ANNALES UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA

LUBLIN — POLONIA

VOL. XIV, 3 SECTIO A 1960

Z Katedry Zespołowej Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr A. Bielecki

ADAM BIELECKI et KONSTANTY RADZISZEWSKI

Sur les cordes divisant l'aire d'un ovale dans un rapport donné

O cięciwach dzielących pole owalu w danym stosunku

О хордах, делящих площадь овала в данном отношении

1. Introduction

Soit Γ un circuit simple plan et convexe au sens large, c'est-à-dire pouvant contenir des segments de droite.

Par $\Psi(\Gamma, k)$ nous désignerons, pour $k \epsilon \langle 0, 1 \rangle$, l'ensemble de toutes les cordes de l'ovale Γ qui divisent son aire dans le rapport k, par $\delta(\Gamma, k)$ — le maximum des longueurs de telles cordes et par $\psi(\Gamma, k)$ le sous-ensemble formé des cordes de longueur $\delta(\Gamma, k)$ et appartenant à $\Psi(\Gamma, k)$. Dans le cas particulier $k = 0$ l'ensemble $\Psi(\Gamma, 0)$, qui peut être vide, se compose de tous les segments de droite contenus dans le contour Γ.

L'un des auteurs a montré autrefois que le rapport $\delta(\Gamma, 1):D$, où D est le diamètre de Γ, reste toujours supérieur à $3/4$, la limitation étant précise. Nous nous proposons maintenant de généraliser ce théorème pour d'autres valeurs du paramètre k, en appliquant une méthode semblable à celle qui a déjà été utilisée dans la note [1]. Il se montrera que cette méthode ne conduira à des limitations précises que dans certains cas (Théorèmes 3 et 5). Dans les autres cas, nous devrons nous contenter d'un procédé indirect, assez grossier, qui permettra encore d'obtenir certaines limitations du rapport en question, mais pas précises (Théorèmes 6 et 7). D'autre part, dans la méthode dont nous allons nous servir, le fait que le dénominateur du quotient $\delta(\Gamma, k):D$ est le diamètre de l'ovale Γ n'est pas essentiel et on peut remplacer D par la longueur d d'une quelconque des cordes qui devra pourtant être supposée fixée. Ce qui est important, c'est le rapport σ dans lequel cette corde divise l'aire de l'ovale considéré; le cas $\sigma = 0$ est le plus simple, (Théorème 1), les autres, $\sigma \epsilon (0, 1\rangle$, seront ramenés à ce cas particulier (Théorèmes 2-6).

2. Quelques lemmes

Dans la suite nous utiliserons les notations suivantes:

$\langle AB\rangle$	segment de droite fermé, d'extrémités A et B;
(AB)	le même segment sans extrémités;
$\langle A*B\rangle$	arc fermé d'extrémités A et B;
$\langle A*BCD*E*FG\rangle$	ligne formée des arcs $\langle A*B\rangle$, $\langle D*E\rangle$ et $\langle E*F\rangle$, et des segments de droite $\langle BC\rangle$, $\langle CD\rangle$ et $\langle FG\rangle$;
ABC	triangle de sommets A, B et C;
$[AB]$	longueur du segment $\langle AB\rangle$;
$\{ABC\}$	aire du triangle ABC;
$\{A*BC*DE\}$	aire du domaine limité par la ligne $\langle A*BC*DE\rangle$ et segment $\langle AE\rangle$;
$\{\Gamma\}$	aire de l'ovale Γ;

Lemme 1. *Soient l et m deux demi-droites distinctes, mais de sommet O commun, et soit donnée une constante $\alpha > 0$. Le point $P \neq O$ étant situé sur l'une des demi-droites données, désignons par P' un point sur l'autre demi-droite tel que l'aire du triangle OPP' soit égale à α.*

Cela étant, si chacun des points X et Y est situé sur l'une quelconque des demi-droites l ou m, si $X \neq O$, $[OY] > [OX]$ et si $[OY] > [OX']$ alors $[XX'] < [YY']$.

En effet, supposons que $[OX] \geqslant [OY]$, sinon, il suffirait d'interchanger les rôles des points X et X'. Les triangles $YX'Y'$ et $YX'X$ ayant évidemment des aires égales, les droites YX' et XY' sont parallèles. D'autre part, $\sphericalangle X'YO < \sphericalangle X'XO \leqslant \sphericalangle XX'O < \sphericalangle YX'O$ et si l'on déplace le point X sur la droite $Y'X$ dans une nouvelle position X^* telle que l'on ait $\sphericalangle X'YX^* = \sphericalangle YX'Y'$, on aura $\sphericalangle X'X^*Y' = \sphericalangle YY'X^* < \sphericalangle X'Y'X^* < \sphericalangle X'XX^*$, d'où $[X'X] < [X'X^*] = [YY']$.

Lemme 2. *Etant donné un nombre $k \in (0, 1\rangle$ et un triangle équilatéral $T = ABC$, dans lequel $[AB] > [BC] = [CA]$, nous admettons que le point $A_B \in (BC)$ et $[BA_B]:[A_BC] = k$, le point $A_C \in (BC)$ et $[CA_C]:[A_CB] = k$, le point $B_C \in (CA)$ et $[CB_C]:[B_CA] = k$ etc. Alors l'ensemble $\psi(T, k)$ se compose des deux cordes $\langle AA_B\rangle$ et $\langle BB_A\rangle$.*

En effet, il est bien évident, en vertu du lemme 1, que l'ensemble $\psi(T, k)$ est contenu dans l'ensemble des six cordes $\langle AA_B\rangle$, $\langle AA_C\rangle, \ldots,$ $\langle CC_B\rangle$. Puisque $[AB] > [BC]$, on a, d'après le lemme 1, $[CC_A] < [AA_C]$, et pareillement $[CC_B] < [BB_C]$. Désignons par S le milieu du segment $\langle BC\rangle$, évidemment $\sphericalangle ASC < \sphericalangle ASB$, d'où $[AA_C] < [AA_B]$, car $[SA_C] =$

$= [SA_B]$, et pareillement $[BB_C] < [BB_A]$. Donc $\psi(T, k)$ ne contient que les deux cordes $\langle AA_B\rangle$ et $\langle BB_A\rangle$.

Lemme 3. *Si, dans un triangle* ABC, *on a* $[AC] = [BC]$, $D\epsilon(BC)$ *et* $[AD]:[AB] = 1-p/(2p+2)$, *où* $0 < p \leqslant 1$, *alors* $\{ABD\}:\{ACD\} > p$.

En effet, admettons que L, $M\epsilon(AB)$, $[AM] = [MB]$, $[AL]:[AB] = 1-p/(2p+2)$, $N\epsilon(BC)$ et la droite LN est perpendiculaire à la droite AB. Il s'ensuit que $\{ABD\}:\{ADC\} > \{ABN\}:\{ANC\} = [BL]:[LM] = p$.

Lemme 4. *Si, dans un triangle* ABC, *on a* $D\epsilon(BC)$, $E\epsilon(AC)$, $[AD] = [BE] = [1-p/(2p+2)][AB]$, *où* $0 < p \leqslant 1$, *alors* $\{ABD\}+\{BAE\} > p(\{ADC\}+\{BEC\})$.

En effet, supposons que les points B et C soient situés du même côté de l'axe de symétrie m du segment $\langle AB\rangle$ et désignons par C' et C'' les points d'intersection de cet axe m avec les droites AC et BC respectivement. D'après le lemme 3, nous aurons $\{ADB\}+\{BAE\} > k(\{ADC''\}+\{BEC'\}) \geqslant k(\{ADC\}+\{ACC''\}+\{BEC'\}) \geqslant k(\{ADC\}+\{BEC\})$.

3. Cas $\sigma = 0$

Théorème 1. *Soient* Γ *un circuit convexe composé d'un arc* $\langle A{*}B\rangle$ *et le segment de droite* $\langle AB\rangle$ *joignant ses extrémités. Supposons, en outre, que chacune des cordes* $\langle AU\rangle$ *et* $\langle BV\rangle$, *où* $U\epsilon\langle A{*}B\rangle$ *et* $V\epsilon\langle A{*}B\rangle$, *divise l'aire limitée par* Γ *dans le rapport* p, $0 < p \leqslant 1$, *de telle façon que les* $\{AU{*}B\}$ *et* $\{BV{*}A\}$ *ne surpassent pas* $(1/2)\{A{*}B\}$. *Enfin, posons* $s_0 = 1-p/(2p+2)$.

Dans ces hypothèses $[AU]:[AB] > s_0$ *ou bien* $[BV]:[AB] > s_0$.

Démonstration. Admettons que $0 < p \leqslant 1$ et soit D le dernier point sur l'arc $\langle A{*}B\rangle$, dans la direction de A à B, tel que $[AD]:[AB] = s_0$ et E le premier tel que $[BE]:[AB] = s_0$.

Considérons d'abord le cas où le point E précède le point D sur l'arc $\langle A{*}B\rangle$. Il est clair que le point d'intersection C des droites AE et BD est situé au delà du contour Γ ou bien sur l'arc $\langle A{*}B\rangle$. Or, si le théorème en question n'était pas vrai, les points U et V devraient appartenir respectivement aux portions $\langle A{*}D\rangle$ et $\langle E{*}B\rangle$ de l'arc $\langle A{*}B\rangle$ et nous aurions en vertu du lemme 4:

$$\begin{aligned}
&\{AU{*}B\}+\{BV{*}A\} = p(\{A{*}U\}+\{B{*}V\}) \leqslant p(\{A{*}D\}+\{B{*}E\}) \leqslant \\
&\leqslant p(\{A{*}E\}+\{B{*}D\}+\{ACD\}+\{BCE\}) < \\
&< p(\{A{*}E\}+\{B{*}D\})+\{ADB\}+\{BEA\} \leqslant \\
&\leqslant \{AD{*}B\}+\{BE{*}A\} \leqslant \{AU{*}B\}+\{BV{*}A\}
\end{aligned}$$

ce qui est imposible.

Dans le cas où le point E suit le point D sur l'arc $\langle A*B\rangle$, dans la direction de A à B, ou bien si $E = D$, il suffit évidemment de montrer que les relations $U \in \langle A*D\rangle$ et $V \in \langle B*E\rangle$ ne peuvent pas être remplies simultamément; en effet, s'il en était ainsi, nous aurions

$$p(\{A*U\}+\{B*V\}) = \{AU*B\}+\{BV*A\} \geqslant \{AD*B\}+\{BE*A\} > \\ > \{A*U\}+\{B*V\}$$

contrairement à l'hypothèse que $p \leqslant 1$.

Nous avons ainsi achevé la démonstration du théorème 1.

L'exemple suivant montre que, dans l'énoncé de ce théorème, le nombre $s_0 = 1-p/(2p+2)$ ne peut pas être remplacé par un nombre plus grand.

Exemple 1. Soit $T = ABC$ un triangle équilatéral, $[AB] > [BC] = [CA]$ et $\langle CF\rangle$ la hauteur menée du sommet C à la base $\langle AB\rangle$. Admettons que $h = [CF]$ et fixons arbitrairement un nombre $p \in (0, 1\rangle$. Or, d'après le lemme 2, l'ensemble $\psi(T, p)$ se compose de deux segments égaux $\langle AD\rangle$ et $\langle BE\rangle$, où $D \in \langle BC\rangle$, $E \in \langle CA\rangle$ et $[BD]:[DC] = [AE]:[EC] = p$. Désignons par M la projection orthogonale du point D sur la base $\langle AB\rangle$ du triangle. Un calcul simple montre que $[AM]:[AB] = s_0$. D'autre part, la longueur $[AD]$ tend vers $[AM]$ lorsque $h \to 0$, la base $\langle AB\rangle$ restant constante. Donc l'inégalité $[AD]:[AB] > s_0+\varepsilon$, où $\varepsilon > 0$, est en défaut pour les valeurs de h suffisamment proches de zéro.

4. Cas $\sigma/(\sigma+2) \leqslant k \leqslant 1$

Théorème 2. *Supposons que la corde $\langle AB\rangle$ divise l'aire d'un ovale Γ dans le rapport σ, où $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, et désignons par $\langle A*B\rangle$ l'arc du contour Γ correspondant à la plus grande portion de cette aire, c'est-à-dire tel que l'aire $\{A*B\}$ soit non inférieur à la moitié de l'aire de l'ovale Γ. Supposons, en outre, que les points U et V appartiennent à l'arc $\langle A*B\rangle$ et que chacune des cordes $\langle AU\rangle$ et $\langle BV\rangle$ partage l'aire limitée par la courbe Γ dans le rapport k, où $\sigma < k \leqslant 1$, de telle façon que la portion contenant la corde $\langle AB\rangle$ ne soit pas plus grande que l'autre.*

Dans ces hypothèses $[AU]:[AB] > s'$ ou bien $[BV]:[AB] > s'$, où $s' = 1-(k-\sigma)/(2k+2)$.

Démonstration. Nous constatons sans peine que chacune des cordes $\langle AU\rangle$ et $\langle BV\rangle$ divise l'aire $\{A*B\}$ dans le rapport $p = (k-\sigma)/(1+\sigma) < 1$, à savoir $\{AU*B\}:\{A*U\} = \{BV*A\}:\{B*V\} = p$, d'où, en vertu du théorème 1, les inégalités demandées.

Le théorème suivant en est une conséquence immédiate:

Théorème 3. *Si une corde de longueur d divise l'aire d'un ovale Γ dans le rapport σ et si $0 \leqslant \sigma \leqslant k \leqslant 1$, le quotient $\delta(\Gamma, k)/d$ reste toujours supérieur à $s' = 1-(k-\sigma)/(2k+2)$.*

Exemple 2. Soit $\Delta = AOBC$ un deltoïde convexe tel que $[AC] = [BC] > [AO] = [BO]$ et $\{ABO\}:\{ABC\} = \sigma$, $0 < \sigma < k \leqslant 1$. Il n'est pas difficile de constater, en appliquant le lemmes 1 et 2, que, si le quotient $[OC]:[AB]$ est suffisamment petit, les cordes maximales $\langle AD\rangle$ et $\langle BE\rangle$ divisant l'aire du triangle ABC dans le rapport $p = (k-\sigma)/(1+\sigma)$ appartiennent en même temps à l'ensemble $\psi(\Delta, k)$. Donc, d'après l'argument déjà utilisé à propos de l'exemple 1, l'inégalité $\delta(\Delta, k):[AB] > s'+\varepsilon = 1-p/(2p+2)+\varepsilon$, où $\varepsilon > 0$, cesse d'être vraie pour des deltoïdes suffisamment aplatis dans la direction OC.

Ainsi, l'exemple montre bien que, dans l'énoncé du théorème 3, le nombre s' ne peut être remplacé par aucun nombre supérieur.

Théorème 4. *Supposons que la corde $\langle AB\rangle$ divise l'aire d'un ovale Γ dans le rapport σ, où $0 < \sigma \leqslant 1$, et désignons par $\langle A*B\rangle$ l'arc du contour Γ correspondant à la moindre portion de l'aire. Ensuite, supposons que $U \in \langle A*B\rangle$, $V \in \langle A*B\rangle$ et que chacune des cordes $\langle AU\rangle$ et $\langle BV\rangle$ divise l'aire de l'ovale Γ dans le rapport k, où $\sigma/(\sigma+2) \leqslant k < \sigma$, c'est-à-dire que les aires $\{A*U\}$ et $\{B*V\}$ sont égales à $k(\{\Gamma\}-\{A*U\})$. Enfin admettons que $s_1 = 1-(\sigma-k)/2\sigma(k+1)$. Alors $[AU]:[AB] > s_1$ ou bien $[BV]:[AB] > s_1$.*

Démonstration. Admettons que $p = (\sigma-k)/k(\sigma+1)$. On vérifie sans peine que $0 < p < 1$, $\{AU*B\}:\{A*U\} = \{BV*A\}:\{B*V\} = p$ et, pour terminer la démonstration, il suffit d'appliquer le théorème 1.

Le théorème suivant en résulte immédiatement.

Théorème 5. *Si une corde de longueur d divise l'aire d'un ovale Γ dans le rapport σ et si $0 < \sigma/(\sigma+2) \leqslant k < \sigma \leqslant 1$, le quotient $\delta(\Gamma, k):[AB]$ reste toujours supérieur à $s_1 = 1-(\sigma-k)/2\sigma(k+1)$.*

Nous allons encore equisser un exemple qui montre que, dans ce théorème, le nombre s_1 ne peut pas être augmenté.

Exemple 3. Soit $\Delta = AOBC$ un deltoïde tel que $[AC] = [BC] < [AO] = [BO]$, $\{ABC\}:\{ABO\} = \sigma$, $0 < \sigma/(\sigma+2) \leqslant k < \sigma \leqslant 1$ et le quotient $r = [OC]:[AB]$ est proche de zéro. D'après le lemme 1, l'ensemble $\psi(\Delta, k)$ contient deux segments $\langle AD\rangle$ et $\langle BE\rangle$, où $D \in \langle BC\rangle$ et $E \in \langle AC\rangle$, qui divisent l'aire du triangle ABC dans le rapport $p = (\sigma-k)/k(\sigma+1)$. Par un raisonnement analogue au précédent, on peut facilement prouver que l'inégalité $\delta(\Delta, k):[AB] = [AD]:[AB] > s_1+\varepsilon$, où $\varepsilon > 0$, cesse d'être correcte pour les valeurs de r suffisamment petites.

5. Cas $k < \sigma/(\sigma+2)$

Dans les cas que nous avons déjà examinés, les limitations du produit $\delta(\Gamma, k)/d$ étaient précises, mais lorsque $k < \sigma/(\sigma+2)$ nous ne connaissons pas de méthode qui conduise à des résultats aussi définitifs. Cependant, on peut encore obtenir certains résultats provisoires et imprécis, en appliquant un procédé d'itération, basé sur le théorème 1. Notamment on peut démontrer le théorème suivant:

Théorème 6. *Admettons que $\sigma \epsilon \langle 0, 1\rangle$ et $k \epsilon \langle 0, 1\rangle$, que n est un entier positif tel que*

(1) $$2^{n-1} < \sigma(k+1)/k(\sigma+1) \leqslant 2^n$$

et que

(2) $$s_n = (3/4)^{n-1}[1/2+2^{n-2}k(\sigma+1)/\sigma(k+1)].$$

Supposons en outre que $\langle AB\rangle$ soit une corde de l'ovale Γ divisant son aire dans le rapport σ.

Dans ces hypothèses, il existe une corde $\langle PR\rangle$ de l'ovale Γ, de longueur $[PR] > s_n[AB]$, divisant l'aire limitée par Γ dans le rapport k. Autrement dit le quotient $\delta(\Gamma, k):[AB] > s_n$.

Démonstration. Nous allons appliquer le principe d'induction. Dans le cas $n = 1$ les formules (1) et (2) prennent la forme $1 < \sigma(k+1)/k(\sigma+1) \leqslant 2$, d'où $\sigma/(\sigma+2) \leqslant k < \sigma$, et $s_1 = 1-(\sigma-k)/2\sigma(k+1)$, et le théorème 6 coïncide, dans ce cas, avec le théorème 5.

Supposons maintenant que le théorème 6 soit vrai pour un indice $n-1$. Nous allons prouver qu'il doit encore l'être pour l'indice n. Dans ce but supposons que k soit un nombre satisfaisant aux inégalités (1) et admettons que

(3) $$\sigma' = \sigma[2^{n-1}(\sigma+1)-\sigma]^{-1},$$

Comme $\sigma(\sigma'+1)/\sigma'(\sigma+1) = 2^{n-1}$ et que notre théorème est supposé vrai pour l'indice $n-1$, il existe une corde $\langle PR\rangle$ de l'ovale Γ divisant son aire dans le rapport σ' et telle que

(4) $$[PR]:[AB] > (3/4)^{n-1}$$

cf. (2) et (3). Mais $\sigma'(k+1)/k(\sigma'+1) = \sigma(k+1)/2^{n-1}k(\sigma+1)$, donc, d'après (1), $\sigma'/(\sigma'+2) \leqslant k \leqslant \sigma'$ et, en vertu du théorème 5, il existe une corde $\langle XY\rangle$ de l'ovale Γ divisant son aire dans le rapport k et telle que $[XY]:[PR] > 1-(\sigma'-k)/2\sigma'(k+1) = 1/2+2^{n-2}k(\sigma+1)/\sigma(k+1)$ d'où, cf. (2) et (4): $[XY]:[AB] > s_n$, donc le théorème 6 subsiste pour l'indice n pourvu qu'il soit vrai pour $n-1$, ce qui achève la démonstration.

Evidemment, la corde $\langle AB\rangle$ peut être un diamètre de l'ovale considéré. Donc nous obtenons, comme cas particulier du théorème 6, le théorème suivant:

Théoréme 7. *Si $\langle AB\rangle$ est un diamètre de l'ovale Γ qui divise son aire dans le rapport $\sigma\epsilon(0, 1\rangle$ et si le nombre k satisfait aux inégalités* (1), *n étant un entier positif, alors $\delta(\Gamma, k):[AB] > s_n$, où s_n est le nombre défini par la formule* (2).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Radziszewski, K. *Sur les cordes divisant l'aire d'un ovale en 2 parties égales*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **8**, 5 (1954), p. 89-92.

Streszczenie

Jeżeli jakaś cięciwa o długości d dzieli pole owalu płaskiego w stosunku $\sigma\epsilon\langle 0, 1\rangle$ i jeśli zachodzi a) $0 \leqslant \sigma \leqslant k \leqslant 1$ albo b) $0 < \sigma/(\sigma+2) \leqslant \leqslant k < \sigma \leqslant 1$, to wśród cięciw dzielących pole tego owalu w stosunku k istnieje zawsze taka, której długość jest większa niż a) $s'\cdot d$ albo b) $s_1\cdot d$, gdzie $s' = 1-(k-\sigma)/(2k+2)$, $s_1 = 1-(\sigma-k)/2\sigma(k+1)$, lecz dla pewnych owali może już nie istnieć taka, której długość byłaby większa niż $s\cdot d$, gdzie a) $s > s'$ albo odpowiednio b) $s > s_1$. Jeśli natomiast

$$\sigma/[2^n+(2^n-1)\sigma] \leqslant k < \sigma/[2^{n-1}+(2^{n-1}-1)\sigma]$$

to wśród cięciw dzielących pole owalu w stosunku k istnieje zawsze jakaś o długości większej niż

$$(3/4)^{n-1}[1/2+2^{n-2}k(\sigma+1)/\sigma(k+1)]d$$

W tym jednakże przypadku problem możliwie najlepszego oszacowania pozostaje jeszcze otwarty.

Резюме

Если какая-нибудь хорда длиною d делит площадь плоского овала в отношении σ, $\sigma\epsilon\langle 0, 1\rangle$ и если имеет место а) $0 \leqslant \sigma \leqslant k \leqslant 1$ или в) $0 < \sigma/(\sigma+2) \leqslant k < \sigma \leqslant 1$ то среди хорд, делящих площадь этого овала в отношении k, существует всегда такая, которой длина больше, чем $s'\cdot d$ или $s_1\cdot d$, где $s' = 1-(k-\sigma)/(2k+2)$, $s_1 = = 1-(\sigma-k)/2\sigma(k+1)$; но для некоторых овалов может уже не суще-

ствовать такая хорда, которой длина былы бы больше, чем $s \cdot d$, где а) $s > s'$, или соответственно b) $s \geqslant s_1$.

Если же $\sigma/[2^n+(2^n-1)\sigma] \leqslant k < \sigma/[2^{n-1}+(2^{n-1}-1)\sigma]$ то среди хорд, делящих площадь овала в отношении k, всегда существует какая-то длиною больше, чем

$$(3/4)^{n-1}[1/2+2^{n-2}k(\sigma+1)/\sigma(k+1)]d.$$

В этом случае, однако, проблема возможно лучшей оценки остаётся ещё открытой.