1(t)$ et $D_2(t)$ des fonctions continues, non négatives et non décroissantes pour $t \in \langle 0, +\infty \rangle$. Si $\Delta(x, y)$ est une fonction continue dans le rectangle R , satisfaisant, pour tout point $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in R$ et pour tout chemin d'intégration rectifiable contenu dans le rectangle R , à l'inégalité

$$(32) \quad \Delta(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \int_{(0,0)}^{(\tilde{x}, \tilde{y})} D_1(t(x, y)) \lambda e^{\lambda t(x, y)} |dx| + D_2(t(x, y)) \lambda e^{\lambda t(x, y)} |dy|,$$

alors

$$\Delta(x, y) \leq [D_1(t(x, y)) + D_2(t(x, y))] e^{\lambda t(x, y)} \text{ pour } (x, y) \in R.$$

Démonstration. Pour fixer les idées, nous étudierons le cas où $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $y \geq \varphi_1(x)$ (pour les autres cas le raisonnement est analogue). Posons $\bar{g}(x) = \varphi_1(x) - \varepsilon_0 x$ pour $x \in \langle 0, b \rangle$ et $\bar{h}(y) = \varphi_1^{-1}(y) - \varepsilon_0 y$ pour $y \in \langle 0, d \rangle$ et admettons $(x_0, y_0) = (x, y)$, $(x_1, y_1) = (x, \bar{g}(x))$, $(x_2, y_2) = (\bar{h}(\bar{g}(x)), \bar{g}(x))$, $(x_3, y_3) = (\bar{h}(\bar{g}(x)), \bar{g}(\bar{h}(\bar{g}(x))))$, ... Il est aisé de voir que l'on aura alors $\lim (x_n, y_n) = (0, 0)$, $y_0 > y_1$ et $x_{2n} = x_{2n+1} > x_{2n+2}$, $y_{2n+1} = y_{2n+2} > y_{2n+3}$, $y_n \geq g(x_n)$, $x_n \geq h(y_n)$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$. En s'appuyant sur (22), (24), (28) et (30) on obtient l'inégalité demandée en prenant pour chemin d'intégration dans l'inégalité (32) la ligne brisée dont les sommets sont (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , ...

Lemme 2. *Il existe un nombre $\kappa \in (0, 1)$ et deux fonctions $M(x)$ et $N(y)$, continues respectivement dans les intervalles $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$, tels que*

$$(33) \quad M(x) > 1 \quad \text{pour } x \in \langle a, b \rangle$$

$$(34) \quad L_1(x)N(g(x)) < \kappa M(x)$$

$$(35) \quad N(y) > 1 \quad \text{pour } y \in \langle c, d \rangle$$

$$(36) \quad L_2(y)M(h(y)) < \kappa N(y)$$

Démonstration. Soit κ un nombre vérifiant l'inégalité

$$(37) \quad L_1(0) \cdot L_2(0) < \kappa < 1.$$

En vertu des conditions (13) la suite $u, \alpha(u), \beta(\alpha(u)), \alpha(\beta(\alpha(u))), \dots$ tend uniformément vers zéro pour $u \in \langle U(a), U(b) \rangle$; par conséquent, puisque $g(x) = V^{-1}(\alpha(U(x)))$, $h(g(x)) = U^{-1}(\beta(\alpha(U(x))))$, ..., la suite $x, g(x), h(g(x)), g(h(g(x))), \dots$ tend uniformément vers zéro pour $x \in \langle a, b \rangle$. De même, la suite $y, h(y), g(h(y)), h(g(h(y))), \dots$ tend uniformément vers zéro pour $y \in \langle c, d \rangle$. Donc, d'après (37), la série $M(x) = \kappa^{-1} + \kappa^{-2}L_1(x) + \kappa^{-3}L_1(x)L_2(g(x)) + \kappa^{-4}L_1(x)L_2(g(x))L_1(h(g(x))) + \dots$ est uniformément convergente pour $x \in \langle a, b \rangle$ et la série $N(y) = \kappa^{-1} + \kappa^{-2}L_2(y) + \kappa^{-3}L_2(y)L_1(h(y)) + \kappa^{-4}L_2(y)L_1(h(y))L_2(g(h(y))) + \dots$ est uniformément convergente pour $y \in \langle c, d \rangle$. Les sommes de ces séries sont donc fonctions continues. On vérifie facilement qu'elles satisfont aux inégalités (33) et (35), ainsi qu'aux équations $L_1(x)N(g(x)) = \kappa M(x) - 1$ et $L_2(y)M(h(y)) = \kappa N(y) - 1$; les inégalités (34) et (36) sont donc vérifiées et la démonstration est achevée.

Lemme 3. Les hypothèses étant celles du théorème 1, soient $\Delta(x, y)$, $\Delta_1(x, y)$, $\Delta_2(x, y)$, $\tilde{\Delta}_1(x, y)$ et $\tilde{\Delta}_2(x, y)$ des fonctions continues et non négatives pour $(x, y) \in R$, telles que

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_1(x, y) \leq & \left| \int_{g(x)}^y \omega(\Delta(x, v) + \Delta_1(x, v) + \Delta_2(x, v)) dv \right| + K \cdot \Delta(x, g(x)) + \\ & + L_1(x) \cdot \Delta_2(x, g(x)), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_2(x, y) \leq & \left| \int_{h(y)}^x \omega(\Delta(u, y) + \Delta_1(u, y) + \Delta_2(u, y)) du \right| + K \cdot \Delta(h(y), y) + \\ & + L_2(y) \cdot \Delta_1(h(y), y) \end{aligned}$$

pour tout point $(x, y) \in R$ et que

$$(39) \quad \Delta(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \int_{(0,0)}^{(\tilde{x}, \tilde{y})} |\Delta_1(x, y)| dx + |\Delta_2(x, y)| dy$$

pour tout point $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in R$ et tout chemin d'intégration rectifiable contenu dans le rectangle R .

Posons

$$(40) \quad M = \max_{a \leq x \leq b} M(x), \quad N = \max_{c \leq y \leq d} N(y), \quad \lambda = (1 - \kappa)^{-1} 4K \max(M, N) + 1$$

et

$$D_1(t) = \max_{(x,y) \in R \cap S_t} (\lambda M(x))^{-1} e^{-\lambda t(x,y)} \Delta_1(x, y),$$

$$D_2(t) = \max_{(x,y) \in R \cap S_t} (\lambda N(y))^{-1} e^{-\lambda t(x,y)} \Delta_2(x, y),$$

$$\tilde{D}_1(t) = \max_{(x,y) \in R \cap S_t} (\lambda M(x))^{-1} e^{-\lambda t(x,y)} \tilde{\Delta}_1(x, y),$$

$$\tilde{D}_2(t) = \max_{(x,y) \in R \cap S_t} (\lambda N(y))^{-1} e^{-\lambda t(x,y)} \tilde{\Delta}_2(x, y),$$

$$D(t) = D_1(t) + D_2(t), \quad \tilde{D}(t) = \tilde{D}_1(t) + \tilde{D}_2(t).$$

Dans ces conditions, les fonctions $D(t)$ et $\tilde{D}(t)$ sont continues, non négatives et non décroissantes pour $t \in (0, +\infty)$ et satisfont à l'inégalité

$$(41) \quad \tilde{D}(t) \leq 2 \int_0^t \omega(\varrho D(\tau)) d\tau + \frac{1}{2} (1 + \kappa) D(t) \quad \text{pour} \quad t \in (0, +\infty),$$

où

$$\varrho = (\lambda + 1) \cdot \max(M, N) \cdot \max_{(x,y) \in R} e^{\lambda t(x,y)}.$$

Démonstration. Le fait que les fonctions D_1 , D_2 , $\tilde{D}_1$, $\tilde{D}_2$, D et $\tilde{D}$ sont continues, non négatives et non décroissantes résulte de ce que les fonctions Δ , Δ_1 , Δ_2 , $\tilde{\Delta}_1$, $\tilde{\Delta}_2$ et $t(x, y)$ sont continues et non négatives dans le rectangle R et de (16) et (18). Comme, d'après (20), $(x, y) \in S_{t(x, y)}$, on obtient, en vertu de la définition des fonctions D_1 et D_2 $\Delta_1(x, y) \leq \leq \lambda M(x) e^{\lambda t(x, y)} D_1(t(x, y))$ et $\Delta_2(x, y) \leq \leq \lambda N(y) e^{\lambda t(x, y)} D_2(t(x, y))$ pour $(x, y) \in R$, d'où, en tenant compte de (39), il résulte d'après le lemme 1 que $\Delta(x, y) \leq \max(M, N) D(t(x, y)) e^{\lambda t(x, y)}$ pour $(x, y) \in R$. Par conséquent, comme la fonction ω est non décroissante, on a, à cause de (38),

$$\tilde{\Delta}_1(x, y) \leq \left| \int_{\varrho(x)}^y \omega(\varrho D(t(x, v))) dv \right| + K \max(M, N) D(t(x, g(x))) e^{\lambda t(x, g(x))} + \\ + L_1(x) \lambda N(g(x)) e^{\lambda t(x, g(x))} D_2(t(x, g(x))),$$

d'où, en tenant compte de (26), (28), (29) et (34) et du fait que les fonctions D et D_2 sont non décroissantes, on tire

$$\tilde{\Delta}_1(x, y) \leq \int_0^{t(x, y)} \omega(\varrho D(\tau)) d\tau + K \max(M, N) e^{\lambda t(x, y)} D(t(x, y)) + \\ + \kappa \lambda M(x) e^{\lambda t(x, y)} D_2(t(x, y))$$

et, à cause de (33),

$$(\lambda M(x))^{-1} e^{-\lambda t(x, y)} \tilde{\Delta}_1(x, y) \leq \int_0^{t(x, y)} \omega(\varrho D(\tau)) d\tau + \lambda^{-1} K \max(M, N) D(t(x, y)) + \\ + \kappa D_2(t(x, y))$$

pour $(x, y) \in R$.

En tenant compte du (20) et du fait que les fonctions D et D_2 sont non décroissantes, il s'ensuit que

$$\tilde{D}_1(t) \leq \int_0^t \omega(\varrho D(\tau)) d\tau + \lambda^{-1} K \max(M, N) D(t) + \kappa D_2(t) \text{ pour } t \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

De même

$$\tilde{D}_2(t) \leq \int_0^t \omega(\varrho D(\tau)) d\tau + \lambda^{-1} K \max(M, N) D(t) + \kappa D_1(t) \text{ pour } t \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Comme $\lambda^{-1} K \max(M, N) < \frac{1}{2}(1 - \kappa)$ en vertu de la définition du nombre λ , en ajoutant membre à membre les deux dernières inégalités on obtient enfin l'inégalité (41).

Lemme 4. *Supposons vérifiées les hypothèses du théorème 1 ou bien celles du théorème 3. Il existe alors une constante $C \geq 0$ telle que pour $x \in \langle a, b \rangle$, $y \in \langle c, d \rangle$ et $z, p, q \in E$ quelconques on a les inégalités*

$$\|f(x, y, z, p, q)\| \leq C \cdot (1 + \|z\| + \|p\| + \|q\|),$$

$$\|G(x, z, q)\| \leq C \cdot (1 + \|z\|) + L_1(x) \cdot \|q\|,$$

$$\|H(y, z, p)\| \leq C \cdot (1 + \|z\|) + L_2(y) \cdot \|p\|.$$

En effet, avec les hypothèses du théorème 1 et en prenant $C \geq \omega(1) + \max_R \|f(x, y, 0, 0, 0)\|$, on déduit de (6) et de l'hypothèse que la fonction ω est non décroissante,

$$\begin{aligned} \|f(x, y, z, p, q)\| &\leq \|f(x, y, 0, 0, 0)\| + \\ &+ \sum_{k=1}^n \left\| f\left(x, y, \frac{k}{n}z, \frac{k}{n}p, \frac{k}{n}q\right) - f\left(x, y, \frac{k-1}{n}z, \frac{k-1}{n}p, \frac{k-1}{n}q\right) \right\| \leq \\ &\leq \|f(x, y, 0, 0, 0)\| + n\omega\left(\frac{1}{n}(\|z\| + \|p\| + \|q\|)\right) \leq \\ &\leq \|f(x, y, 0, 0, 0)\| + (1 + \|z\| + \|p\| + \|q\|)\omega(1) \leq \\ &\leq C \cdot (1 + \|z\| + \|p\| + \|q\|), \quad \text{où } n = [1 + \|z\| + \|p\| + \|q\|]. \end{aligned}$$

Dans les autres cas les limitations sont analogues.

Lemme 5. *Supposons vérifiées les hypothèses du théorème 1 ou bien celles du théorème 3. Soit C la constante dont il est question dans le lemme 4, et μ un nombre satisfaisant à l'inégalité*

$$(42) \quad \mu \geq (1 - \alpha)^{-1} C \{3(M + N) + 2\|z^0\| + 2\} + 1.$$

Soient encore deux fonctions $p(x, y)$ et $q(x, y)$ à valeurs dans l'espace E , continues dans le rectangle R , telles que l'intégrale $\int p dx + q dy$ ne dépende pas du chemin d'intégration, celui-ci étant une courbe arbitraire rectifiable contenue dans le rectangle R , et que l'on ait

$$\|p(x, y)\| \leq \mu M(x) e^{\mu t(x, y)} \text{ et } \|q(x, y)\| \leq \mu N(y) e^{\mu t(x, y)} \text{ pour } (x, y) \in R.$$

Enfin, soit $z(x, y)$ une fonction à valeurs dans l'espace E , continue dans le rectangle R , telle que

$$\|z(x, y)\| \leq \|z^0\| + (M + N) e^{\mu t(x, y)} \text{ pour } (x, y) \in R.$$

Posons

$$\tilde{p}(x, y) = \int_{g(x)}^y f(x, v, z(x, v), p(x, v), q(x, v)) dv + G(x, z(x, g(x)), q(x, g(x))), \quad (43)$$

$$\tilde{q}(x, y) = \int_{h(y)}^x f(u, y, z(u, y), p(u, y), q(u, y)) du + H(y, z(h(y), y), p(h(y), y))$$

pour $(x, y) \in R$ et

$$\tilde{z}(x, y) = z^0 + \int_{(0,0)}^{(x,y)} \tilde{p} dx + \tilde{q} dy. \quad (44)$$

Dans ces conditions, on a les inégalités

$$\|\tilde{p}(x, y)\| \leq \mu M(x) e^{\mu t(x,y)}, \quad \|\tilde{q}(x, y)\| \leq \mu N(y) e^{\mu t(x,y)} \quad \text{et} \quad (45)$$

$$\|\tilde{z}(x, y)\| \leq \|z^0\| + (M + N) e^{\mu t(x,y)} \quad \text{pour} \quad (x, y) \in R.$$

Démonstration. En vertu du lemme 4 on a

$$\|\tilde{p}(x, y)\| \leq \left| \int_{g(x)}^y C \cdot (1 + \|z^0\| + (M + N)(1 + \mu) e^{\mu t(x,v)}) dv \right| + C \cdot (1 + \|z^0\| + (M + N) e^{\mu t(x, g(x))}) + L_1(x) \mu N(g(x)) e^{\mu t(x, g(x))},$$

done, d'après (26), (28), (29), (33), (34), puisque $\mu > 1$ par définition,

$$\|\tilde{p}(x, y)\| \leq C \cdot (1 + \|z^0\| + 2(M + N)) e^{\mu t(x,y)} + C \cdot (1 + \|z^0\| + (M + N)) e^{\mu t(x,y)} + \kappa \mu M(x) e^{\mu t(x,y)} \leq (1 - \kappa) \mu e^{\mu t(x,y)} + \kappa \mu M(x) e^{\mu t(x,y)} \leq \mu M(x) e^{\mu t(x,y)}$$

et la première inégalité (45) est ainsi établie. La démonstration de la seconde est analogue. La troisième résulte des deux premières moyennant le lemme 1.

3. Démonstration du théorème 1.

1° Considérons l'espace $\mathcal{J}$ de tous les couples $(p(x, y), q(x, y))$ de fonctions à valeurs dans l'espace E , continues dans le rectangle R et telles que l'intégrale curviligne $\int p dx + q dy$ ne dépende pas du chemin d'intégration, celui-ci étant une courbe quelconque rectifiable contenue dans le rectangle R . L'espace $\mathcal{J}$ est un espace de Banach relativement à la norme

$$\|(p, q)\|_{\mathcal{J}} = \max_{(x,y) \in R} (\|p(x, y)\|_E + \|q(x, y)\|_E).$$

Désignons par F la transformation de l'espace $\mathcal{J}$ qui fait correspondre au couple de fonctions $(p, q) \in \mathcal{J}$ le couple $(\tilde{p}, \tilde{q})$ de fonctions définies par les formules

$$\tilde{p}(x, y) = \int_{g(x)}^y f(x, v, z(x, v), p(x, v), q(x, v)) dv + H(x, z(x, g(x)), q(x, g(x))),$$

$$\tilde{q}(x, y) = \int_{h(y)}^x f(u, y, z(u, y), p(u, y), q(u, y)) du + H(y, z(h(y), y), p(h(y), y)),$$

où

$$z(x, y) = z^0 + \int_{(0,0)}^{(x,y)} p dx + q dy.$$

Comme $\partial \tilde{p}(x, y)/\partial y = \partial \tilde{q}(x, y)/\partial x = f(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y))$, l'intégrale $\int \tilde{p} dx + \tilde{q} dy$ ne dépend pas du chemin d'intégration et, par suite, la transformation F transforme l'espace $\mathcal{J}$ en lui-même.

Si $F(p, q) = (p, q)$, la fonction $z(x, y) = z^0 + \int_{(0,0)}^{(x,y)} p dx + q dy$ est une solution du problème (S) et, inversement, si $z(x, y)$ est une solution du problème (S) et si $(p, q) = (\partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$, on a $(p, q) \in \mathcal{J}$ et $F(p, q) = (p, q)$. Pour démontrer le théorème 1 il faudra donc prouver que dans l'espace $\mathcal{J}$ il existe exactement un point fixe par rapport à la transformation F .

2° La transformation F étant continue dans l'espace $\mathcal{J}$, d'après (4) et (6), il suffit pour cela de montrer que pour deux couples arbitraires de fonctions (p_0, q_0) et $(\tilde{p}_0, \tilde{q}_0)$ les suites de couples (p_n, q_n) et $(\tilde{p}_n, \tilde{q}_n)$, $n = 0, 1, \dots$, définies par les formules $(p_n, q_n) = F(p_{n-1}, q_{n-1})$ et $(\tilde{p}_n, \tilde{q}_n) = F(\tilde{p}_{n-1}, \tilde{q}_{n-1})$, convergent dans l'espace $\mathcal{J}$ vers la même limite, ce qui équivaut à l'égalité

$$(46) \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|(p_m - \tilde{p}_n, q_m - \tilde{q}_n)\|_{\mathcal{J}} = 0.$$

3° Considérons deux couples quelconques de fonctions $(p_0, q_0) \in \mathcal{J}$ et $(\tilde{p}_0, \tilde{q}_0) \in \mathcal{J}$. Soit μ un nombre vérifiant l'inégalité (42), tel que

$$\|p_0(x, y)\|_E, \|\tilde{p}_0(x, y)\|_E \leq \mu M(x) e^{\mu d(x, y)}$$

et

$$\|q_0(x, y)\|_E, \|\tilde{q}_0(x, y)\|_E \leq \mu N(y) e^{\mu d(x, y)}$$

pour $(x, y) \in R$. Alors il résulte du lemme 4 que

$$(47) \quad \begin{aligned} \|p_n(x, y)\|_E, \|\tilde{p}_n(x, y)\|_E &\leq \mu M(x) e^{\mu t(x, y)}, \\ \|q_n(x, y)\|_E, \|\tilde{q}_n(x, y)\|_E &\leq \mu N(y) e^{\mu t(x, y)} \end{aligned}$$

pour $(x, y) \in R$ et $n = 0, 1, 2, \dots$

Posons

$$(48) \quad \begin{aligned} D_{mn}^{(1)}(t) &= \max_{(x, y) \in R \cap S_t} (\lambda M(x))^{-1} e^{-\lambda t(x, y)} \|p_m(x, y) - \tilde{p}_n(x, y)\|_E, \\ D_{mn}^{(2)}(t) &= \max_{(x, y) \in R \cap S_t} (\lambda N(y))^{-1} e^{-\lambda t(x, y)} \|q_m(x, y) - \tilde{q}_n(x, y)\|_E, \\ D_{mn}(t) &= D_{mn}^{(1)}(t) + D_{mn}^{(2)}(t) \end{aligned}$$

pour $m, n = 0, 1, 2, \dots$ et $t \in (0, +\infty)$, où $M(x)$ et $N(y)$ sont les fonctions qui interviennent dans le lemme 2 et λ est le nombre défini par la formule (40). D'après (16), (18), (33) et (35), les fonctions $D_{mn}(t)$ sont non négatives, continues et non décroissantes et elles satisfont, à cause de (40) et (47), à l'inégalité

$$D_{mn}(t) \leq 4\mu e^{\mu t^*},$$

où

$$t^* = \max_{(x, y) \in R} t(x, y)$$

Les fonctions

$$D_k(t) = \sup_{m, n \geq k} D_{mn}(t), \quad k = 0, 1, \dots,$$

sont donc non décroissantes, satisfont aux inégalités

$$(49) \quad 0 \leq D_k(t) \leq 4\mu e^{\mu t^*}$$

et forment une suite non croissante dans l'intervalle $0 \leq t < +\infty$. Donc la limite

$$D(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} D_k(t)$$

existe et cette limite est une fonction non négative et non décroissante dans l'intervalle $0 \leq t < +\infty$.

Comme, en vertu de (16) et (48),

$$\|(p_m - \tilde{p}_n, q_m - \tilde{q}_n)\|_{\mathcal{F}} \leq \lambda \max(M, N) e^{\lambda t^*} D_{mn}(t^*),$$

pour établir l'égalité (46) et ainsi achever la démonstration du théorème 1, il suffit de prouver que

$$(50) \quad D(t) \equiv 0 \text{ pour } t \in (0, +\infty).$$

4° D'après (4) et (6), les fonctions $A_1 = \|p_m(x, y) - \tilde{p}_n(x, y)\|_E$,
 $A_2 = \|q_m(x, y) - \tilde{q}_n(x, y)\|_E$, $A = \left\| \int_{(0,0)}^{(x,y)} p_m dx + q_m dy - \int_{(0,0)}^{(x,y)} \tilde{p}_n dx + \tilde{q}_n dy \right\|_E$,
 $\tilde{A}_1 = \|p_{m+1}(x, y) - \tilde{p}_{n+1}(x, y)\|_E$ et $\tilde{A}_2 = \|q_{m+1}(x, y) - \tilde{q}_{n+1}(x, y)\|_E$ satisfont, pour tout $m = 0, 1, 2, \dots$ et tout $n = 0, 1, 2, \dots$, aux inégalités (38) et (39); donc, en vertu du lemme 3,

$$(51) \quad D_{m+1, n+1}(t) \leq 2 \int_0^t \omega(\varrho D_{mn}(\tau)) d\tau + \frac{1}{2}(1 + \kappa) D_{mn}(t)$$

pour $m, n = 0, 1, \dots$ et $t \in (0, +\infty)$.

Comme la fonction ω est non décroissante, on obtient, en vertu de (51),

$$D_{k+1}(t) \leq 2 \int_0^t \omega(\varrho D_k(\tau)) d\tau + \frac{1}{2}(1 + \kappa) D_k(t) \text{ pour } k = 0, 1, 2, \dots$$

et $t \in (0, +\infty)$;

la fonction ω étant continue, il s'ensuit, en vertu de (49) et du théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme, que

$$(52) \quad D(t) \leq \int_0^t \varphi(D(\tau)) d\tau \quad \text{pour } t \in (0, +\infty),$$

où

$$\varphi(\delta) = \frac{4}{1 - \kappa} \omega(\varrho \delta).$$

5° Puisque, d'après (33), (35) et (40), on a $\varrho > 0$ et que $\kappa < 1$, on voit, en tenant compte des propriétés analogues de la fonction ω , que la fonction φ est continue et non décroissante pour $\delta \in (0, +\infty)$, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\delta) > 0$ pour $\delta > 0$ et que, en vertu de (7), on a

$$(53) \quad \int_0^t \frac{du}{\varphi(u)} = +\infty.$$

La fonction

$$\bar{D}(t) = \int_0^t \varphi(D(\tau)) d\tau$$

est continue pour $t \in (0, +\infty)$ et, d'après (52), elle satisfait à l'inégalité

$$(54) \quad D(t) \leq \bar{D}(t),$$

d'où il résulte, puisque la fonction φ est non décroissante, que

$$(55) \quad 0 \leq \bar{D}(t) \leq \int_0^t \varphi(\bar{D}(\tau)) d\tau \text{ pour } t \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

La fonction $\bar{D}(t)$ étant continue, il découle de l'inégalité (55), en vertu d'un théorème de M. Z. Opial [11], p. 200, que $\bar{D}(t) \leq u(t)$, où $u(t)$ est l'intégrale supérieure de l'équation $u' = \varphi(u)$ qui satisfait à la condition $u(0) = 0$. A cause de (53) on a $u(t) \equiv 0$, donc aussi $\bar{D}(t) \equiv 0$ pour $t \in \langle 0, +\infty \rangle$. Par conséquent on a, d'après (54), $D(t) \equiv 0$ pour $t \in \langle 0, +\infty \rangle$ et la démonstration est ainsi achevée.

4. Démonstration du théorème 2.

1° Soit E_0 l'espace de Banach de toutes les suites $u = \{u_n\}_{n=0,1,\dots}$, $u_n \in E$, telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_0\|_E = 0$, muni de la norme $\|u\|_{E_0} = \sup_{n=0,1,\dots} \|u_n\|_E$. Considérons les fonctions f, G et H définies pour $(x, y) \in R$ et $z, p, q \in E_0$ par les formules

$$(55) \quad \begin{aligned} f(x, y, z, p, q) &= \{f(x, y, z_n, p_n, q_n)\}_{n=0,1,\dots}, \\ G(x, z, q) &= \{G_n(x, z_n, q_n)\}_{n=0,1,\dots}, \quad H(y, z, p) = \{H_n(y, z_n, p_n)\}_{n=0,1,\dots}, \end{aligned}$$

où

$$z = \{z_n\}_{n=0,1,\dots}, \quad p = \{p_n\}_{n=0,1,\dots} \quad \text{et} \quad q = \{q_n\}_{n=0,1,\dots}.$$

2° Les fonctions (55) admettent leurs valeurs dans l'espace E_0 et vérifient dans cet espace les hypothèses du théorème 1. Nous allons le prouver pour la fonction f .

Comme, en vertu de (9),

$$\begin{aligned} \|f_n(x, y, z_n, p_n, q_n) - f_0(x, y, z_0, p_0, q_0)\|_E &\leq \omega(\|z_n - z_0\|_E + \|p_n - p_0\|_E + \\ &+ \|q_n - q_0\|_E) + \|f_n(x, y, z_0, p_0, q_0) - f_0(x, y, z_0, p_0, q_0)\|_E, \end{aligned}$$

on voit, d'après (8), que les conditions $\|z_n - z_0\|_E \rightarrow 0$, $\|p_n - p_0\|_E \rightarrow 0$ et $\|q_n - q_0\|_E \rightarrow 0$ entraînent $\|f_n(x, y, z_n, p_n, q_n) - f_0(x, y, z_0, p_0, q_0)\|_E \rightarrow 0$ et par suite, les valeurs de la fonction f définie par la formule (5) appartiennent à l'espace E_0 .

Si $z, p, q \in E_0$, $z = \{z_n\}_{n=0,1,\dots}$, $p = \{p_n\}_{n=0,1,\dots}$, $q = \{q_n\}_{n=0,1,\dots}$, $(x_m, y_m) \in R$ pour $m = 0, 1, \dots$ et si $x_m \rightarrow x_0$ et $y_m \rightarrow y_0$, on obtient, en tenant compte de (9), pour tout $N = 1, 2, \dots$,

$$\|f(x_m, y_m, z, p, q) - f(x_0, y_0, z, p, q)\|_{E_0} \leq \max(R_1, R_2 + R_3),$$

où

$$R_1 = \max_{n=1,2,\dots,N} \|f_n(x_m, y_m, z_n, p_n, q_n) - f_n(x_0, y_0, z_n, p_n, q_n)\|_E,$$

$$R_2 = 2\omega \left(\sup_{n=N+1, N+2, \dots} (\|z_n - z_0\|_E + \|p_n - p_0\|_E + \|q_n - q_0\|_E) \right),$$

$$R_3 = \sup_{n=N+1, N+2, \dots} \|f_n(x_m, y_m, z_0, p_0, q_0) - f_n(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)\|_E.$$

Les fonctions f_n étant continues dans l'espace E , on a $\lim_{m \rightarrow \infty} R_1 = 0$ pour tout N fixé et, d'après (8), $\lim_{m, N \rightarrow \infty} R_3 = 0$. Comme $z, p, q \in E_0$, on a aussi $\lim_{N \rightarrow \infty} R_2 = 0$. Cela prouve que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f(x_m, y_m, z, p, q) - f(x_0, y_0, z, p, q)\|_{E_0} = 0$, donc la fonction f définie par la formule (55) est continue par rapport au couple de variables (x, y) . Satisfaisant évidemment à la condition (6) par rapport à la norme $\|\cdot\|_{E_0}$, elle est aussi continue par rapport à l'ensemble de toutes les variables.

Ainsi, la fonction f définie par la formule (55), considérée comme fonction à valeurs dans E_0 , satisfait aux hypothèses du théorème 1. Il en est de même des fonctions G et H définies par cette formule.

3° En vertu du théorème 1 il existe (exactement) une fonction $z(x, y)$ à valeurs dans E_0 , de classe C^* sur R par rapport à la norme $\|\cdot\|_{E_0}$, qui satisfait à l'équation (1) et aux conditions (2) pour $z^0 = \{z_n^0\}_{n=0,1,\dots}$ et pour les fonctions (55). Les fonctions $\tilde{z}_n(x, y)$, à valeurs dans E , de classe $C^{(*)}$ sur R par rapport à la norme $\|\cdot\|_E$, définies par la formule $z(x, y) = \{\tilde{z}_n(x, y)\}_{n=0,1,\dots}$, satisfont aux équations (10) et aux conditions (11). Donc, l'unicité des solutions des équations (10) étant assurée par le théorème 1, on doit avoir $z(x, y) = \{z_n(x, y)\}_{n=0,1,\dots}$. Comme la fonction $z(x, y)$ est à valeurs dans l'espace E_0 et de classe C^* , il en résulte que

$$(56) \quad \|z_n - z_0\|_E + \|\partial z_n / \partial x - \partial z_0 / \partial x\|_E + \|\partial z_n / \partial y - \partial z_0 / \partial y\|_E + \|\partial^2 z_n / \partial x \partial y - \partial^2 z_0 / \partial x \partial y\|_E \rightarrow 0$$

pour $n \rightarrow \infty$ et pour tout $(x, y) \in R$ fixé. La continuité des fonctions $z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y, \partial^2 z / \partial x \partial y$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_{E_0}$ entraîne l'équicontinuité sur R des fonctions $z_n, \partial z_n / \partial x, \partial z_n / \partial y, \partial^2 z_n / \partial x \partial y$, $n = 0, 1, \dots$, par rapport à la norme $\|\cdot\|_E$, d'où il résulte que la convergence (56) est uniforme sur R , c'est-à-dire que l'égalité (12) est bien vérifiée.

5. Démonstration du théorème 3.

1° Désignons par $\mathcal{E}$ l'espace de Banach des fonctions $z(x, y)$ à valeurs dans E , continues dans le rectangle R , muni de la norme $\|z\|_{\mathcal{E}} = \max_R \|z(x, y)\|_E$. Soit $W \subset \mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $z(x, y)$ qui satis-

font à l'inégalité $\|z(x, y)\|_E \leq \|z^0\|_E + (M + N)e^{\mu t(x, y)}$ pour $(x, y) \in R$, où M et N sont définis par les formules (40) et μ satisfait à l'inégalité (42). L'ensemble W est fermé et convexe dans l'espace $\mathcal{C}$.

2° Désignons par T une transformation qui fait correspondre à la fonction $z^* \in W$ la fonction $z \in \mathcal{C}$, définie univoquement en vertu du théorème 1, qui est la solution du problème suivant:

$$(57) \quad \begin{aligned} \partial^2 z / \partial x \partial y &= f(x, y, z^*(x, y), \partial z / \partial x, \partial z / \partial y) \quad \text{pour } (x, y) \in R, \\ \partial z / \partial x &= G(x, z^*(x, g(x)), \partial z / \partial y) \quad \text{pour } x \in \langle a, b \rangle, y = g(x), \\ \partial z / \partial y &= H(y, z^*(h(y), y), \partial z / \partial x) \quad \text{pour } y \in \langle c, d \rangle, x = h(y), \\ z(x^0, y^0) &= z^0. \end{aligned}$$

En vertu du théorème 2 la transformation T est continue.

3° La transformation T transforme l'ensemble W en un sous-ensemble compact de cet ensemble. En effet, si $p_0 \in \mathcal{C}$, $q_0 \in \mathcal{C}$, $\|p_0(x, y)\|_E \leq \mu M(x) e^{\mu t(x, y)}$ et $\|q_0(x, y)\|_E \leq \mu N(y) e^{\mu t(x, y)}$ pour $(x, y) \in R$, alors, en vertu du lemme 5, les fonctions p_n , q_n et z_n , $n = 1, 2, \dots$, définies par les formules

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x, y) &= \int_{g(x)}^y f(x, v, z^*(x, v), p_n(x, v), q_n(x, v)) dv + \\ &\quad + G(x, z^*(x, g(x)), q_n(x, g(x))), \\ q_{n+1}(x, y) &= \int_{h(y)}^x f(u, y, z^*(u, y), p_n(u, y), q_n(u, y)) du + \\ &\quad + H(y, z^*(h(y), y), p_n(h(y), y)), \\ z_n(x, y) &= z^0 + \int_{(0,0)}^{(x,y)} p_n dx + q_n dy \end{aligned}$$

satisfont aux inégalités

$$\|p_n(x, y)\|_E \leq \mu M(x) e^{\mu t(x, y)}, \|q_n(x, y)\|_E \leq \mu N(y) e^{\mu t(x, y)}, \|z_n(x, y)\|_E \leq \|z^0\|_E + (M + N)e^{\mu t(x, y)} \quad (x, y) \in R, n = 1, 2, \dots$$

De la démonstration du théorème 1 il s'ensuit que l'on a, pour la fonction z qui est solution du problème (57), les égalités $z = \lim z_n$, $\partial z / \partial x = \lim p_n$, $\partial z / \partial y = \lim q_n$. Donc $T(W) \subset W_1$, où W_1 désigne l'ensemble des fonctions $z \in \mathcal{C}$ telles que

$$(58) \quad \begin{aligned} \|z(x, y)\|_E &\leq \|z^0\|_E + (M + N)e^{\mu t(x, y)}, \|\partial z(x, y) / \partial x\|_E \leq \\ &\leq \mu M(x) e^{\mu t(x, y)}, \|\partial z(x, y) / \partial y\|_E \leq \mu N(y) e^{\mu t(x, y)}. \end{aligned}$$

Nous avons $W_1 \subset W$ et, d'après (58), les fonctions $z(x, y) \in W_1$ sont bornées dans leur ensemble et équicontinues sur R au sens de la norme $\|\cdot\|_E$. Par conséquent, comme E est un espace à un nombre fini de dimensions, l'ensemble W_1 est, en vertu du théorème d'Arzela, compact dans l'espace $\mathcal{E}$.

4° Comme W est un ensemble fermé et convexe dans un espace de Banach et la transformation continue T transforme W en un sous-ensemble compact de W , on conclut, en vertu d'un lemme de Mazur [10] relatif au sur-ensemble convexe minimal et en vertu du théorème du point fixe de Schauder [12], qu'il existe une fonction $z \in W$ telle que $Tz = z$. Cette fonction z est la solution du problème (S).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ciliberto, C., *Il problema di Darboux per un'equazione di tipo iperbolico in due variabili*, Ricerche di Mat., **4** (1955), p. 15-29.
- [2] Conti, R., *Sul problema di Darboux per l'equazione $z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y)$* , Annali Univ. Ferrara N. S., **2**, 11 (1953) p. 129-140.
- [3] — *Sull'equazione integrodifferenziale di Darboux-Picard*, Le Matematiche, **13**, 1 (1958), p. 30-39.
- [4] Foias, C., Gussi, G., Poenaru, V., *Une méthode directe dans l'étude du problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles, hyperboliques, du second ordre, à deux variables*, Revue de Mathématiques pures et appliquées, **1**, 2 (1956), p. 61-98.
- [5] Kiszyński, J., *Sur l'existence et l'unicité des solutions des problèmes classiques relatifs à l'équation $s = F(x, y, z, p, q)$* , Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sectio A, **11** (1957), p. 73-108.
- [6] — *Sur l'existence des solutions d'un problème de M^{lle} Z. Szmydt relatif à l'équation $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$* , Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sectio A, **12** (1958), p. 67-109.
- [7] — *Sur l'unicité des solutions de certains problèmes pour l'équation $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$* , Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sectio A, **12** 1958, p. 111-129.
- [8] — *Sur les équations différentielles dans les espaces de Banach*, Bull. Acad. Polon. Sci., Classe des Sci. math., astr. et phys., **7**, 7 (1959), p. 381-385.
- [9] — *Solutions généralisées du problème de Cauchy-Darboux pour l'équation $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$* , Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sectio A, **14** (1960), p. 85-107.
- [10] Mazur, S., *Über die kleinste konvexe Menge, die eine gegebene kompakte Menge enthält*, Studia Math., **2** (1930), p. 7-9.
- [11] Opial, Z., *Sur un système d'inégalités intégrales*, Ann. Polon. Math., **3**, 2 (1957), p. 200-209.
- [12] Schauder, J., *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math., **2** (1930), p. 171-180.

- [13] Szmydt, Z., *Sur un nouveau type de problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4, 2 (1956), p. 67-72.
- [14] Ważewski, T., *Sur un procédé de prouver la convergence des approximations successives sans utilisation des séries de comparaison*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. des sci. math., astr. et phys., 8, 1 (1960), p. 47-52.

Streszczenie

W pracy niniejszej zajmujemy się istnieniem, jednoznacznością i ciągłą zależnością od warunków początkowych rozwiązań równania

$$(1) \quad \partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y).$$

Rozważania dotyczą podanego przez Zofię Szmydt [13] uogólnienia zadania Goursata i mają przebieg następujący:

1° Dla równania (1) rozważanego w zakresie funkcji o wartościach z dowolnej przestrzeni Banacha metodą kolejnych przybliżeń dowodzimy istnienia i jednoznaczności rozwiązań, przy czym zakładamy, że występująca po prawej stronie równania (1) funkcja ciągła $f(x, y, z, p, q)$ spełnia ze względu na zmienne z, p i q warunek Osgooda (6)-(7). Metoda dowodu zbieżności kolejnych przybliżeń jest taka sama, jak w nocie autora [8] i podpada pod abstrakcyjny schemat podany przez T. Ważewskiego [14].

2° Rozważając równanie (1) w zakresie funkcji o wartościach z odpowiedniej przestrzeni ciągów zbieżnych, jako wniosek z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań otrzymujemy twierdzenie o ciągłej zależności rozwiązań od warunków początkowych i prawej strony równania.

3° Dla równania (1) rozważanego w zakresie funkcji o wartościach z przestrzeni n -wymiarowej dowodzimy twierdzenie o istnieniu rozwiązań przy założeniu, że funkcja $f(x, y, z, p, q)$ spełnia warunek Osgooda ze względu na zmienne p i q . Korzystając z eleganckiego pomysłu C. Ciliberto [1], dowód uzyskujemy za pomocą twierdzenia Schaudera o punkcie stałym, opierając się na twierdzeniach udowodnionych w etapach 1° i 2°.

Резюме

В этой работе мы занимаемся существованием, однозначностью и непрерывностью зависимости от начальных условий решений уравнения

$$(1) \quad \partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y).$$

Рассуждения относятся к данному Софией Шмыдт [13] обобщению задачи Гурса и имеют следующий ход:

1° Для уравнения (1), рассматриваемого в области функций со значениями из произвольного пространства Банаха, доказываем методом последовательных приближений существование и однозначность решений, причем полагаем, что выступающая с правой стороны уравнения (1) непрерывная функция $f(x, y, z, p, q)$ исполняет относительно переменных z, p и q условия Осгуда (6)-(7). Метод доказательства сходимости последовательных приближений тот же, как в заметке автора [8], и подходит под абстрактную схему, данную Т. Важевским [14].

2° Рассматривая уравнение (1) в области функций со значениями из подходящего пространства сходящихся рядов, получаем, как следствие из теоремы существования и однозначности решений, теорему о непрерывности зависимости решений от начальных условий и от правой стороны уравнения.

3° Для уравнения (1) рассматриваемого в области функций со значениями из n -мерного пространства, доказываем теорему о существовании решений при предположении, что функция $f(x, y, z, p, q)$ исполняет условия Осгуда относительно переменных p и q . Пользуясь изящной идеей К. Чилиберто [1], получаем доказательство с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке, опираясь на теоремах, доказанных на этапах 1° и 2°.