

Z Katedry Zespolowej Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. U.M.C.S.

Kierownik: prof. dr A. Bielecki

ZDZISŁAW LEWANDOWSKI

Sur l'identité de certaines classes de fonctions univalentes II

O identyczności pewnych klas funkcji jednolistnych II

О тождестве некоторых классов однолистных функций II

Introduction

Dans la première partie de ce travail [3] j'ai étudié deux sous-classes de la classe S des fonctions $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ holomorphes et univalentes dans le cercle $|z| < 1$: la classe L des fonctions linéairement accessibles de M. Biernacki [1] et la classe K des fonctions presque convexes de W. Kaplan [2]. J'y ai démontré que $L \subset K$. Dans cette seconde partie, je me propose d'établir la proposition réciproque, c'est-à-dire de prouver que $K \subset L$.

Pour la commodité du lecteur, je vais rappeler brièvement les définitions des classes de fonctions K et L . Nous dirons qu'une fonction $f(z) \in S$ est linéairement accessible lorsqu'elle représente le cercle $|z| < 1$ sur un domaine linéairement accessible, c'est-à-dire tel que son ensemble complémentaire soit la somme d'une famille de demi-droites fermées telles que les demi-droites ouvertes (sans extrémités) correspondantes soient disjointes deux à deux. La fonction $f(z)$ à dérivée non nulle, holomorphe dans le cercle $|z| < 1$, est dite presque convexe dans ce cercle s'il existe une fonction $\Phi(z)$ qui effectue la représentation univalente du cercle $|z| < 1$ sur un domaine convexe et telle que la partie réelle de l'expression $f'(z)/\Phi'(z)$ soit positive dans le cercle $|z| < 1$.

Je rappellerai encore certains théorèmes fondamentaux établis par M. Biernacki [1] pour les fonctions de la classe L et par W. Kaplan [2] pour les fonctions de la classe K .

1. Toute fonction $f(z) \in L$ est limite uniforme dans chaque cercle $|z| \leq r$, $r < 1$, de fonctions qui représentent le cercle $|z| < 1$ sur le plan muni d'un nombre fini de coupures qui sont des demi-droites sans points communs.

2. Si $f(z)$ est limite uniforme dans chaque cercle $|z| \leq r$, $r < 1$, pour $n \rightarrow \infty$, de fonctions $f_n(z)$ [$f_n(0) = 0$, $f'_n(0) > 0$] univalentes dans le cercle $|z| < 1$ et représentant ce cercle sur des domaines D_n linéairement accessibles, $f(z)$ représente aussi le cercle $|z| < 1$ sur un domaine D linéairement accessible.

3. Toute fonction presque convexe dans le cercle $|z| < 1$ est univalente dans ce cercle.

4. Pour que la fonction $f(z)$, $f'(z) \neq 0$, holomorphe dans le cercle $|z| < 1$, soit presque convexe dans ce cercle, il faut et il suffit que l'on ait

$$(1) \quad \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re} \{1 + re^{i\theta} f''(re^{i\theta})/f'(re^{i\theta})\} d\theta > -\pi,$$

où r est un nombre positif de l'intervalle $0 < r < 1$, θ_1 et θ_2 des nombres réels quelconques satisfaisant à l'inégalité $\theta_1 < \theta_2$.

Désignons par $\operatorname{arg} f'(z)$ l'une des branches uniformes de la fonction multiforme $\operatorname{arg} f'(z)$ pour la fonction $f(z)$ presque convexe dans $|z| < 1$. Un tel choix est possible, puisque $f'(z) \neq 0$.

Remarque 1. L'inégalité (1) est équivalente à celle-ci:

$$(2) \quad \operatorname{arg} f'(r \exp i\theta_1) - \operatorname{arg} f'(r \exp i\theta_2) < \pi + \theta_2 - \theta_1,$$

où dans les deux termes du premier membre $\operatorname{arg} f'(z)$ désigne la même branche de cette fonction, ou bien à l'inégalité

$$(3) \quad P(r, \theta_1) - P(r, \theta_2) < \pi, \quad \theta_1 < \theta_2, \quad 0 \leq r < 1,$$

où

$$P(r, \theta) = \operatorname{arg} f'(r e^{i\theta}) + \theta.$$

De ces formules on obtient l'interprétation géométrique de la condition de presque-convexité dont il est question dans la première partie du travail [3].

Dans le dernier chapitre, j'établis aussi quelques nouveaux résultats relatifs aux deux classes de fonctions considérées. J'y détermine, entre autres, le rayon r maximum, dans la classe $L = K$, tel que le transformé du cercle correspondant est un domaine étoilé par rapport au point $w = 0$. La démonstration du théorème annoncé sera faite en plusieurs étapes. Dans ce but, je vais introduire certaines notions et considérations auxiliaires, indispensables dans la suite.

Chapitre 1

Nous conviendrons de désigner, jusqu'au chapitre 4, par r un nombre fixé de l'intervalle $(0, 1)$ et par C la transformée de la circonférence $|z| = r$ par une fonction fixée $f(z) \in K$. Comme la représentation $f(re^{i\theta})$ fait correspondre aux paramètres θ croissants un sens de parcours positif sur la courbe C , nous aurons en vue, en disant qu'un point se déplace sur C ou décrit C dans le sens positif, une variation des points de la courbe C qui correspond à l'accroissement du paramètre θ . Par $\arg f'(z)$ nous désignerons, ici et dans la suite, la branche uniforme de la fonction multiforme $\arg f'(z)$ qui tend vers zéro lorsque $z = 0$. Le résultat que je me propose d'établir consistera à prouver que le domaine D limité par la courbe C , transformé du cercle $|z| \leq r$ par $w = f(z)$, est linéairement accessible. Si la courbe C était convexe, ce résultat serait atteint. Supposons donc dans ce qui suit, que la courbe C n'est pas convexe. Etant analytique, la courbe C est composée d'un nombre fini d'arcs convexes par rapport au domaine D et d'un même nombre d'arcs concaves par rapport à D , aucune partie de la courbe C ne peut être un segment de droite.

La courbe C étant analytique, fermée et bornée, supposons, pour la démonstration par l'absurde, que des parties de C soient des segments de droite. Evidemment, deux quelconques de ces segments ne peuvent avoir d'extrémités communes (nous considérons comme un seul segment deux segments qui sont le prolongement l'un de l'autre). Désignons par AB le plus long des segments qui sont parties de la courbe C et supposons qu'un point se meute de A à B en décrivant C dans le sens positif. Soit C_0 un arc ouvert suffisamment petit de la courbe C qui contient le point B . Introduisons un système de coordonnées (rectangulaires) dans lequel l'axe Ox passe par le segment AB et l'axe Oy contienne le point B , le point A appartenant au demi-axe négatif des abscisses (fig. 1). L'arc C_0 est un arc analytique de Jordan.

Soient $x = x(t)$, $y = y(t)$ des transformations biunivoques des points de l'arc C_0 et des points t du segment (α, β) , dans lesquelles on fait correspondre aux paramètres t croissants un parcours positif sur la courbe C . Supposons qu'au nombre t_0 , $\alpha < t_0 < \beta$, corresponde le point B . On a donc $x(t_0) = y(t_0) = 0$. Dans un voisinage suffisamment petit du point t_0 la fonction $y = y(t)$ peut être développée en série de Taylor:

$$y = y(t) = c_0 + c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)^2 \dots$$

Dans l'intervalle $[\alpha, t_0]$ on a $y(t) \equiv 0$, donc $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = 0$. Il en résulte que pour $t > t_0$, $|t - t_0| < \delta < (\beta - t_0)$, on a aussi $y(t) \equiv 0$. Dans l'intervalle $(t_0, t_0 + \delta)$

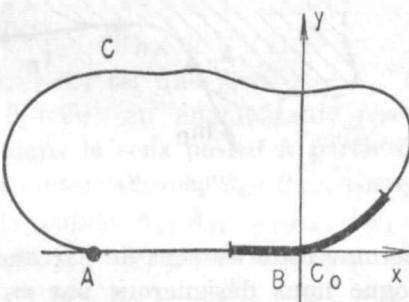


Figure 1

on a constamment $x(t) > 0$ ou bien $x(t) < 0$; cela résulte de ce que les points du segment (a, β) et ceux de l'arc C_0 se correspondent d'une manière biunivoque. Si dans $(t_0, t_0 + \delta)$ on a constamment $x(t) < 0$, il y a contradiction avec le fait qu'il y a correspondance univoque entre les points $t \in (a, \beta)$ et ceux de l'arc C . D'autre part, si dans $(t_0, t_0 + \delta)$ on a constamment $x(t) > 0$, il y aura aussi contradiction avec l'hypothèse que le segment AB est le plus long des segments rectilignes qui font partie de la courbe C . Par conséquent il est impossible que la courbe C contienne des parties rectilignes.

Le domaine D , transformé du cercle $|z| \leq r$ par $w = f(z)$, est borné et contient l'origine. Désirant la courbe C dans le sens positif, désignons les arcs concaves par rapport à D par L_1, L_2, \dots, L_n , les arcs convexes

par rapport à D par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, l'arc L_1 suivant immédiatement λ_1 . Désignons les points d'inflexion sur l'arc λ_k (extrémités de l'arc λ_k) par A_k, B_k $k = 1, 2, \dots, n$, de telle façon que le système de trois points (A_k, S_k, B_k) détermine un sens de parcours positif sur la courbe C , S_k étant un point intérieur quelconque de l'arc λ_k . Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ traçons par le point B_k une demi-droite l_k , orientée, tangente à C (fig. 2) et telle que son orientation soit celle du vecteur tangent à la courbe C au point B_k et que son sommet soit le point B_k . (Ici et dans la suite, le sens positif du vecteur tangent à C sera considéré

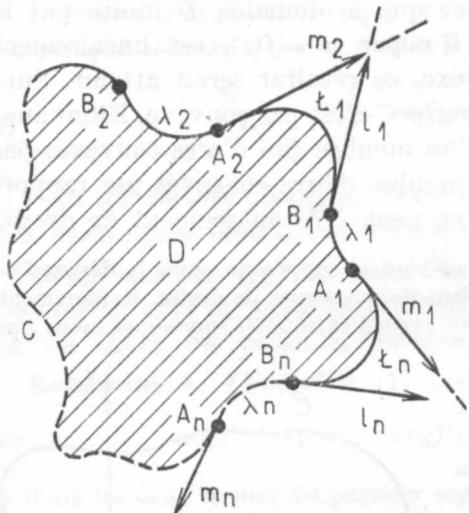


Figure 2

comme celui du sens de parcours positif sur la courbe C). De façon analogue nous désignerons par m_k les demi-droites orientées correspondant aux points A_k , $k = 1, 2, \dots, n$ (fig. 2), mais de sens opposé à celui du vecteur tangent correspondant au point A_k . Plus précisément, nous entendrons ici par sens d'une demi-droite celui d'un vecteur quelconque, dont l'origine est le sommet de la demi-droite et l'extrémité est un point de celle-ci. Pour plus de netteté, nous avons écarté sur la fig. 2 le cas où les demi-droites l_k ou m_k coupent la courbe C en dehors des points A_k et B_k , $k = 1, 2, \dots, n$.

Remarque 2. On voit immédiatement que si l'on décrit la courbe C dans le sens positif du point B_k au point A_{k+1} (en suivant l'arc L_k), le vecteur tangent T tourne dans le sens positif ($k = 1, 2, \dots, n$, $A_{k+1} = A_1$). De

façon analogue, sur les arcs le vecteur tangent tourne dans le sens négatif lorsque le point de contact se déplace sur la courbe C dans le sens positif.

En effet, lorsque θ augmente de sorte que $f(re^{i\theta}) \in L_k$, le point $f(re^{i\theta})$ décrit dans le sens positif un domaine A_k convexe, limité par l'arc L_k et par un segment de droite d'extrémités B_k, A_{k+1} , contenant certains points du domaine D . Donc $\arg T(r, \theta) = P(r, \theta) + \pi/2$, que nous désignerons par $\arg T(\theta)$, augmente sur l'arc L_k . On établit de façon analogue la remarque précédente dans le cas où, au lieu des arcs L_k , on considère les arcs λ_k .

Il est évident que tout couple de demi-droites $m_k, l_k, k = 1, 2, \dots, n$, forme un système de demi-droites sans points communs; sinon, en parcourant la courbe C dans le sens positif, du point A_k au point B_k , nous décrivons l'arc λ_k , donc le vecteur $T(\theta)$ tournera constamment dans le sens négatif (remarque 2); le sens de ce vecteur étant d'abord le sens opposé à celui de la demi-droite m_k et finalement celui de la demi-droite l_k , son argument diminuera donc d'une quantité supérieure à π , ce qui est impossible, puisque la courbe C est la transformée de la circonférence $|z| = r$ par la fonction $f(z) \in K$ (cf. interprétation géométrique, [3], p. 132). Comme $\arg T(\theta) = \arg f'(re^{i\theta}) + \theta + \pi/2$, où la branche uniforme $\arg f'(z)$ a été déterminée à la p. 19, il résulte de la continuité de la fonction $\arg f'(z)$ dans $|z| < 1$ que $\arg T(\theta)$ est une fonction continue, définie dans l'intervalle $-\infty < \theta < +\infty$. On a en outre

$$(4) \quad \arg T(\theta + 2\pi) - \arg T(\theta) = 2\pi.$$

Soit θ_0 un nombre de l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ tel que $f(re^{i\theta_0}) = A_1$. Si l'argument θ parcourt l'intervalle $\langle \theta_0, \theta_0 + 2\pi \rangle$ en augmentant, $f(re^{i\theta})$ décrit la courbe C exactement une fois dans le sens positif à partir du point A_1 . Les valeurs des paramètres de l'intervalle $\langle \theta_0, \theta_0 + 2\pi \rangle$, correspondant par la transformation $f(re^{i\theta})$ aux points A_1, A_2, \dots, A_{n+1} ($A_1 = A_{n+1}$) et aux points B_1, B_2, \dots, B_n (dont il a été question à la p. 20), sont les zéros de la dérivée:

$$\partial \arg T(\theta) / \partial \theta = 1 + \operatorname{Re} \{re^{i\theta} f''(re^{i\theta}) / f'(re^{i\theta})\}.$$

Cela résulte du fait que les points $A_k, B_k, k = 1, 2, \dots, n$, sont des points d'inflexion de la courbe C . Soit θ^* un nombre de l'intervalle $\langle \theta_0, \theta_0 + 2\pi \rangle$, tel que $\arg T(\theta)$ admette dans cet intervalle sa valeur maxima. Avec (4) on a: $\arg T(\theta_0 + 2\pi) > \arg T(\theta_0)$, donc $\theta_0 < \theta^* \leq \theta_0 + 2\pi$. Comme les points θ_0 et $\theta_0 + 2\pi$ correspondent géométriquement, dans la transformation $f(re^{i\theta})$, au point A_1 et que la dérivée à gauche de la fonction $\arg T(\theta)$ s'annule au point $\theta_0 + 2\pi$ et sa dérivée s'annule aux points de l'intervalle $\langle \theta_0, \theta_0 + 2\pi \rangle$ qui correspondent aux points A_1, \dots, A_n ;

B_1, \dots, B_n , le transformé du point $re^{i\theta^*}$ par la fonction $f(z)$ est un des points A_1, A_2, \dots, A_n . Dans l'intervalle $\langle \theta^*, \theta^* + 2\pi \rangle$ $\arg T(\theta)$ admet sa valeur maxima pour $\theta = \theta^* + 2\pi$. En effet, soit $\theta \in \langle \theta^*, \theta^* + 2\pi \rangle$. Nous allons distinguer deux cas:

1) $\theta^* \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$. Alors $\arg T(\theta^* + 2\pi) = \arg T(\theta^*) + 2\pi > \arg T(\theta)$, car $\langle \theta^*, \theta_0 + 2\pi \rangle$ est la partie de l'intervalle $\langle \theta_0, \theta_0 + 2\pi \rangle$ dans laquelle $\arg T(\theta)$ admet sa valeur maxima pour $\theta = \theta^*$.

2) $\theta_0 + 2\pi \leq \theta < \theta^* + 2\pi$. Alors $\theta_0 \leq \theta - 2\pi < \theta^*$, donc, d'après la définition de θ^* , on a $\arg T(\theta^*) \geq \arg T(\theta - 2\pi)$ et, avec (4), $\arg T(\theta^* + 2\pi) \geq \arg T(\theta)$, c. q. f. d.

Posant $\varphi(z) = e^{-i\theta^*} f(ze^{i\theta^*})$ nous avons: $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$. Comme la définition de $\varphi(z)$ entraîne l'égalité:

$$1 + z\varphi''(z)/\varphi'(z) = 1 + ze^{i\theta^*} f''(ze^{i\theta^*})/f'(ze^{i\theta^*})$$

il résulte du raisonnement du n° 4 (p. 18) que $\varphi(z) \in K$. Introduisons provisoirement la notation: $\arg T_\varphi(\theta) = \arg \varphi'(re^{i\theta}) + \theta + \pi/2$. Nous aurons alors:

$$\arg T_\varphi(\theta) = \arg f'(re^{i(\theta+\theta^*)}) + \theta + \pi/2 = \arg T(\theta + \theta^*) - \theta^*,$$

d'où résulte que $\arg T_\varphi(\theta)$ admet dans l'intervalle $\langle 0, 2\pi \rangle$ son maximum pour $\theta = 2\pi$, puisque $\arg T(\theta)$ admet, comme nous l'avons vu, dans l'intervalle $\langle \theta^*, \theta^* + 2\pi \rangle$ son maximum pour $\theta = \theta^* + 2\pi$. La courbe C_φ , transformée de la circonférence $|z| = r$ par la fonction $w = \varphi(z)$, a été engendrée, en langage géométrique, par une rotation d'angle $(-\theta^*)$ de la courbe C autour du point $w = 0$. Comme pour $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$ on a: $\arg T_\varphi(\theta) = \arg T(\theta + \theta^*) - \theta^*$, il vient:

$$(5) \quad \partial \arg T_\varphi(\theta) / \partial \theta = \partial \arg T(\theta + \theta^*) / \partial (\theta + \theta^*).$$

Si donc, dans la rotation d'angle $(-\theta^*)$ de la courbe C , aux points A_1, A_2, \dots, A_n correspondent sur C_φ les points A'_1, A'_2, \dots, A'_n et aux points B_1, \dots, B_n correspondent les points B'_1, B'_2, \dots, B'_n , il résulte de (5) que la fonction $\arg T_\varphi(\theta)$ admet dans l'intervalle $\langle 0, 2\pi \rangle$ ses maxima ou ses minima aux points qui correspondent dans la transformation $f(z)$ aux points A'_1, A'_2, \dots, A'_n ou aux points B'_1, B'_2, \dots, B'_n . Donc $\arg T_\varphi(2\pi)$ est la valeur maxima que puisse admettre la fonction $\arg T_\varphi(\theta)$ dans l'intervalle $\langle 0, 2\pi \rangle$, le transformé du point $re^{2\pi i} = r$ par la fonction $\varphi(z)$ étant un des points A'_1, A'_2, \dots, A'_n . D'après les considérations précédentes on peut admettre que la fonction $f(z) \in K$, introduite au début du chapitre 1, a la propriété

$$(6) \quad \arg T(\theta) \leq \arg T(2\pi) \quad \text{pour} \quad \theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

et que $f(r)$ représente un des points A_1, A_2, \dots, A_n , soit A_1 , sinon, il suffirait de changer le numérotage des points. Pour simplifier l'écriture, nous introduirons encore la notation:

$$(7) \quad f(r) = A_1.$$

Chapitre 2.

Nous établirons maintenant plusieurs lemmes.

Lemme 1. *Désignons par l une demi-droite orientée de sommet A et soit B un point intérieur de celle-ci. Appelons demi-plan négatif de la demi-droite l celui des deux demi-plans, que détermine une droite passant par l , qui est situé à droite d'un observateur qui se meut sur la demi-droite dans le sens direct (fig. 3). Désignons par C_0 un arc simple de classe $C^{(1)}$, dont le point B est l'origine et le point A l'extrémité, et supposons que l'arc C_0 n'ait pas d'autres points communs avec la demi-droite l . Le sens positif du vecteur tangent sera celui de l'arc C_0 . Soit $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, l'équation de cet arc. Supposons de plus que le sens du vecteur tangent à C_0 au point A soit opposé à celui de la demi-droite l et que les points de l'arc C_0 qui correspondent aux intervalles $a \leq t \leq a + \varepsilon$, $b - \varepsilon \leq t \leq b$, $0 < \varepsilon \leq (b - a)/2$, soient contenus, pour ε assez petit, dans le demi-plan négatif de la demi-droite l . Désignons par α , $0 \leq \alpha \leq \pi$, la valeur absolue de l'angle entre la direction de la demi-droite l et celle du vecteur tangent à l'arc C_0 au point B . Dans ces conditions, on a, en désignant par T_A et T_B les vecteurs tangents à C_0 aux points A et B ; $\arg T_B \geq \arg T_A$, l'égalité n'ayant lieu que si $\alpha = \pi$.*

Démonstration. Nous dirons, plus exactement, que $\arg T_B$ désigne la valeur de l'angle φ , $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, que fait le vecteur T_B avec le sens positif de l'axe réel. Si l'on désigne par $T(t)$ le vecteur tangent à C_0 au point $z = z(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, alors, en s'appuyant sur l'hypothèse que l'arc C_0 est simple et sur la définition $\arg T_B = \arg T(a)$, on voit que $\arg T(t)$ est une fonction bien déterminée (uniforme) dans l'intervalle $\langle a, b \rangle$. Par hypothèse, l'arc C_0 et le segment AB forment conjointement le bord d'un domaine simplement connexe borné Ω (fig. 3).

Il résulte de la définition qu'en décrivant l'arc C_0 à partir du point B et en décrivant le segment AB de A à B , nous déterminons pour le domaine Ω un sens de parcours négatif. Le contour de ce domaine est une courbe fermée de Jordan. Si l'on décrit le domaine Ω dans le sens négatif, l'argument du vecteur tangent augmente de $(-\pi)$ au point A , de $(-\alpha)$ au point B . Si l'on décrit tout le contour du domaine Ω une fois dans

le sens négatif, l'argument diminue de 2π , nous avons donc: $\arg T_B - 2\pi + + a + \pi = \arg T_A$, d'où $\arg T_B - \pi + a = \arg T_A$, c'est-à-dire $\arg T_B = \arg T_A + \pi - a$. Avec l'hypothèse $0 \leq a \leq \pi$, cette égalité achève la démonstration du lemme 1.

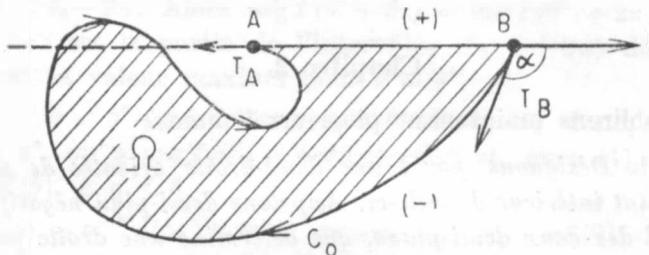


Figure 3

Lemme 2. Soit l une demi-droite orientée de sommet A et soit B un point intérieur de celle-ci. Appelons demi-plan positif de la demi-droite l celui des deux demi-plans, déterminés par la droite contenant l , qui est à gauche d'un observateur parcourant la demi-droite dans le sens positif (fig. 4). Désignons par C_0 un arc simple de classe $C^{(1)}$, dont A est l'origine et B l'extrémité, et supposons que l'arc C_0 n'ait pas d'autres points communs avec la demi-droite l . Comme sens direct du vecteur tangent nous choisirons celui de l'arc C_0 . Soit $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, l'équations de cet arc ($z(a) = A$, $z(b) = B$). Admettons de plus que le sens du vecteur tangent à C_0 au point A soit opposé à celui de la demi-droite l et que les points de l'arc C_0 , qui correspondent aux intervalles $a < t \leq a + \varepsilon$, $b - \varepsilon \leq t < b$, appartiennent pour $\varepsilon > 0$ assez petit au demi-plan positif de la demi-droite l . Désignons par α , $0 \leq \alpha \leq \pi$, la valeur absolue de l'angle entre le sens de la demi-droite l et celui du vecteur tangent à l'arc C_0 au point B . Dans ces conditions, on a, en notant T_A et T_B les vecteurs tangents à C_0 aux points A et B : $\arg T_A \geq \arg T_B + \pi$, l'égalité n'ayant lieu que si $\alpha = \pi$. Ici, $\arg T_A$ désigne la valeur de l'angle φ , $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, entre le vecteur T_A et le sens positif de l'axe réel.

Démonstration. De même que dans la démonstration du lemme 1, le domaine Ω , limité par l'arc C_0 et le segment AB , est décrit dans le sens négatif lorsqu'un point variable décrit l'arc C_0 de A à B et le segment BA (fig. 4).

Si l'on décrit le domaine Ω dans le sens négatif, exactement une fois, à partir du point A , l'argument de T_A augmente de -2π . Donc $\arg T_B - a = \arg T_A - 2\pi$, d'où résulte: $\arg T_A = \arg T_B + \pi + (\pi - a)$; comme $0 \leq a \leq \pi$, le lemme 2 est ainsi prouvé.

Considérons maintenant la demi-droite m_1 (les demi-droites m_1, m_2, \dots, m_n ont été définies à la p. 20). Nous allons prouver:

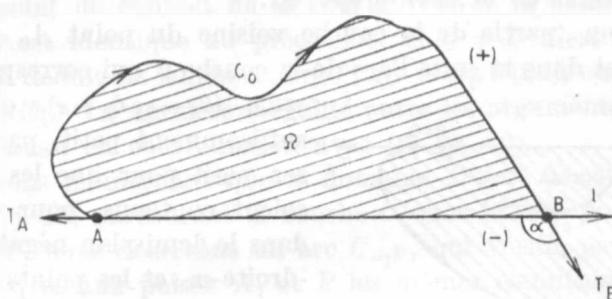


Figure 4

Lemme 3. La demi-droite m_1 a avec la courbe C un seul point commun, son sommet A_1 .

Démonstration. Supposons, pour la démonstration par l'absurde, qu'il y ait, outre le sommet A_1 , d'autres points d'intersection de la demi-droite m_1 et de C . Désignons par P (fig. 5) le premier de ces points; cela veut dire que les points $f(re^{i\theta})$ de la courbe C n'appartiennent pas à m_1 pour $\theta \in (0, \theta_P)$, $0 < \theta_P < 2\pi$, où θ_P est une valeur du paramètre telle que $P = f(r \exp i\theta_P) \in m_1$. Désignons encore par $C_{A_1 P}$ l'arc partiel de la courbe C que décrit un point se déplaçant sur cette courbe dans le sens positif, du point A_1 au point P . Nous obtenons ainsi un domaine simplement connexe Ω , borné, dont le bord est formé de l'arc $C_{A_1 P}$ et du segment $A_1 P$. Deux cas peuvent se présenter; en parcourant le bord du domaine Ω de manière que l'arc $C_{A_1 P}$ soit décrit du point A_1 au point P et que le segment $A_1 P$ soit décrit du point P au point A_1 , nous déterminons sur le bord du domaine Ω un sens de parcours positif ou négatif. Nous allons examiner ces cas séparément:

1) Supposons que le domaine Ω soit décrit, de la manière indiquée, dans le sens positif (fig. 5). De la définition des demi-droites m_k il s'ensuit que la partie de la courbe C voisine du point A_k , passe par le point

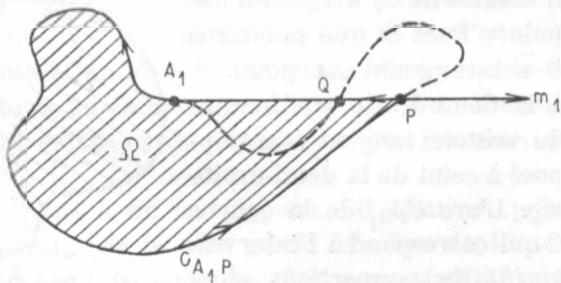


Figure 5

A_k , où elle est tangente à C , du demi-plan négatif au demi-plan positif de la demi-droite m_k et le sens du vecteur tangent à la courbe C au point A_k est opposé à celui de la demi-droite m_k .

L'expression „partie de la courbe voisine du point $A_k = f(r \exp i\theta_k)$ ” désignera ici et dans la suite l'arc de la courbe C qui correspond à l'intervalle $(\theta_k - \varepsilon, \theta_k + \varepsilon)$, où $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, par exemple assez petit pour que les points $f(re^{i\theta})$ soient contenus, pour $\theta \in (\theta_k - \varepsilon, \theta_k)$, dans le demi-plan négatif de la demi-droite m_k et les points $f(re^{i\theta})$ appartiennent, pour $\theta \in (\theta_k, \theta_k + \varepsilon)$, au demi-plan positif de cette droite.

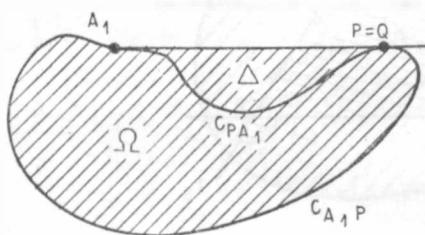


Figure 6

Pour des valeurs du paramètre θ inférieures à 2π et différentant peu de 2π , une partie de la courbe C appartient à l'intérieur du domaine Ω . En faisant varier continuement la paramètre θ de 2π à θ_P , nous décrivons un arc de la courbe C , à partir du point $A_{n+1} = A_1$ jusqu'au point P . Comme C n'a pas de points multiples, en décrivant C dans le sens rétrograde, du point $A_1 = A_{n+1}$ au point P , nous devrons nécessairement tomber pour la première fois sur le point d'intersection Q de l'arc C_{PA_1} avec le segment A_1P , où C_{PA_1} désigne la partie de la courbe C qui correspond à l'intervalle $(\theta_P, 2\pi)$ dans la transformation $w = f(re^{i\theta})$. Si $P = Q$, il résulte de la définition des points P et Q que la courbe C est tangente au point P à la demi-droite m_1 , le sens du vecteur tangent étant opposé à celui de la demi-droite m_1 . L'arc C_{PA_1} de la courbe C qui correspond à l'intervalle $(\theta_P, 2\pi)$ appartient alors à l'intérieur de Ω (fig. 6). L'arc C_{PA_1} avec le segment

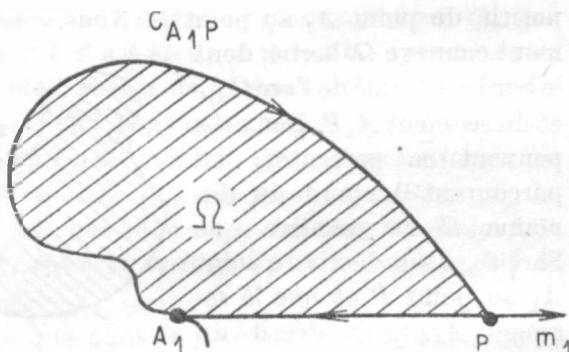


Figure 7

A_1P limitent un domaine \mathcal{A} borné et simplement connexe. En appliquant le lemme 1 (p. 23) à l'arc C_{PA_1} et à la demi-droite m_1 pour $\alpha = \pi$, nous obtenons immédiatement: $\arg T(\theta_P) \geq \arg T(2\pi)$. Comme la courbe C est tangente à la demi-droite m_1 au point P , situé sur un arc \mathcal{L}_s , il existe un $\bar{\theta}$, $\theta_P < \bar{\theta} < 2\pi$, tel que $\arg T(\bar{\theta}) >$

$> \arg T(\theta_P) \geq \arg T(2\pi)$, ce qui est en contradiction avec (6) (p. 22).

Si $Q \neq P$, Q est un point intérieur du segment A_1P et, dans le cas où Q est le point de contact de la courbe C avec la demi-droite m_1 , le raisonnement est identique au précédent. Si $Q \neq P$ n'est pas un point de contact, on déduit du lemme 1: $\arg T(\theta_Q) > \arg T(2\pi)$, où $\theta_P < \theta_Q < 2\pi$ et $Q = f(r \exp i\theta_Q)$. La dernière inégalité entre les arguments des vecteurs tangents est aussi en contradiction avec (6) (p. 22).

2) Supposons maintenant que le domaine Ω soit décrit dans le sens négatif (fig. 7). En parcourant la courbe C dans le sens positif, du point A_1 au point P , nous décrivons un arc C_{A_1P} , qui vérifie par rapport à la demi-droite m_1 et aux points A_1 et P les mêmes conditions que l'arc C_0 dans le lemme 2. De celui-ci on déduit: $\arg T(0) \geq \arg T(\theta_P) + \pi$, donc le vecteur $T(\theta)$, en variant continuement sur l'arc C_{A_1P} , a tourné dans le sens négatif d'un angle au moins égal à π , en contradiction avec l'hypothèse que la fonction $f(z)$ est presque convexe (cf. interprétation géométrique, [3], p. 132). Considérée du point de vue analytique, l'inégalité $\arg T(0) \geq \arg T(\theta_P) + \pi$ est en contradiction avec (3). Le lemme 3 est ainsi complètement démontré.

Chapitre 3.

Dans un voisinage droit du point $\theta = 0$, $\arg T(\theta)$ décroît car si θ est suffisamment petit, aux points $r \exp i\theta$, $\theta > 0$, correspondent par la fonction $f(z)$ les points $f(r \exp i\theta)$ qui décrivent l'arc λ_1 , ou une partie de celui-ci (remarque 2, p. 20). Désignons par φ_{n_1} le plus grand nombre possible de l'intervalle $(0, 2\pi)$ tel que pour $0 < \theta \leq \varphi_{n_1}$ on ait $\arg T(\theta) \leq \arg T(0)$. En vertu de la remarque précédente et en s'appuyant sur le fait que la fonction continue $\arg T(\theta)$ augmente de 2π dans l'intervalle $\langle 0, 2\pi \rangle$, on constate aisément qu'un tel nombre φ_{n_1} existe et que $0 < \varphi_{n_1} < 2\pi$. De plus, on a $\arg T(\varphi_{n_1}) = \arg T(0)$.

Le point $f(r \exp i\varphi_{n_1})$ appartient à un arc λ_k , car s'il était un point intérieur d'un arc λ_k , φ_{n_1} ne serait pas le plus grand nombre de l'intervalle $(0, 2\pi)$ tel que $\arg T(\theta) = \arg T(0)$ pour $0 < \theta \leq \varphi_{n_1}$; en effet, pour θ arbitrairement peu supérieur à φ_{n_1} , l'argument du vecteur $T(\theta)$ serait inférieur à $\arg T(0)$ (remarque 2, p. 20). Pour la même raison $f(r \exp i\varphi_{n_1})$ ne peut être aucun des points A_1, A_2, \dots, A_n .

Il faut encore prouver que $f(r \exp i\varphi_{n_1})$ ne représente aucun des points B_1, B_2, \dots, B_n considérés à la p. 20. En effet, supposons que $f(r \exp i\varphi_{n_1}) = B_k$. Le point A_k , comme origine de l'arc λ_k , „précède” le point B_k par rapport au sens positif de la courbe C . Soit θ_k , $0 \leq \theta_k < \varphi_{n_1}$, un nombre

tel que $A_k = f(r \exp i\theta_k)$. Comme $\arg T(0)$ décroît sur λ_k lorsque θ augmente, on a: $\arg T(\varphi_{n_1}) < \arg T(\theta_k)$. De la définition du nombre φ_{n_1} il s'ensuit que $\arg T(\theta_k) \leq \arg T(0)$, d'où $\arg T(\varphi_{n_1}) < \arg T(0)$, en contradiction avec la définition du nombre φ_{n_1} . Il existe donc, à l'intérieur d'un arc L_k , dont l'extrémité est le point A_{n_1} , un point $A_{n_1}^*$ tel que $f(r \exp i\varphi_{n_1}) = A_{n_1}^*$. Si le point de contact décrit la courbe C dans le sens positif, du point $A_{n_1}^*$ du point A_{n_1} (A_{n_1} est l'extrémité de l'arc L_{n_1-1} , $A_{n_1} = f(r \exp i\theta_{n_1})$, $\theta_{n_1} > \varphi_{n_1}$), l'argument du vecteur tangent à la courbe C augmentera constamment (remarque 2, p. 20) jusqu'au point où il admettra la valeur $\arg T(\theta_{n_1}) > \arg T(0)$. On sait, d'après (6), p. 22, que $\arg T(\theta_{n_k}) \leq \arg T(2\pi)$. Si le point A_{n_1} n'est pas confondu avec le point $A_1 = A_{n+1} = f(re^{2\pi i})$ et si $\arg T(\theta_{n_k}) < \arg T(2\pi)$, alors, le point A_{n_1} étant l'origine de l'arc λ_{n_1} , il existe encore dans l'intervalle $(\theta_{n_1}, 2\pi)$ un nombre φ_{n_2} , le plus grand possible, tel que pour $\theta \in \langle \theta_{n_1}, \varphi_{n_2} \rangle$ on a $\arg T(\theta) \leq \arg T(\theta_{n_1})$ et $\arg T(\varphi_{n_2}) = \arg T(\theta_{n_1})$. Au point $r \exp i\varphi_{n_2}$ correspond le point $A_{n_2}^* = f(r \exp i\varphi_{n_2})$, appartenant à un arc L_{n_2-1} , $n_2 > n_1$. En déplaçant le vecteur tangent le long de la courbe C dans le sens positif, du point $A_{n_2}^*$ au point $A_{n_2} = f(r \exp i\theta_{n_2})$, on voit que son argument augmentera constamment et prendra finalement la valeur $\arg T(\theta_{n_2})$. Si l'on a encore $A_{n_2} \neq A_{n+1} = A_1 = f(re^{2\pi i})$ et $\arg T(\theta_{n_2}) < \arg T(2\pi)$ le raisonnement peut être répété et l'on obtient le système de nombres

$$(8) \quad 0 < \varphi_{n_1} < \theta_{n_1} < \varphi_{n_2} < \theta_{n_2} < \dots < \varphi_{n_s} < \theta_{n_s} \leq 2\pi,$$

où la définition des nombres $\varphi_{n_3}, \varphi_{n_4}, \dots$ est analogue à celle de $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}$ et $A_{n_k} = f(r \exp i\theta_{n_k})$, $k = 1, 2, \dots, s$. De cette définition on déduit

$$(9) \quad \arg T(0) = \arg T(\varphi_{n_1}) < \arg T(\theta_{n_1}) < \dots < \arg T(\theta_{n_s}) \leq \arg T(2\pi).$$

Le dernier membre de l'inégalité (9) résulte de (6) (p. 22).

Remarque 3. Comme le nombre des points A_1, A_2, \dots, A_n est fini et que, en définissant le point $A_{n_{k+1}}$, nous avons admis $A_{n_k} \neq A_{n+1} = f(re^{2\pi i})$ et $\arg T(\theta_{n_k}) < \arg T(2\pi)$ et comme, d'autre part, $\arg T(\theta_{n_k}) \leq \arg T(2\pi)$ en vertu de (6), p. 22, le dernier point que nous avons construit, c'est-à-dire le point $A_{n_s} = f(r \exp i\theta_s)$, est tel que l'on a soit $A_{n_s} = A_1 = A_{n+1} = f(re^{2\pi i})$, soit $A_{n_s} \neq A_{n+1} = A_1$, mais alors nécessairement $\arg T(\theta_{n_s}) = \arg T(2\pi)$.

On a aussi

$$(10) \quad \arg T(\theta) \leq \arg T(\theta_{n_k}) \text{ pour } \theta \in \langle \theta_{n_k}, \varphi_{n_{k+1}} \rangle, \quad k = 0, 1, \dots, s; \quad \theta_{n_0} = 0,$$

$$10') \quad \arg T(\theta_{n_k}) = \arg T(\varphi_{n_{k+1}}).$$

De (9) et (10) on déduit immédiatement:

$$(11) \quad \arg T(\theta) \leq \arg T(\theta_{n_k}) \text{ pour } \theta \in \langle 0, \varphi_{n_{k+1}} \rangle, \quad k = 0, 1, \dots, s; \quad \theta_{n_0} = 0,$$

$$(11') \quad \arg T(\theta) < \arg T(\theta_{n_k}) \text{ pour } \theta \in \langle 0, \theta_{n_k} \rangle, \quad k = 1, 2, \dots, s.$$

Lemme 4. *Toute demi-droite m_{n_k} , $k = 1, 2, \dots, s$ a avec la courbe C un seul point commun, notamment son sommet A_{n_k} .*

Démonstration. Supposons, pour la démonstration par l'absurde, que la demi-droite m_{n_k} ait, outre le point A_{n_k} , d'autres points communs avec la courbe C . En parcourant la courbe C dans le sens positif à partir du point A_{n_k} , nous tomberons donc pour la première fois sur un point P de la demi-droite m_{n_k} . Soit $P = f(r \exp i\theta_P)$, $\theta_{n_k} < \theta_P < \theta_{n_k} + 2\pi$. Désignons par Ω le domaine borné, simplement connexe, dont le bord est formé par le segment $A_{n_k}P$ et l'arc $C_{A_{n_k}}P$ de la courbe C , correspondant à l'intervalle $\langle \theta_{n_k}, \theta_P \rangle$. Nous allons considérer plusieurs cas.

I. Un point parcourant l'arc $C_{A_{n_k}}P$ dans le sens positif de la courbe C et le segment PA_{n_k} décrit le domaine Ω dans le sens positif (fig. 8).

Remarque 4. *De la définition du domaine Ω et des demi-droites m_{n_k} il s'ensuit que la partie de la courbe C qui correspond aux paramètres $\theta \in (\theta^*, \theta_{n_k} + 2\pi)$, $\theta^* < \theta_{n_k} + 2\pi$, appartient, pour les θ^* qui diffèrent suffisamment peu de $\theta_{n_k} + 2\pi$, à l'intérieur du domaine Ω .*

En parcourant la courbe C dans le sens négatif, du point A_{n_k} au point Q , qui est situé sur le segment $A_{n_k}P$ et qui est le premier point d'intersection (évidemment distinct de A_{n_k}) avec la demi-droite m_{n_k} , on a: ou bien $P = Q$, ou bien Q est un point intérieur du segment $A_{n_k}P$. Soit $Q = f(r \exp i\theta_Q)$, où $\theta_P \leq \theta_Q < \theta_{n_k} + 2\pi$. Nous distinguerons encore deux cas:

a) Supposons que le point A_1 soit situé sur un arc ouvert $C_{Q, A_{n_k}}$, cet arc étant la partie de la courbe C qui correspond à l'intervalle $(\theta_Q, \theta_{n_k} + 2\pi)$. Par définition du nombre θ_Q , l'arc $C_{Q, A_{n_k}}$ appartient, sauf ses extrémités, A_{n_k} et Q , à l'intérieur du domaine Ω . En effet, il résulte de la remarque (4) à la p. 29 que la partie de l'arc C qui correspond à l'intervalle appar-

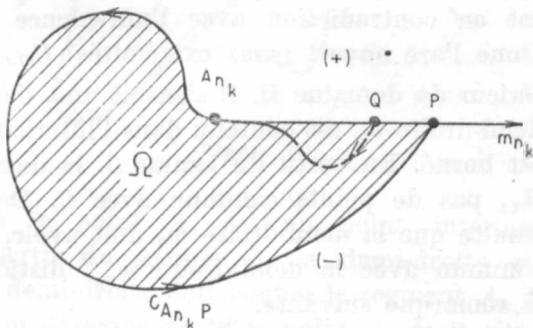


Figure 8

tient à l'intérieur du domaine Ω (θ^* a été défini dans l'énoncé de cette remarque). Supposons que la partie restante de cet arc, correspondant à l'intervalle (θ_Q, θ^*) , ne soit pas entièrement contenue dans Ω . Il existe donc un point $S = f(r \exp i\theta_S)$, $\theta_Q < \theta_S \leq \theta^*$, appartenant au bord du domaine Ω . Le point S ne peut être situé sur le segment $A_{n_k}P$, car cela serait en contradiction avec la définition du nombre θ_Q . Donc S appartient à l'arc $C_{A_{n_k}}P$ de la courbe C , définie à la p. 29. Par conséquent il existe un nombre $\theta_c \in (\theta_{n_k}, \theta_P)$ tel que $f(r \exp i\theta_S) = f(r \exp i\theta_c)$. Cette égalité, rapprochée de la relation $\theta_{n_k} \leq \theta_S \leq \theta_P \leq \theta_Q < \theta^* < \theta_{n_k} + 2\pi$, est en contradiction avec l'univalence de la représentation $w = f(z)$. Donc l'arc ouvert (sans extrémités) $C_{Q, A_{n_k}}$ appartient tout entier à l'intérieur du domaine Ω . Il s'ensuit que, dans le cas a), le sommet A_1 de la demi-droite m_1 est contenu dans l'intérieur du domaine Ω . Le domaine Ω est borné. En vertu du lemme 3, la demi-droite m_1 n'a, sauf le sommet A_1 , pas de points commun avec C . Des considérations précédentes il résulte que la demi-droite m_1 doit avoir, sur le segment $A_{n_k}P$, un point commun avec la demi-droite m_{n_k} , distinct de A_1 . Nous ferons encore la remarque suivante.

Remarque 5. Il résulte de la définition du domaine Ω que les points du demi-plan négatif de la demi-droite m_{n_k} , suffisamment proches d'un

point quelconque fixé du segment ouvert $A_{n_k}P$, appartiennent à l'intérieur du domaine Ω .

Dans le cas a), le point A_1 ne peut être contenu dans le demi-plan positif de la demi-droite m_{n_k} . En effet, supposons le contraire et désignons par R le point d'intersection des demi-droites m_{n_k} et m_1 . En vertu du lemme 3, p. 25, on a $R \neq A_{n_k}$ et $R \neq P$, d'où, en s'appuyant sur les considérations qui précèdent la remarque

5, p. 30, on conclut que R est un point intérieur du segment $A_{n_k}P$. De la remarque 5 il s'ensuit que les points du demi-plan négatif de la demi-droite m_{n_k} , situés sur la demi-droite m_1 et suffisamment proches du point R , sont des points intérieurs du domaine Ω . La demi-droite obtenue de la demi-droite m_1 enlevant le segment A_1R^* , où R^* est un point de la demi-droite m_1 appartenant au

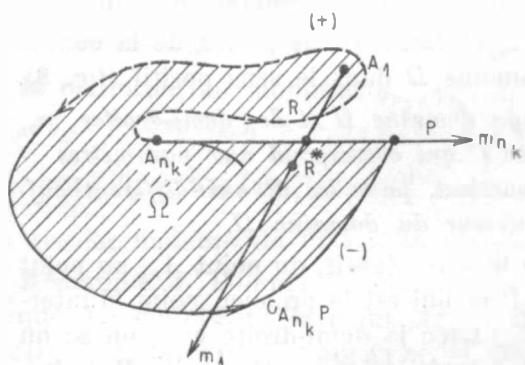


Figure 9

au demi-plan négatif de la demi-droite m_1 et suffisamment proche du point R , a son sommet dans l'intérieur du domaine Ω (fig. 9). Cette demi-droite ne coupe pas le segment $A_{n_k}P$, donc elle doit couper le bord du domaine Ω , c'est-à-dire aussi la courbe C . Il en résulte que la demi-droite m_1 a, outre le point A_1 , un autre point commun avec la courbe C , en contradiction avec le lemme 3, p. 25. Nous en concluons que, dans le cas a), le point A_1 ne peut être situé dans le demi-plan positif de la demi-droite m_{n_k} .

Le point A_1 ne peut non plus être situé sur la droite dont la demi-droite m_{n_k} est une partie. En effet, puisque le point A_1 est un point intérieur du domaine Ω et que, en vertu du lemme 3, la demi-droite m_1 ne coupe pas la courbe C , cette demi-droite doit couper le segment $A_{n_k}P$ qui est une partie du contour du domaine Ω . Si le point A_1 était situé sur la droite, dont la demi-droite m_{n_k} est une partie le segment $A_{n_k}P$ serait une partie de la demi-droite m_1 . Les points A_{n_k} et P seraient donc situés sur m_1 , ceci est aussi en contradiction avec le lemme 3, puisque $A_{n_k} \neq A_1$ et $P \neq A_1$. Il résulte de nos considérations que, dans le cas a), le point A_1 doit être situé dans le demi-plan négatif de la demi-droite m_{n_k} .

Le lemme 3, la définition de l'arc $C_{Q, A_{n_k}}$ et l'hypothèse que A_1 est un point intérieur de l'arc $C_{Q, A_{n_k}}$ permettent de conclure que l'arc $\widehat{A_{n_k} A_1}$, appartenant à $C_{Q, A_{n_k}}$, n'a, sauf A_{n_k} et A_1 , pas de points communs avec les demi-droites m_{n_k} et m_1 (fig. 10). Soit O le point d'intersection des demi-droites m_{n_k} et m_1 . Considérons le domaine Δ limité par l'arc $C_{A_1 A_{n_k}}$, correspondant à l'intervalle $[2\pi, \theta_{n_k} + 2\pi]$, par le segment $A_{n_k}O$ et le segment A_1O . C'est un domaine simplement connexe. En s'appuyant sur le lemme 1, où il faut remplacer l'arc C_0 qui y intervient par la somme, au sens de la théorie des ensembles, de l'arc $C_{A_1 A_{n_k}}$ et du segment OA_1 , on a $\arg T_{A_1} \geq \arg T_{A_{n_k}}$, donc $\arg T(O + 2\pi) \geq \arg T(\theta_{n_k} + 2\pi)$, d'où on tire $\arg T(0) \geq \arg T(\theta_{n_k})$. La dernière inégalité est en contradiction avec (9), p. 28. Le lemme 4 est donc démontré dans le cas I a).

β) Supposons maintenant que le point A_1 ne soit pas un point intérieur de l'arc $C_{Q, A_{n_k}}$. Comme $A_1 \neq A_{n_k}$, on a: $2\pi \leq \theta_Q < \theta_{n_k} + 2\pi$. En

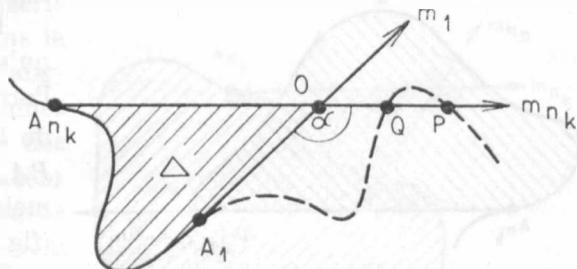


Figure 10

appliquant le lemme 1 à l'arc $C_{A_{n_k}P}$ et au segment QA_{n_k} , on obtient: $\arg T(\theta_Q) \geq \arg T(\theta_{n_k} + 2\pi)$, donc $\arg T(\theta_Q - 2\pi) \geq \arg T(\theta_{n_k})$, en contradiction avec (11'), p. 29, puisque $0 \leq \theta_Q - 2\pi < \theta_{n_k}$, c'est-à-dire $(\theta_Q - 2\pi) \subset \langle 0, \theta_{n_k} \rangle$.

Le lemme 4 est ainsi démontré dans le cas I β .

II. Supposons maintenant qu'un point, parcourant d'abord l'arc $C_{A_{n_k}P}$ dans le sens positif de la courbe C , puis le segment PA_{n_k} , décrit le contour du domaine Ω dans le sens négatif (fig. 11).

En vertu du lemme 2 on a: $\arg T(\theta_P) + \pi \leq \arg T(\theta_{n_k})$, où

$\theta_P > \theta_{n_k}$. Cette inégalité est impossible, puisque la fonction $f(z)$ est presque convexe, et le lemme 4 se trouve ainsi complètement établi. Nous démontrerons encore:

Lemme 5. *Les demi-droites $m_1, m_{n_1}, m_{n_2}, \dots, m_{n_n}$ n'ont pas de points communs.*

Remarque. *Si la demi-droite m_{n_s} coupait la demi-droite m_1 , c'est-à-dire si $\theta_{n_s} = 2\pi$, dans l'énoncé de ce lemme il faudrait omettre la demi-droite m_1 (ou la demi-droite m_{n_s}).*

Démonstration. Supposons que la demi-droite m_{n_k} coupe la demi-droite m_{n_p} , où par exemple $n_k < n_p$ c'est-à-dire $\theta_{n_k} < \theta_{n_p}$. Considérons trois cas:

a) Le point A_{n_p} appartient au demi-plan positif de la demi-droite m_{n_k} (fig. 12). Désignons par $C_{A_{n_k}A_{n_p}}$ la partie de la courbe C qui correspond, dans la transformation $w = f(r \exp i\theta)$, à l'intervalle $\langle \theta_{n_k}, \theta_P \rangle$. L'arc $C_{A_{n_k}A_{n_p}}$

n'a (outre ses extrémités) pas de points communs avec les demi-droites m_{n_k} et m_{n_p} . De même qu'à la p. 31 on obtient, en s'appuyant sur le lemme 1: $\arg T(\theta_{n_k}) \geq \arg T(\theta_P)$; comme $\theta_{n_k} < \theta_{n_p}$, il y a contradiction avec (9), p. 28.

b) Le point A_{n_p} appartient au demi-plan négatif de la demi-droite

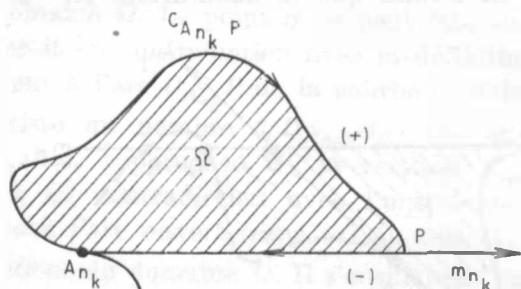


Figure 11

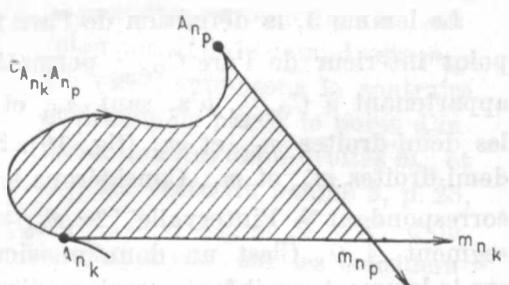


Figure 12

m_{n_k} (fig. 13). Soit O le point d'intersection des demi-droites m_{n_k}, m_{n_p} . Des lemmes 3 et 4 il s'ensuit que l'arc $C_{A_{n_k}A_{n_p}}$ de la courbe C , le segment $A_{n_k}O$ et le segment $A_{n_p}O$ limitent un domaine simplement connexe Δ . Un point parcourant l'arc $C_{A_{n_k}A_{n_p}}$, du point A_{n_k} au point A_{n_p} , et ensuite les segments $A_{n_p}O$ et OA_{n_k} , décrit le contour du domaine Δ dans le sens positif. Désignons par α l'angle adjacent à l'angle, de sommet O , que font les directions des demi-droites m_{n_k} et m_{n_p} . Le sens du vecteur tangent à la courbe C au point A_{n_p} est opposé à celui de la demi-droite m_{n_p} . Déterminons l'argument du vecteur tangent au contour du domaine Δ de telle manière qu'il soit égal, sur l'arc $C_{A_{n_k}A_{n_p}}$, à l'argument du vecteur tangent tel qu'il a été défini sur la courbe C par la transformation $w = f(z)$. Au point A_{n_p} l'argument du vecteur tangent au contour du domaine Δ augmente d'un angle égal à $-\pi$ dans le cas où le contour est décrit dans le sens positif. D'autre part, au point O l'accroissement de cet argument est α . Sur le segment OA_{n_k} l'argument du vecteur tangent est égal à celui du vecteur tangent à C au point A_{n_k} . L'accroissement total de l'argument du vecteur tangent au contour de Δ est: $\arg T(\theta_{n_p}) - \arg T(\theta_{n_k}) - \pi + \alpha$ et, comme le domaine Δ est simplement connexe, cet accroissement est égal à 2π . D'où on obtient: $\arg T(\theta_{n_p}) - \arg T(\theta_{n_k}) = 3\pi - \alpha$, ce qui donne, avec $0 < \alpha < \pi$: $\arg T(\theta_{n_p}) > \arg T(\theta_{n_k}) + 2\pi$. D'après (8) et (9) cela entraîne $\arg T(\theta_{n_p}) > \arg T(0) + 2\pi$, c'est-à-dire $\arg T(\theta_{n_p}) > \arg T(2\pi)$. La dernière inégalité est en contradiction avec (6), p. 22, puisque $\theta_{n_p} \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Le lemme 5 est ainsi prouvé dans les cas α et β .

γ) Supposons que le point A_{n_p} soit situé sur le prolongement de la demi-droite m_{n_k} . En vertu du lemme 4 et de la relation $A_{n_p} \neq A_{n_k}$, le point A_{n_p} ne peut être situé sur la demi-droite m_{n_k} . Comme nous l'avons supposé pour la démonstration par l'absurde, les demi-droites m_{n_p} et m_{n_k} se coupent, donc elles ont dans ce cas la même direction et la demi-droite m_{n_k} est même une partie de la demi-droite m_{n_p} . De la construction des demi-droites m_1, m_2, \dots il s'ensuit que le sens de la demi-droite m_k est opposé à celui du vecteur tangent à la courbe C au point A_k . L'arc

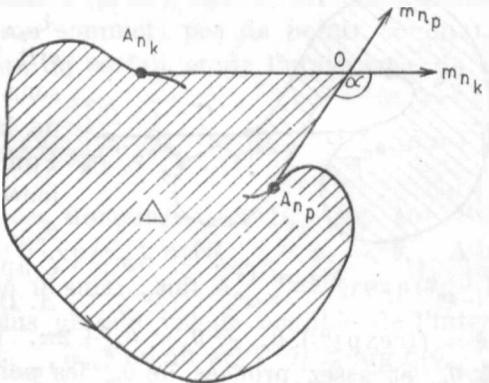


Figure 13

$C_{A_{n_k} A_{n_p}}$, ayant un seul point A_{n_k} commun avec la demi-droite m_{n_k} et un seul point A_{n_p} commun avec la demi-droite m_{n_p} , forme avec le segment $A_{n_k} A_{n_p}$, joignant les points A_{n_k} et A_{n_p} , le contour d'un domaine simplement connexe, que nous désignerons par Δ (fig. 14). Un point parcourant

l'arc $C_{A_{n_k} A_{n_p}}$, du point A_{n_k} au point A_{n_p} , et ensuite le segment $A_{n_p} A_{n_k}$, décrit le contour du domaine Δ dans le sens positif. Cela résulte, entre autres, de la remarque en italique à la p. 25. Pour les valeurs du paramètre θ , supérieures à θ_{n_p} et différentant assez peu de θ_{n_p} , les points $f(r \exp i\theta)$ de la courbe C appartiennent à l'intérieur du domaine Δ . Désignons par ξ un de ces points, où

$\xi = f(r \exp i\theta_\xi)$, $\theta_{n_p} < \theta_\xi < \theta_{n_k} + 2\pi$. Pour les paramètres θ , inférieurs à θ_{n_k} et assez proches de θ_{n_k} les points de la courbe C sont situés dans le demi-plan négatif. Désignons par η un de ces points. De la remarque en italique à la p. 25 il résulte encore que θ_ξ peut être choisi assez proche de θ_{n_p} pour que le point ξ appartienne au demi-plan positif de la demi-droite m_{n_k} . La partie de l'arc de la courbe C qui joint les points ξ et η doit donc couper le segment $A_{n_p} A_{n_k}$ (fig. 14), en contradiction avec le lemme 4. Nous avons ainsi démontré le lemme 5.

Chapitre 4

Considérons maintenant les arcs $C_{n_1}, C_{n_2}, \dots, C_{n_s}$ de la courbe C qui correspondent aux intervalles $\langle 0, \theta_{n_1} \rangle, \langle \theta_{n_1}, \theta_{n_2} \rangle, \dots, \langle \theta_{n_{s-1}}, \theta_{n_s} \rangle$. Désignons par D_{n_k} ($k = 1, 2, \dots, s$) la partie du complémentaire du domaine D (limité par la courbe C) qui est limitée par l'arc C_{n_k} et par les demi-droites $m_{n_{k-1}}, m_{n_k}$, où pour $k = 1$ on admet $m_{n_0} = m_1$ (fig. 15). Dans le cas où $n_s < n+1$ ($\theta_{n_s} < 2\pi$), nous désignons par D_{n+1} la partie du complémentaire du domaine D qui est limitée par l'arc C_{n+1} de la courbe C , correspondant à l'intervalle $\langle \theta_{n_s}, 2\pi \rangle$, et par les demi-droites m_{n_s} et $m_{n+1} = m_1$.

De la définition des domaines D_{n_1}, D_{n_2}, \dots il résulte immédiatement:

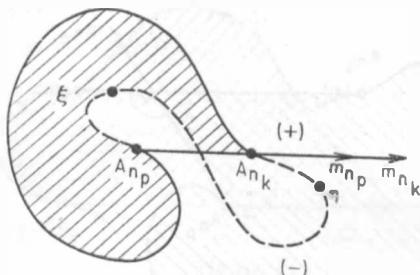


Figure 14

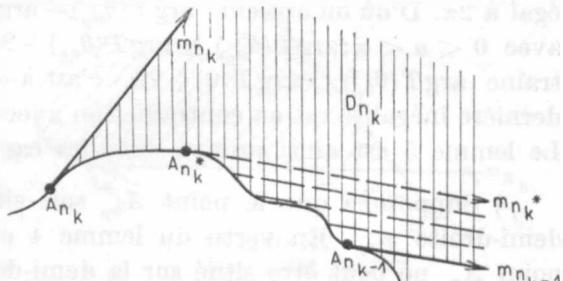


Figure 15

Corollaire I. *L'ensemble des points des domaines $D_{n_1}, D_{n_2}, \dots D_{n_s}$ (et si $n_s \neq n+1$, l'ensemble des points appartenant au domaine D_{n+1}) et l'ensemble des points de la courbe C et des demi-droites $m_1, m_{n_1}, \dots m_{n_s}$ se confondent avec le complémentaire du domaine D .*

En vertu du lemme 5, les demi-droites $m_1, m_{n_1}, \dots m_{n_s}$ n'ont pas de points communs et, en vertu du lemme 4 (p. 29), aucune des demi-droites m_1, m_{n_1}, \dots n'a (à l'exception de son sommet) pas de points communs avec la courbe C . En tenant compte de ce fait et de l'univalence de la fonction $f(z)$ nous obtenons:

Corollaire II. *Les domaines $D_{n_1}, D_{n_2}, \dots D_{n_s}$ (et D_{n+1} si $n_s \neq n+1$) sont disjoints.*

Considérons maintenant un de ces domaines, soit D_{n_k} (fig. 15). Sur l'arc C_{n_k} il existe un point $A_{n_k}^* = f(r \exp i\varphi_{n_k})$, où $\theta_{n_{k-1}} < \varphi_{n_k} < \theta_{n_k}$. A la p. 28 nous avons défini φ_{n_k} comme il suit: „soit $A_{n_{k-1}} = f(r \exp i\theta_{n_{k-1}})$, $\theta_{n_{k-1}} < 2\pi$. Désignons par φ_{n_k} la plus grande valeur possible de l'intervalle $(\theta_{n_{k-1}}, 2\pi)$ telle que pour $\theta \in (\theta_{n_{k-1}}, \varphi_{n_k})$ on ait $\arg T(\theta) \leq \arg T(\theta_{n_{k-1}})$ et $\arg T(\varphi_{n_k}) = \arg T(\theta_{n_{k-1}})$ ”. Le point $A_{n_k}^*$ est un point intérieur de l'arc $C_{n_{k-1}}$ (dont l'extrémité est A_{n_k}). Par les points de l'arc C qui correspondent à l'intervalle $(\theta_{n_0} = 0, \varphi_{n_k})$, menons un faisceau P_{n_k} de demi-droites de sommets $f(r \exp i\theta)$, parallèles à $m_{n_{k-1}}$ et de même sens. La dernière de ces demi-droites $m_{n_k}^*$, de sommet $A_{n_k}^*$, est tangente au point $A_{n_k}^*$ à l'arc $C_{n_{k-1}}$ (fig. 15). Nous allons prouver:

Lemme 6. *Aucune demi-droite du faisceau P_{n_k} n'a, outre son sommet, de points communs avec la partie C_k^* de l'arc C_{n_k} qui correspond dans la transformation $f(r \exp i\theta)$ à l'intervalle $(\theta_{n_{k-1}}, \varphi_{n_k})$.*

Démonstration. Supposons, pour la démonstration par l'absurde, qu'une demi-droite $l \in P_{n_k}$ ait, outre son sommet L , des points communs avec l'arc C_k^* . En décrivant l'arc C_k^* à partir du sommet $L = f(r \exp i\theta_L)$ de la demi-droite l dans le sens positif de la courbe C (ou dans le sens opposé), nous tomberons sur le premier point d'intersection $P = f(r \exp i\theta_P)$ avec la demi-droite l . On a $\theta_P \in (\theta_{n_{k-1}}, \varphi_{n_k})$ et $\theta_L \in (\theta_{n_{k-1}}, \varphi_{n_k})$. L'arc C_{PL} de la courbe C , correspondant à l'intervalle (θ_P, θ_L) si $\theta_L > \theta_P$, et à l'intervalle (θ_L, θ_P) si $\theta_P > \theta_L$, et le segment PL limitent un domaine Δ simplement connexe (fig. 16).

Le domaine Δ est borné et son contour est une courbe analytique par morceaux. Les seuls points singuliers peuvent être L et P . Il existe donc une demi-droite l_M parallèle à la droite l , ayant des points communs avec l'arc C_{PL} et telle que le domaine Δ (avec la demi-droite l) soit situé d'un côté de la droite l_M . Soit $M = f(r \exp i\varphi)$ un des points de contact de la

droite l_M avec l'arc ouvert C_{PL} , donc $\varphi \in (\theta_P, \theta_L)$ ou bien $\varphi \in (\theta_L, \theta_P)$, suivant que $\theta_L > \theta_P$ ou $\theta_P > \theta_L$. Comme l_M est parallèle à $m_{n_{k-1}}$, la droite l_M est aussi parallèle à la demi-droite $m_{n_{k-1}}$. Etant donné que $\varphi \in (\theta_{n_{k-1}}, \varphi_{n_k})$,

nous concluons de (10), p. 28: $\arg T(\varphi) \leq \arg T(\theta_{n_{k-1}})$, d'où, en tenant encore compte du fait que l_M est parallèle à $m_{n_{k-1}}$, nous obtenons: $\arg T(\varphi) = \arg T(\theta_{n_{k-1}}) - k^* \pi$, où k^* est un nombre entier non négatif. Le domaine Δ étant situé d'un côté de la droite l_M , il en résulte que pour les valeurs de θ suffisamment proches de φ on a $\arg T(\theta) > \arg T(\varphi)$. Soit $\bar{\theta}$ une de ces valeurs. Comme $\bar{\theta}$ appartient à l'intervalle ouvert $(\theta_{n_{k-1}}, \varphi_{n_k})$, on peut admettre que $\bar{\theta}$ est assez proche de φ pour que l'on ait $\theta \in (\theta_{n_{k-1}}, \varphi_{n_k})$. Considérons maintenant deux cas:

- 1) $k^* = 0$; les considérations précédentes donnent alors $\arg T(\bar{\theta}) > \arg T(\theta_{n_{k-1}})$: comme $\varphi \in (\theta_{n_{k-1}}, \varphi_{n_k})$, il y a contradiction avec (10), p. 28.
- 2) $k^* > 0$; dans ce cas l'égalité $\arg T(\varphi) = \arg T(\theta_{n_{k-1}}) - k^* \pi$ est en contradiction avec l'hypothèse que la fonction $f(z)$ est presque convexe (cf. 3, p. 133). La démonstration du lemme 6 est donc achevée.

Désignons maintenant par $\bar{m}_{n_{k-1}}$ et $\bar{m}_{n_k}^*$ les droites qui contiennent respectivement les demi-droites $m_{n_{k-1}}$ et $m_{n_k}^*$. Nous allons démontrer:

Lemme 7. *La partie C_k^* de l'arc C_{n_k} qui correspond à l'intervalle $\langle \theta_{n_{k-1}}, \varphi_{n_k} \rangle$ appartient (sauf ses extrémités $A_{n_{k-1}}^*$ et $A_{n_k}^*$) à l'intérieur de la bande D_k^* , limitée par le système des droites $\bar{m}_{n_{k-1}}$ et $\bar{m}_{n_k}^*$ (fig. 17).*

Démonstration. Supposons, contrairement à l'énoncé, que l'arc ouvert C_k^* n'appartienne pas tout entier à l'intérieur de la bande D_k^* . Il existe donc un $\varphi \in (\theta_{n_{k-1}}, \varphi_{n_k})$ tel que le point $R = f(r \exp i\varphi)$ soit situé sur le contour de cette bande, par exemple sur la droite $\bar{m}_{n_{k-1}}$, et que, vu l'univalence de la fonction $f(z)$ on ait $R \neq A_{n_{k-1}}^*$.

Désignons par R^* le premier point de rencontre (distinct de $A_{n_{k-1}}^*$) avec la droite $\bar{m}_{n_{k-1}}$ d'un point décrivant l'arc C_k^* à partir du point $A_{n_{k-1}}^*$,

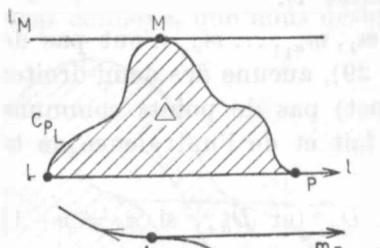


Figure 16

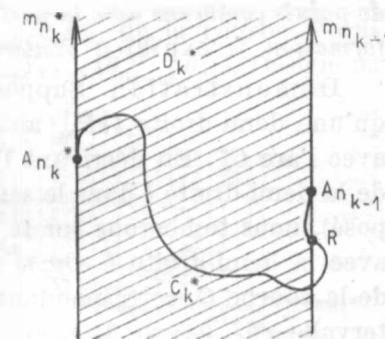


Figure 17

dans le sens positif de la courbe C (fig. 18). Soit $R^* = f(r \exp i\varphi^*)$, $\varphi^* \in (\theta_{n_{k-1}}, \varphi_{n_k})$. Désignons encore par ω un domaine simplement connexe limité par le segment $R^* A_{n_{k-1}}$ et la partie de l'arc C_k^* qui correspond à l'intervalle $(\theta_{n_{k-1}}, \varphi^*)$. Soit \tilde{m}_k une droite ayant des points communs avec le contour du domaine ω et telle que ce domaine, avec la droite $\tilde{m}_{n_{k-1}}$ soit situé d'un côté de la droite \tilde{m}_k , $\tilde{m}_k \parallel m_{n_{k-1}}$. Une droite quelconque \tilde{l} , parallèle à $\tilde{m}_{n_{k-1}}$ et située entre \tilde{m}_k et $\tilde{m}_{n_{k-1}}$ coupe le contour de ω en deux points P_1, P_2 au moins, situés sur la partie de l'arc C_k^* qui correspond à l'intervalle $(\theta_{n_{k-1}}, \varphi^*)$. Désignons par l une demi-droite, contenue dans cette droite, de même sens que la demi-droite $m_{n_{k-1}}$, dont un des points P_1, P_2 est le sommet et l'autre est un point intérieur de la demi-droite l . Le sommet de la demi-droite l est donc situé sur l'arc C_k^* ; l est parallèle à $m_{n_{k-1}}$ et de même sens, donc c'est une demi-droite du faisceau P_{n_k} considéré à la p. 35. A la demi-droite l appartiennent deux points de l'arc C_k^* , en contradiction avec le lemme 6, p. 35. Si le point R était situé sur la droite $\tilde{m}_{n_k}^*$, le raisonnement serait identique et nous aurions aussi contradiction avec le lemme 6. La démonstration du lemme 7 est donc achevée.

Corollaire III. *Les demi-droites du faisceau P_{n_k} remplissent entièrement la partie de la bande D_k^* contenue entre l'arc C_k^* et les demi-droites $m_{n_{k-1}}, m_{n_k}^*$.*

Ce corollaire est une conséquence immédiate des lemmes 6 et 7, p. 35 et 36.

Corollaire IV. *La demi-droite $m_{n_k}^*$ est située dans le demi-plan positif de la demi-droite $m_{n_{k-1}}$.*

En effet, de la définition des demi-droites m_1, m_2, \dots (cf. remarque en italique à la p. 25) résulte que la partie de l'arc C_k^* qui correspond à l'intervalle $(\theta_{n_{k-1}}, \varphi)$, $\varphi > \theta_{n_{k-1}}$, est située, pour φ assez proches de $\theta_{n_{k-1}}$, dans le demi-plan positif de la demi-droite $m_{n_{k-1}}$. De là et du lemme 7 résulte le corollaire IV.

Le point $A_{n_k}^*$ est un point intérieur de l'arc $L_{n_{k-1}}$ (les arcs L_1, L_2, \dots ont été définis à la p. 20), dont l'extrémité est le point $A_{n_k} = f(r \exp i\theta_{n_k})$.

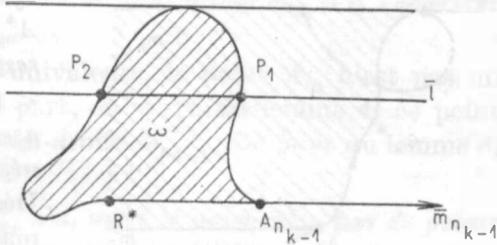


Figure 18

Comme le point $A_{n_k}^*$ est le point de contact de la demi-droite $m_{n_k}^*$ avec l'arc $L_{n_{k-1}}$ et l'argument du vecteur tangent augmente sur cet arc avec le paramètre θ (cf. remarque 2, p. 20) et que, d'autre part, le sens de la demi-droite $m_{n_k}^*$ est opposé à celui du vecteur tangent à la courbe C au point $A_{n_k}^*$, la partie de l'arc $L_{n_{k-1}}$, qui correspond à l'intervalle (φ_{n_k}, θ) , $\varphi_{n_k} < \theta < \theta_{n_k}$ est située, pour θ différent assez peu de φ_{n_k} , dans le demi-plan négatif de la demi-droite $m_{n_k}^*$ (fig. 19).

Désignons par ω_k^* la partie du domaine D_k^* (défini à la p. 36) contenue entre les demi-droites $m_{n_{k-1}}^*$, $m_{n_k}^*$ et l'arc C_k^* . Du corollaire IV (p. 37) et du lemme 7 (p. 36) résulte que l'intérieur du domaine ω_k^* appartient au demi-plan négatif de la demi-droite $m_{n_k}^*$. Les points $f(r \exp i\theta)$, $\theta > \varphi_{n_k}$, étant, par définition du domaine ω_k^* , extérieurs par rapport à celui-ci pour les valeurs de θ suffisamment proches de φ_{n_k} , on peut admettre que le nombre θ , considéré à la p. 38 est assez proche de φ_{n_k} pour que la partie de l'arc $L_{n_{k-1}}$ qui correspond à l'intervalle (φ_{n_k}, θ) soit située dans le demi-plan négatif de la demi-droite $m_{n_k}^*$ et à l'extérieur du domaine ω_k^* .

Figure 19

Nous établirons encore le lemme suivant:

Lemme 8. *Le point A_{n_k} ne peut être situé ni dans le demi-plan positif de la demi-droite $m_{n_k}^*$, ni sur la droite $\bar{m}_{n_k}^*$ (dont $m_{n_k}^*$ est une partie), ni à l'intérieur du domaine ω_k^* .*

En effet, si le contraire avait lieu, en tenant compte du fait que l'argument du vecteur tangent $T(\theta)$ à la courbe C augmente pour $\theta \in \langle \varphi_{n_k}, \theta_{n_k} \rangle$ et que l'arc de la courbe C correspondant à l'intervalle $\langle \varphi_{n_k}, \theta_{n_k} \rangle$ est simple, on arriverait à la conclusion que cet arc devrait se couper soit avec l'arc C_k^* , soit avec la demi-droite $m_{n_{k-1}}^*$. Il existerait donc un point φ^* , $\varphi_{n_k} < \theta < \varphi^* < \theta_{n_k}$, tel que le point $P^* = f(r \exp i\varphi^*)$ (fig. 19) serait situé sur l'arc C_k^* ou bien sur la demi-droite $m_{n_{k-1}}^*$. Le premier cas est impossible, puisque la transformation $f(r \exp i\theta)$ est univalente, alors que les intervalles $\langle \theta_{n_{k-1}}, \varphi_{n_k} \rangle$ et $\langle \theta, \varphi^* \rangle$ sont contenus tous les deux dans l'intervalle $\langle 0, 2\pi \rangle$ et sont disjoints à cause de $0 \leq \theta_{n_{k-1}} < \varphi_{n_k} < \theta < \varphi^* < \theta_{n_k} \leq 2\pi$. La second cas est en contradiction avec le lemme 4 (p. 29). Le lemme 8 est ainsi démontré.

Corollaire V. *Deux cas peuvent se présenter: a) ou bien le point A_{n_k} est confondu (géométriquement) avec le point $A_{n_{k-1}}$, et dans ce cas on a $k = 1$, $A_{n_{k-1}} = A_{n_0} = A_1$, $A_{n_k} = A_{n_1} = f(r \exp 2\pi i) = A_{n+1} = A_1$; la demi-droite $m_{n_k} = m_{n_1}$ est confondue avec la demi-droite m_1 ; b) ou bien A_{n_k} est situé dans le demi-plan négatif de la demi-droite $m_{n_k}^*$ et à l'extérieur du domaine ω_k^* .*

En effet, la fonction $f(z)$ étant univalente, le point A_{n_k} n'est pas un point intérieur de l'arc C_k^* ; d'autre part, en vertu du lemme 4, ce point ne peut être point intérieur de la demi-droite $m_{n_{k-1}}$. De là et du lemme 8, p. 38, résulte le corollaire V.

Corollaire VI. *La demi-droite $m_{n_k}^*$ n'a, outre le point $A_{n_k}^*$, pas de points communs avec l'arc C_{n_k} de la courbe C , correspondant à l'intervalle $\langle 0_{n_{k-1}}, 0_{n_k} \rangle$.*

En effet, les considérations qui suivent le corollaire IV (p. 37, italique) prouvent que l'arc de la courbe C qui correspond à l'intervalle $(\varphi_{n_k}, 0_{n_k})$ est situé dans de demi-plan négatif de la demi-droite $m_{n_k}^*$; sinon, cet arc couperait la demi-droite $m_{n_k}^*$ au point P^* (fig. 19), $P^* = f(r \exp i\alpha^*)$. Il en résulte que pour les points $0, 0 < \alpha^* < \theta$ suffisamment proches de α^* les points $f(r \exp i\theta)$ seraient points intérieurs du domaine ω_k^* . Par un raisonnement identique à celui qui a permis d'établir le lemme 8, on arriverait à une contradiction soit avec le lemme 4, soit avec l'univalence de la fonction $w = f(z)$. De là et du lemme 6, p. 35, le corollaire VI résulte immédiatement.

Corollaire VII. *Toute la demi-droite $m_{n_k}^*$, sauf le point $A_{n_k}^*$, est située dans l'intérieur du domaine D_{n_k} .*

En effet, il résulte du corollaire V que les demi-droites $m_{n_k}^*$ et m_{n_k} n'ont pas de points communs. Dans le cas a (cela est évident en vertu du corollaire IV, p. 37. Dans le cas b) le point A_{n_k} est situé dans le demi-plan négatif de la demi-droite $m_{n_k}^*$ et, en même temps, il est un point extérieur du domaine ω_k^* , pour lequel la demi-droite $m_{n_k}^*$ est une partie de son contour (fig. 19). Si m_{n_k} coupait la demi-droite $m_{n_k}^*$, elle devrait couper soit l'arc C_k^* , soit la demi-droite $m_{n_{k-1}}$. La première éventualité est en contradiction avec le lemme 4, p. 29, l'autre avec le lemme 5, p. 32.

Le contour du domaine D_{n_k} (les domaines D_{n_1}, D_{n_2}, \dots ont été définis à la p. 34) est formé par le système des demi-droites $m_{n_{k-1}}, m_{n_k}$ et par l'arc C_{n_k} (fig. 15). L'arc $L_{n_{k-1}}$ est concave par rapport au domaine D . Il résulte qu'une partie de la tangente à l'arc $L_{n_{k-1}}$, menée par le point $A_{n_k}^* \in L_{n_{k-1}}$, limitée par le point $A_{n_k}^*$ et le point A situé sur la demi-droite $m_{n_k}^*$ suffisamment près du point $A_{n_k}^*$, est extérieure au domaine D . Comme le point $A_{n_k}^*$ appartient à l'arc C_{n_k} , il s'ensuit que les points de la demi-

droite ouverte $m_{n_k}^*$, suffisamment proches de son sommet, sont des points intérieurs du domaine D_{n_k} . Si la demi-droite $m_{n_k}^*$ n'appartenait pas, le point $A_{n_k}^*$ excepté, à l'intérieur de D_{n_k} , alors, en parcourant cette demi-droite à partir du point $A_{n_k}^*$ dans le sens positif, nous tomberions nécessairement pour la première fois sur le point $B \in m_{n_k}^*$ ce point étant situé sur le contour du domaine D_{n_k} . Il en résulterait que la demi-droite $m_{n_k}^*$ coupe ou bien la demi-droite m_{n_k} , ou bien la demi-droite $m_{n_{k-1}}$, ou enfin l'arc C_{n_k} . Les deux premières éventualités sont impossibles, puisque, comme nous l'avons dit, la demi-droite $m_{n_k}^*$ n'a pas de points communs avec les demi-droites m_{n_k} et $m_{n_{k-1}}$. Comme $B \neq A_{n_k}^*$, la dernière éventualité est en contradiction avec le corollaire VI, p. 39. Le corollaire VII est ainsi complètement démontré.

Désignons par Ω_k la partie du domaine D_{n_k} comprise entre les demi-droites m_{n_k} et $m_{n_k}^*$. Le domaine D_{n_k} est la somme, au sens de la théorie des ensembles, $\Omega_k + \omega_k^* + \{m_{n_k}^*\}$, où $\{m_{n_k}^*\}$ désigne l'ensemble des points de la demi-droite $m_{n_k}^*$, distincts de son sommet (cf. corollaire VII). Les domaines ω_k^* et Ω_k sont disjoints (fig. 20). Sur la partie de l'arc $L_{n_{k-1}}$ qui correspond à l'intervalle $(\varphi_{n_k}, \theta_{n_k})$ menons en tout point une demi-droite tangente à cet arc, de sens opposé à celui du vecteur tangent à cet arc. La famille de ces tangentes remplira tout le domaine Ω_k et aucun couple

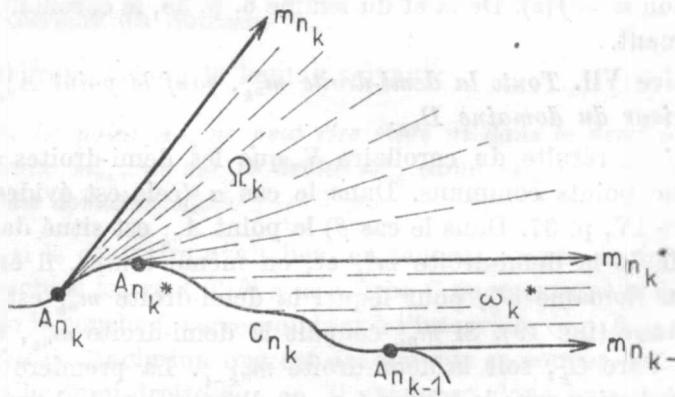


Figure 20

de ces tangentes n'aura de points communs. La famille des demi-droites du faisceau P_{n_k} remplira tout le domaine ω_k^* (cf. corollaire III, p. 37). Comme les domaines Ω_k et ω_k^* remplissent, conjointement avec la demi-droite $m_{n_k}^*$, le domaine D_{n_k} , il en résulte que le faisceau P_{n_k} de demi-droites parallèles et la famille correspondante de tangentes remplissent

le domaine D_{n_k} (fig. 20), et satisfont, en même temps, par rapport au domaine $1 - D_{n_k}$ à la définition des domaines linéairement accessibles, 1 désignant tout le plan.

Remarque. Si $n_s < n+1$, c'est-à-dire si $A_{n_s} \neq A_{n+1} = A_1$, on a, d'après la remarque 3 (p. 28):

$$\arg T(\theta_{n_s}) = \arg T(2\pi).$$

De plus, (6), p. 22, entraîne $\arg T(\theta) \leq \arg T(\theta_{n_s})$ pour $\theta \in \langle \theta_{n_s}, 2\pi \rangle$. Considérons le domaine D_{n+1} , partie du complémentaire de D , limité par l'arc C_{n+1} de la courbe C , qui correspond à l'intervalle $\langle \theta_{n_s}, 2\pi \rangle$, et par les demi-droites m_{n_s} et $m_{n+1} = m_1$. Construisons le faisceau P_{n+1} de demi-droites parallèles à m_{n_s} et de même sens, dont les sommets sont les points $f(r \exp i\theta)$, θ parcourant l'intervalle $\langle \theta_{n_s}, 2\pi \rangle$ (fig. 21). Aucune demi-droite de ce faisceau ne coupe, sauf en son sommet, l'arc de la courbe C qui correspond à l'intervalle $\langle \theta_{n_s}, 2\pi \rangle$.

La démonstration de ce fait est identique à celle du lemme 6, (p. 35).

La partie de l'arc de la courbe C qui correspond à l'intervalle $(\theta_{n_s}, 2\pi)$ est intérieure à la bande limitée par les droites dont font partie les demi-droites m_{n_s} et m_1 . La démonstration est identique à celle du lemme 7, p. 36.

De cette remarque il s'ensuit que les demi-droites du faisceau P_{n+1} remplissent tout le domaine D_{n+1} . Comme la fermeture du complémentaire du domaine D est, au sens de la théorie des ensembles, la somme des domaines $D_{n_1}, D_{n_2}, \dots, D_{n_s}$ (et D_{n+1} , si $n_s < n+1$), de l'ensemble des points des demi-droites fermées $m_1, m_{n_1}, \dots, m_{n_s}$ et de l'ensemble des points de la courbe C (corollaire I, p. 35), il en résulte, d'après le corollaire II, que la famille R composée des demi-droites appartenant à tous les faisceaux $P_{n_1}, P_{n_2}, \dots, P_{n_s}, P_{n+1}$, de la famille des tangentes correspondantes aux arcs $\mathcal{L}_{n_{k-1}}$, contenues dans les domaines $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ et de la famille des demi-droites m_1, m_{n_1}, \dots constitue une famille de demi-droites qui satisfait, par rapport au domaine D , à la définition des domaines linéairement accessibles. Nous avons ainsi démontré que le transformé D du cercle $|z| < r < 1$ par la fonction $w = f(z)$, $f(z) \in K$, est un domaine linéairement accessible.

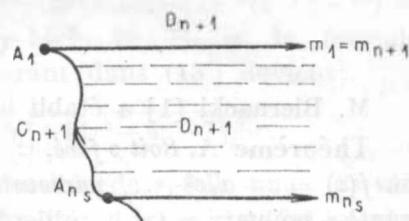


Figure 21

Soit $\varphi_r(z) = f(rz)$, $0 < r < 1$. En posant $r = 1 - \frac{1}{n}$ désigne: $\varphi_n(z) = f\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)z\right)$. Les fonctions $\varphi_n(z)$, $\varphi_n(0) = 0$, $\varphi'_n(0) = 1 - \frac{1}{n} > 0$, représentent le cercle $|z| < 1$ sur des domaines D_n linéairement accessibles (en vertu des considérations précédentes). Comme $\varphi_n(z)$ tend uniformément, dans tout cercle fermé $|z| \leq \varrho < 1$, vers $f(z)$ pour $n \rightarrow \infty$, la fonction $f(z)$ représente le cercle $|z| < 1$ sur un domaine linéairement accessible. Le théorème énoncé à la p. 17 se trouve ainsi démontré.

Chapitre 5

M. Biernacki [1] a établi les théorèmes suivants:

Théorème A. Soit z fixé, $|z| = r < 1$. Le domaine décrit par $u = z/f(z)$, où $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ parcourt la classe L , est un domaine fermé décrit par les points:

$$u = (1+s)^2/[1+(s+t)/2]$$

où les variables s et t décrivent respectivement les cercles $|s| \leq r$ et $|t| \leq r$. Les points du contour du domaine Δ_r correspondent aux fonctions qui représentent le cercle $|z| < 1$ sur le plan entaillé d'une demi-droite.

Théorème B. Soit z fixé, $|z| = r < 1$. Le domaine $\bar{\Delta}_r$ décrit par $v = zf'(z)/f(z)$, où $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ parcourt la classe L , est un domaine homothétique de Δ_r ; le centre d'homothétie est l'origine et le rapport d'homothétie est $1/(1-r^2)$. Tout point du contour du domaine $\bar{\Delta}$ correspond à une fonction qui représente le cercle $|z| < 1$ sur le plan entaillé d'une demi-droite. On a aussi $|\arg v| < 3\pi/2$.

Il résulte des considérations de M. Biernacki [1], p. 311 que le contour extérieur F du domaine Δ_r est l'enveloppe des circonférences Γ_s , tangentes extérieurement à la circonférence C de rayon r et de centre au point $w = 1$. Si $s = r \exp i\varphi$, Γ_s est la circonférence tangente extérieurement à la circonférence C au point $1+s$ et le rayon $\varrho(\varphi)$ de la circonférence Γ_s s'exprime par la formule:

$$(12) \quad \varrho(\varphi) = r(1+r^2+2r\cos\varphi)/2(1+r\cos\varphi)$$

Imposons maintenant la condition demandant que toutes les circonférences Γ_s soient à droite de l'axe imaginaire. Cette condition prend la forme: $\operatorname{Re}\{(r+\varrho)\exp i\varphi - \varrho + 1\} > 0$ d'où $(r+\varrho)\cos\varphi - \varrho + 1 > 0$. En tenant compte de (12) on obtient: $[r+r(1+r^2+2r\cos\varphi)/2(1+r\cos\varphi)]\cos\varphi -$

$-r(1+r^2+2r\cos\varphi)/2(1+r\cos\varphi)+1 > 0$ pour tout φ . La dernière inégalité donne, après quelques transformations:

$$(13) \quad 4r^2\cos^2\varphi + (r^3 - 2r^2 + 5r)\cos\varphi + 2 - r - r^3 > 0$$

Posons $\cos\varphi = x$. On a:

$$(13') \quad 4r^2x^2 + (r^3 - 2r^2 + 5r)x + 2 - r - r^3 > 0.$$

Nous étudierons l'inégalité (13') dans l'intervalle $\langle -1, 1 \rangle$, puisque $x = \cos\varphi$, donc $|x| \leq 1$. Désignons par Δ le discriminant du trinôme carré figurant dans (13'). Nous avons: $\Delta = (r^3 - 2r^2 + 5r)^2 - 16r^2(2 - r - r^3) = r^6 + 12r^5 + 14r^4 - 4r^3 - 7r^2 = r^2(r^4 + 12r^3 + 14r^2 - 4r - 7)$. et la formule donnant les zéros du trinôme carré figurant dans (13') devient:

$$(13'') \quad x_{1,2} = [-(r^2 - 2r + 5) \pm \sqrt{r^4 + 12r^3 + 14r^2 - 4r - 7}] / 8r.$$

Pour déterminer la plus grande valeur possible de r telle que (13) soit vérifié pour tout φ , il faudra étudier l'inégalité: $\Delta_0(r) = r^4 + 12r^3 + 14r^2 - 4r - 7 < 0$ qui, en raison de $r^4 + 12r^3 + 14r^2 - 4r - 7 = (1+r)^2(r^2 + 10r - 7)$ se ramène à celle-ci: $r^2 + 10r - 7 < 0$. Considérons l'équation $r^2 + 10r - 7 = 0$. Le nombre $r^* = 4\sqrt{2} - 5$ est la seule racine positive de l'équation $\Delta_0(r) = 0$. Comme le polynôme $r^4 + 12r^3 + 14r^2 - 4r - 7$ est négatif pour $r = 0$ et n'admet qu'une racine positive r^* , il est négatif pour $0 \leq r < r^*$. On a donc $\Delta_0(r) < 0$ pour $0 \leq r < r^*$. Pour $r = r^*$ on a $\Delta_0(r) = 0$. En posant dans (13'') nous obtenons: $r^* = 4\sqrt{2} - 5$

$$x_1 = x_2 = (6\sqrt{2} - 9) / (4\sqrt{2} - 5) \approx -0,7836.$$

Comme $-1 < -0,7836 \dots < 1$, il existe un φ tel que le premier membre de (13) s'annule. L'une des circonférences Γ_s , ayant son centre à droite de l'axe imaginaire, est tangente à cet axe (plus strictement il y a deux telles circonférences, la seconde est symétrique de la circonférence Γ_s par rapport à l'axe réel). En vertu du théorème B, p. 42, pour $r = r^*$ le contour extérieur du domaine A_r est situé à droite de l'axe imaginaire, excepté deux points où il est tangent à cet axe. Il existe donc une fonction $f^*(z) \in L$ qui représente le cercle $|z| < 1$ sur le plan coupé suivant une demi-droite, pour laquelle $\operatorname{Re}\{zf''(z)/f'(z)\} = 0$, z étant un point de la circonférence $|z| = 4\sqrt{2} - 5$. Comme nous l'avons montré en étudiant l'inégalité (13), pour toutes les fonctions $f(z) \in L$ on a dans le cercle $|z| < r^*$: $\operatorname{Re}\{zf'(z)/f(z)\} > 0$. Un cercle plus grand que le cercle $|z| < r^*$ n'est plus représenté par la fonction $f^*(z)$ sur un domaine étoilé par rapport à l'origine. Il en résulte:

Théorème C. *Le rayon maximum r tel que le transformé du cercle correspondant $|z| < r$ par les fonctions de la classe L est un domaine étoilé (par rapport à l'origine) est $r = 4\sqrt{2} - 5 = 0,6568\dots$. Cette valeur est exacte et la fonction extrémale représente le cercle $|z| < 1$ sur le plan coupé suivant une demi-droite fermée ne passant pas par l'origine.*

M. Biernacki a posé le problème suivant: trouver une limitation des coefficients des fonctions $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ holomorphes dans le cercle $|z| < 1$ et effectuant une représentation univalente de ce cercle sur des domaines étoilés par rapport à un point autre que l'origine. Evidemment ces fonctions $f(z)$ appartiennent à la classe L . Pour la classe K , M. O. Reade [4] a démontré l'hypothèse de Bieberbach $|a_n| \leq n$. Or, nous avons prouvé que $L = K$, donc la même inégalité a lieu pour les fonctions $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ qui représentent le cercle $|z| < 1$ sur des domaines étoilés par rapport à un point quelconque. Par conséquent:

Corollaire. *Si $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ représente le cercle $|z| < 1$ sur un domaine étoilé par rapport au point a , on a $|a_n| \leq n$.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Biernacki, M., *Sur la représentation conforme des domaines linéairement accessibles*, Prace Matematyczno-Fizyczne, **44** (1936), p. 293–314.
- [2] Kaplan, W., *Close-to-convex schlicht functions*, Michigan Math. Journ., **1**, 2 (1952), p. 169–185.
- [3] Lewandowski, Z., *Sur l'identité de certaines classes de fonctions univalentes I*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **12**, 9 (1958), p. 131–146.
- [4] Reade, M. O., *On close-to-convex univalent functions*, Michigan Math. Journ., **3**, 1 (1955–56), p. 59–62.

Streszczenie

Jest to druga część pracy *O identyczności pewnych klas funkcji jednoznacznych I*, w której udowodnilem, że funkcje holomorficzne liniowo osiągalne M. Biernackiego są funkcjami prawie wypukłymi W. Kaplana. W tej części pracy dowodzę twierdzenia odwrotnego, a mianowicie, że funkcje prawie wypukłe są liniowo osiągalne.

Резюме

Это вторая часть работы *О тождественности некоторых классов однозначных функций I*, в которой доказано, что голоморфные, линейно достижимые функции М. Бернацкого являются почти выпуклыми функциями В. Каплана. В предлагаемой части работы я доказываю обратную теорему, именно, что функции почти выпуклые достижимы линейно.