ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XIII, 8 SECTIO A 1959

Z Zakładu Matematyki III, Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: doc. dr K. Tatarkiewicz

ŚWIATOMIR ZĄBEK

Sur la périodicité modulo 10^μ des suites de nombres $S_p(n)$

O periodyczności modulo 10^μ ciągów liczb $S_p(n)$

О периодичности по модулю 10^μ последовательностей чисел $S_p(n)$

Ce travail est une continuation de mon travail précédent [2], dans lequel j'ai étudié la périodicité et la plus courte période modulo m des suites de nombres $\binom{n}{k}$. J'y ai démontré, entre autres, les deux lemmes suivants:

Lemme 2. *Si $W(n)$ est un polynôme de la forme*

$$W(n) = \sum_{i=0}^{a} a_i n^i \tag{1}$$

où a est un nombre naturel, a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, a)$ sont entiers, $a_a \neq 0$, et si s est un nombre entier tel que $W(n)/s$ admet des valeurs entières pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, la suite $\{W(n)/s\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ est périodique modulo m (où m est un nombre naturel quelconque) pour tout nombre entier non négatif n et une de ses périodes est égale à ms.

Lemme 3. *Si $W(n)$, s et m satisfont aux conditions du lemme 2, il faut, pour que le nombre naturel q soit une période modulo m de la suite $\{W(n)/s\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, que la congruence*

$$\frac{W(q) - a_0}{s} \equiv 0 \pmod{m}$$

soit satisfaite.

Remarque: Pour les suites étudiées dans cette note, on a $a_0 = 0$.

Dans ce travail je vais m'occuper de la périodicité et de la plus courte période modulo 10^μ des suites de nombres $S_p(n)$, où $S_p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^p$, p est un nombre entier non négatif fixé, $n = 0, 1, 2, \ldots$, μ un nombre naturel quelconque. Je me bornerai pourtant aux valeurs de $p < 10$. Pour $p \geqslant 10$, les démonstrations sont très pénibles, car les formules correspondantes pour $S_p(n)$ sont trop compliquées.

Théorème. a) *Toute suite de nombres* $S_p(n)$ ($p = \text{const}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$) *est périodique modulo m, où m est un nombre naturel quelconque.*

b) *La plus courte période modulo* 10^μ (*désignée par* $\varrho_{\mu p}$) *a, pour les suites particulières de nombres* $S_p(n)$, *les valeurs suivantes*:

p	$\varrho_{\mu p}$
0	10^μ
1, 2, 6	2.10^μ
3, 7, 9	$\begin{cases} 20 \text{ pour } \mu = 1 \\ 10^\mu \text{ pour } \mu \geqslant 2 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 20 \text{ pour } \mu = 1 \\ 2.10^{\mu-1} \text{ pour } \mu \geqslant 2 \end{cases}$
4, 8	$10^{\mu+1}$

Démonstration. a) I. J. Schwatt [1] a publié la formule:

$$S_p(n) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \binom{n}{i} \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \binom{i-1}{j-1} j^p.$$

On voit facilement que tous les $S_p(n)$ sont de la forme $W(n)/s$, satisfaisant aux conditions du lemme 2; la première partie du théorème est donc vraie.

b) Pour démontrer cette partie du théorème, je me baserai sur les formules explicites suivantes:

$$S_0(n) = n$$
$$S_1(n) = (n^2+n)/2 = n(n+1)/2$$
$$S_2(n) = (2n^3+3n^2+n)/6 = n(n+1)(2n+1)/6$$
$$S_3(n) = (n^4+2n^3+n^2)/4 = n^2(n+1)^2/4$$
$$S_4(n) = (6n^5+15n^4+10n^3-n)/30 = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$$

$$S_5(n) = (2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2)/12 = n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)/12$$
$$S_6(n) = (6n^7 + 21n^6 + 21n^5 - 7n^3 + n)/42$$
$$= n(n+1)(2n+1)(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1)/42$$
$$S_7(n) = (3n^8 + 12n^7 + 14n^6 - 7n^4 + 2n^2)/24$$
$$= n^2(n+1)^2(3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2)/24$$
$$S_8(n) = (10n^9 + 45n^8 + 60n^7 - 42n^5 + 20n^3 - 3n)/90$$
$$= n(n+1)(2n+1)(5n^6 + 15n^5 + 5n^4 - 15n^3 - n^2 + 9n - 3)/90$$
$$S_9(n) = (2n^{10} + 10n^9 + 15n^8 - 14n^6 + 10n^4 - 3n^2)/20$$
$$= n^2(n+1)^2(2n^6 + 6n^5 + n^4 - 8n^3 + n^2 + 6n - 3)/20$$

(i) Pour $p = 0$ le théorème est évident. On le prouve aussi facilement dans le cas $p = 1$, car évidemment

$$S_1(n) = \binom{n+1}{2}$$

mais j'ai démontré dans mon travail [2] que la plus courte période modulo 10^μ de la suite $\left\{\binom{n}{2}\right\}$ est 2.10^μ.

(ii) Pour $p = 5$ la démonstration est plus compliquée. De la formule donnée ci-dessus pour $S_5(n)$, nous obtenons simplement pour tout q naturel:

$$S_5(n+q) = [2(n+q)^6 + 6(n+q)^5 + 5(n+q)^4 - (n+q)^2]/12$$
$$= S_5(n) + S_5(q) + R_5(n, q)$$

(2) où

$$R_5(n, q) = q^5 n + 5q^3 n^2 + 5q^2 n^3 + qn^5 +$$
$$+ 5q(q^3 n^2 + q^3 n + qn^4 + qn^2 + n^4)/2 +$$
$$+ 5q(2q^2 n^3 + q^2 n + n^3)/3 - qn/6$$

α) $\mu = 1$

On a

$$S_5(20) = 20^2 \cdot 21^2 \cdot (2 \cdot 20^8 + 2 \cdot 20 - 1)/12 = 12333300 \equiv 0 \pmod{10}.$$

De plus

$$R_5(n, 20) = 20^5 n + 5 \cdot 20^3 n^2 + 5 \cdot 20^2 n^3 + 20n^5 +$$
$$+ 5 \cdot 10 \cdot (20^3 n^2 + 20^3 n + 20n^4 + 20n^2 + n^4) +$$
$$+ 10[10(2 \cdot 20^2 n^3 + 20^2 n + n^3) - n]/3$$
$$\equiv 10(8010n^2 + 399n)/3$$
$$\equiv 0 \pmod{10}, \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Par conséquent, en vertu de (1)

$$S_5(n+20) \equiv S_5(n) (\mathrm{mod}\, 10), \qquad \text{pour } n = 0, 1, 2, \ldots$$

c'est-à-dire le nombre 20 est une période modulo 10 de la suite $\{S_5(n)\}$. Je vais démontrer que c'est la plus courte période de cette suite.

Le nombre $\varrho_{1,5}$ étant la plus courte période modulo 10 de la suite $\{S_5(n)\}$ nous avons évidemment $\varrho_{1,5} | 20$. Supposons que $\varrho_{1,5} < 20$. Alors $\varrho_{1,5} | 10$ ou $\varrho_{1,5} | 4$, c'est-à-dire 10 ou 4 est une période modulo 10 de notre suite. Mais

$$S_5(10) = 10^2 \cdot 11^2 \cdot (2 \cdot 10^2 + 20 - 1)/12 = 10 \cdot 44165/2 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 10)$$

car $\sim 2 | 44165$; donc — en vertu du lemme 3 cité plus haut — 10 ne peut pas être une période.

D'autre part, si le nombre 4 était une période, il en serait de même du nombre 8. Mais

$$S_5(8) = 8^2 \cdot 9^2 \cdot (2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 - 1)/12 = 18576 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 10)$$

donc cette éventualité est aussi impossible, en vertu du même lemme 3. Par conséquent le nombre 20 est la plus courte période modulo 10 de la suite de nombres $S_5(n)$.

β) $\mu \geqslant 2$.

Remarquons que

$$\begin{aligned} S_5(2 \cdot 10^{\mu-1}) &= \\ &= 4 \cdot 10^{2\mu-2} (2 \cdot 10^{\mu-1} + 1)^2 (8 \cdot 10^{2\mu-2} + 4 \cdot 10^{\mu-1} - 1)/12 \\ &= 10^{\mu} \cdot 10^{\mu-2} (2 \cdot 10^{\mu-1} + 1)^2 (8 \cdot 10^{2\mu-2} + 4 \cdot 10^{\mu-1} - 1)/3 \\ &\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 10^{\mu}) \qquad \text{pour } \mu \geqslant 2 \end{aligned}$$

car $3 | 2 \cdot 10^{\mu-1} + 1$ en vertu du caractère de divisibilité par 3. De même, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ et $\mu \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} R_5(n, 2 \cdot 10^{\mu-1}) &= \\ &= 2^5 \cdot 10^{5\mu-5} n + 5 \cdot 2^3 \cdot 10^{3\mu-3} n^2 + 5 \cdot 2^2 \cdot 10^{2\mu-2} n^3 + 2 \cdot 10^{\mu-1} n^5 + \\ &\quad + 5 \cdot 10^{\mu-1} (2^3 \cdot 10^{3\mu-3} n^2 + 2^3 \cdot 10^{3\mu-3} n + 2 \cdot 10^{\mu-1} n^4 + 2 \cdot 10^{\mu-1} n^2 + \\ &\quad + n^4) + 10^{\mu} (2^3 \cdot 10^{2\mu-2} n^3 + 2^2 \cdot 10^{2\mu-2} n + n^3)/3 - 10^{\mu-1} n/3 \\ &= 10^{\mu} (2^5 \cdot 10^{4\mu-5} + 2^2 \cdot 10^{2\mu-2} n^2 + 2 \cdot 10^{\mu-1} n^3 + 2^2 \cdot 10^{3\mu-3} n^2 + \\ &\quad + 2^2 \cdot 10^{3\mu-3} n + 10^{\mu-1} n^4 + 10^{\mu-1} n^2) + 10^{\mu} n^4/2 + 10^{\mu} n^3 (2^3 \cdot 10^{2\mu-2} \\ &\quad + 1)/3 + 10^{\mu} \cdot 4 \cdot 10^{2\mu-2} n/3 + 10^{\mu} n^5/5 - 10^{\mu} n/30 \\ &\equiv 10^{\mu} (n^4/2 + 10^{2\mu-2} n/3 + n^5/5 - n/30) \pmod{10^{\mu}} \end{aligned}$$

car $3 | 2^3 \cdot 10^{2\mu-2} + 1 = 8 \cdot 10^{2\mu-2} + 1$, en vertu du même caractère de divisibilité, et, par conséquent,

$$R_5(n, 2 \cdot 10^{\mu-1}) \equiv 10^\mu (6n^5 + 15n^4 + 10^{2\mu-1}n - n)/30 \pmod{10^\mu},$$
$$\text{pour } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ et } \mu \geqslant 2.$$

D'autre part, pour n = 0, 1, 2, ... on a évidemment

$$6n^5 + 15n^4 + 10^{2\mu-1}n - n = 2(3n^5 + 5 \cdot 10^{2\mu-2}n) + n(15n^3 - 1) \equiv n(15n^3 - 1)$$
$$\equiv 0 \pmod 2$$

et en vertu du caractère de divisibilité par 3

$$6n^5 + 15n^4 + 10^{2\mu-1}n - n = 3(2n^5 + 5n^4) + n(10^{2\mu-1} - 1) \equiv n(10^{2\mu-1} - 1)$$
$$\equiv 0 \pmod 3$$

tandis que d'après le théorème de Fermat

$$6n^5 + 15n^4 + 10^{2\mu-1}n - n = 5(3n^4 + 2 \cdot 10^{2\mu-2}n) + 5n^5 + n(n^4 - 1)$$
$$\equiv n(n^4 - 1) \equiv 0 \pmod 5$$

d'où $30 | 6n^5 + 15n^4 + 10^{2\mu-1}n - n$ c'est-à-dire $R_5(n, 2 \cdot 10^{\mu-1}) \equiv 0 \pmod{10^\mu}$. Ainsi nous avons démontré que

$$S_5(2 \cdot 10^{\mu-1}) \equiv R_5(n, 2 \cdot 10^{\mu-1}) \equiv 0 \pmod{10^\mu}$$
$$\text{pour } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ et } \mu \geqslant 2$$

et, par conséquent, en vertu de (2), on a

$$S_5(n + 2 \cdot 10^{\mu-1}) \equiv S_5(n) \pmod{10^\mu} \qquad \text{pour } n = 0, 1, 2, \ldots; \mu \geqslant 2$$

c'est-à-dire le nombre $2 \cdot 10^{\mu-1}$ est une période modulo 10^μ de la suite $\{S_5(n)\}$ pour $\mu \geqslant 2$.

Nous allons démontrer que c'est la plus courte période.

Or, le nombre $\varrho_{\mu,5}$ étant la plus courte période modulo 10^μ de la suite $\{S_5(n)\}$, nous avons évidemment pour $\mu \geqslant 2$: $\varrho_{\mu,5} | 2 \cdot 10^{\mu-1}$. Supposons que $\varrho_{\mu,5} < 2 \cdot 10^{\mu-1}$ pour $\mu \geqslant 2$. Alors $\varrho_{\mu,5} | 10^{\mu-1}$ ou $\varrho_{\mu,5} | 4 \cdot 10^{\mu-2}$ pour $\mu \geqslant 2$, c'est à-dire $10^{\mu-1}$ ou $4 \cdot 10^{\mu-2}$ est une période modulo $10^\mu (\mu \geqslant 2)$ de cette suite. En vertu du lemme 3 et de (2), pour que le nombre naturel q soit une période modulo 10^μ de la suite $\{S_5(n)\}$, il faut que la congruence

$$R_5(n, q) \equiv 0 \pmod{10^\mu} \qquad \text{pour } n = 0, 1, 2, \ldots$$

soit satisfaite.

Mais

$$\begin{aligned}R_5(n, 10^{\mu-1}) &= 10^{5\mu-5}n + 5\cdot 10^{3\mu-3}n^2 + 5\cdot 10^{2\mu-1}n^3 + 10^{\mu-1}n^5 + \\ &\quad + 5\cdot 10^{\mu-1}(10^{3\mu-3}n^2 + 10^{3\mu-3}n + 10^{\mu-1}n^4 + 10^{\mu-1}n^2 + n^4)/2) \\ &\quad + 5\cdot 10^{\mu-1}(2\cdot 10^{2\mu-2}n^3 + 10^{2\mu-2}n + n^3)/3 - 10^{\mu-1}n/6 \\ &= 10^{\mu}(10^{4\mu-5}n + 5\cdot 10^{2\mu-3}n^2 + 5\cdot 10^{\mu-2}n^3) + \\ &\quad + 10^{\mu}n^5/10 + 10^{\mu}.10^{3\mu-3}(n^2 + n)/4 + \\ &\quad + 10^{\mu}\cdot 10^{\mu-1}(n^4 + n^2)/4 + 10^{\mu}n^4/4 + \\ &\quad + 10^{\mu}(2\cdot 10^{2\mu-2}n^3 + 10^{2\mu-2}n + n^3)/6 - 10^{\mu}n/60 \\ &\equiv 10^{\mu}[n^5/10 + n^4/4 + 10^{2\mu-2}(2n^3 + n)/6 + n^3/6 - n/60] \\ &\equiv 10^{\mu}[6n^5 + 15n^4 + 10^{2\mu-1}(2n^3 + n) + \\ &\quad + 10n^3 - n]/60 \not\equiv 0 \pmod{10^{\mu}}\end{aligned}$$

pour $\mu \geqslant 2$ et pour tout $n \equiv 2 \pmod 4$, car

$$4 \mid 10^{2\mu-1} \quad \text{pour } \mu \geqslant 2$$

et

$$\sim 4 \mid 6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n \quad \text{pour } n \equiv 2 \pmod 4,$$

d'où

$$\sim 60 \mid 6n^5 + 15n^4 + 10^{2\mu-1}(2n^3 + n) + 10n^3 - n.$$

Donc le nombre $10^{\mu-1}$ ne peut être une période.

Pareillement, un simple calcul montre que l'on a

$$\begin{aligned}R_5(n, 4\cdot 10^{\mu-2}) &= 10^{\mu}(1536\cdot 10^{4\mu-8}n + 48\cdot 10^{2\mu-3}n^2 + 12\cdot 10^{\mu-1}n^3 + \\ &\quad + 6n^5 + 96.10^{3\mu-5}n^2 + 96.10^{3\mu-5}n + 6\cdot 10^{\mu-1}n^4 + \\ &\quad + 6\cdot 10^{\mu-1}n^2 + 15n^4 + 32\cdot 10^{2\mu-3}n^3 + 16\cdot 10^{2\mu-3}n \\ &\quad + 10n^3 - n)/150 \not\equiv 0 \pmod{10^{\mu}}\end{aligned}$$

pour tout $n \equiv 2 \pmod{25}$ et $\mu \geqslant 2$, car l'expression entre parenthèses n'est pas divisible par 25, et d'autant plus par 150 pour $n \equiv 2 \pmod{25}$. Donc le nombre $4\cdot 10^{\mu-2}$ ne peut pas non plus être une période, et, par conséquent, le théorème est bien vrai pour $p = 5$.

(iii) Pour les autres p impairs, c'est-à-dire $p = 3, 7, 9$. les démonstrations sont très semblables, c'est pourquoi je vais démontrer le théorème seulement pour $p = 7$ (ce cas est typique pour tous les trois).

De la formule donnée pour $S_7(n)$ au début de la démonstration du théorème, de même que la formule (2) nous obtenons pour tout entier positif q

$$S_7(n+q) = S_7(n) + S_7(q) + R_7(n, q)$$

(3) où

$$\begin{aligned} R_7(n, q) = {} & q^7 n + 3q^6(n^2+n) + q^5(7n^3+10n^2+3n) + \\ & + q^4(8n^4+17n^3+8n^2) + q^3(17n^7+7n^5+11n^3-n) + \\ & + q^2(3n^6+10n^5+8n^4-n^2) + q(n^7+3n^6+3n^5-n^3) + \\ & + q[q^5(n^2+n) + q^4(n^2+n) + q^3n^3 + q^2n^4 + qn^5(n+1) + \\ & + n^5(n+1)]/2 + 2q^3n^3/3 + 3q[q^3n^2(n^2+1) + qn^2(n^2-1)]/4 + \\ & + qn(1-n^2-q^2)/6. \end{aligned}$$

De même que précédemment, la démonstration se fera en deux partie pour les cas $\mu = 1$ et $\mu \geqslant 2$.

a) $\mu = 1$.

La démonstration est la même que pour $p = 5$.

β) $\mu \geqslant 2$.

Remarquons que

$$\begin{aligned} S_7(10^\mu) &= 10^{2\mu}(10^\mu+1)^2(3\cdot 10^{4\mu} + 6\cdot 10^{3\mu} - 10^{2\mu} - 4\cdot 10^\mu + 2)/24 \\ &= 10^\mu \cdot 5^2 \cdot 10^{\mu-2}(10^\mu+1)^2(15\cdot 10^{4\mu-1} + 3\cdot 10^{3\mu} - 5\cdot 10^{2\mu-1} - 2\cdot 10^\mu + 1)/3 \\ &\equiv 0 \pmod{10^\mu} \end{aligned}$$

car $3 \mid 15\cdot 10^{4\mu-1} + 3\cdot 10^{3\mu} - 5\cdot 10^{2\mu-1} - 2\cdot 10^\mu + 1$ en vertu du caractère de divisibilité par 3. De même, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ et $\mu \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} R_7(n, 10^\mu) = {} & 10^{7\mu}n + 3\cdot 10^{6\mu}(n^2+n) + 10^{5\mu}(7n^3+10n^2+3n) + \\ & + 10^{4\mu}(8n^4+17n^3+8n^2) + 10^{3\mu}(17n^7+7n^5+11n^3-n) + \\ & + 10^{2\mu}(3n^6+10n^5+8n^4-n^2) + 10^\mu(n^7+3n^6+3n^5-n^3) + \\ & + 10^\mu[5\cdot 10^{5\mu-1}(n^2+n) + 5\cdot 10^{4\mu-1}(n^2+n) + 5\cdot 10^{3\mu-1}n^3 + \\ & + 5\cdot 10^{2\mu-1}n^4 + 5\cdot 10^{\mu-1}n^5(n+1)] + \\ & + 10^\mu n^5(n+1)/2 + 2\cdot 10^{3\mu}n^3/3 + \\ & + 3\cdot 10^\mu[5^2\cdot 10^{3\mu-2}n^2(n^2+1) + 5^2\cdot 10^{\mu-2}n^2(n^2-1)] + \\ & + 10^\mu n(1-n^2-10^{2\mu})/6 \\ \equiv {} & 2\cdot 10^{3\mu}n^3/3 + 10^\mu n(1-n^2-10^{2\mu})/6 \pmod{10^\mu} \end{aligned}$$

car $2 \mid n^5(n+1)$. Donc, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, et $\mu \geqslant 2$,

$$R_7(n, 10^\mu) \equiv 10^\mu(4\cdot 10^{2\mu}n^3 + n - n^3 - 10^{2\mu}n)/6 \equiv 0 \pmod{10^\mu}$$

car l'expression entre parenthèses est divisible par 2, et aussi par 3, ce qu'on peut vérifier en prenant successivement: $n \equiv 0, \pm 1 \pmod 3$.

Comme nous avons démontré que $S_7(10^\mu) \equiv R_7(n, 10^\mu) \equiv 0 \pmod{10^\mu}$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ et $\mu \geqslant 2$, nous avons en vertu de (3)

$$S_7(n + 10^\mu) \equiv S_7(n) \pmod{10^\mu} \text{ pour } n = 0, 1, 2, \ldots; \ \mu \geqslant 2$$

c'est à dire le nombre 10^μ est une période modulo 10^μ de la suite $\{S_7(n)\}$ pour $\mu \geqslant 2$.

Je vais démontrer que c'est la plus courte période.

Évidemment, pour $\mu \geqslant 2$, $\varrho_{\mu,7} | 10^\mu$ ($\varrho_{\mu,7}$ — la plus courte période modulo 10^μ de cette suite). Supposons que $\varrho_{\mu,7} < 10^\mu$. Alors, $\varrho_{\mu,7} | 2 \cdot 10^{\mu-1}$ ou $\varrho_{\mu,7} | 5 \cdot 10^{\mu-1}$, c'est à dire $2 \cdot 10^{\mu-1}$ ou $5 \cdot 10^{\mu-1}$ est la période modulo 10^μ de notre suite. En vertu du lemme 3 et de (3) pour que le nombre naturel q soit une période modulo 10^μ de la suite $\{S_7(n)\}$ il faut que la congruence

$$R_7(n, q) \equiv 0 \pmod{10^\mu} \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \ldots$$

soit satisfaite.

Mais

$$\begin{aligned}
&R_7(n, 2 \cdot 10^{\mu-1}) = \\
&= 2^7 \cdot 10^{7\mu-7} n + 3 \cdot 2^6 \cdot 10^{6\mu-6}(n^2 + n) + 2^5 \cdot 10^{5\mu-5}(7n^3 + 10n^2 + 3n) + \\
&\quad + 2^4 \cdot 10^{4\mu-4}(8n^4 + 17n^3 + 8n^2) + 2^3 \cdot 10^{3\mu-3}(17n^7 + 7n^5 + 11n^3 - n) + \\
&\quad + 2^2 \cdot 10^{2\mu-2}(3n^6 + 10n^5 + 8n^4 - n^2) + 2 \cdot 10^{\mu-1}(n^7 + 3n^6 + 3n^5 - n^3) + \\
&\quad + 10^{\mu-1}[2^5 \cdot 10^{5\mu-5}(n^2 + n) + 2^4 \cdot 10^{4\mu-4}(n^2 + n) + 2^3 \cdot 10^{3\mu-3} n^3 + \\
&\quad + 2^2 \cdot 10^{2\mu-2} n^4 + 2 \cdot 10^{\mu-1} n^5 (n + 1) + n^5 (n + 1)] + \\
&\quad + 2^4 \cdot 10^{3\mu-3} n^3 / 3 + 3 \cdot 10^{\mu-1}[2^3 \cdot 10^{3\mu-3} n^2 (n^2 + 1) + 2 \cdot 10^{\mu-1} n^2 (n^2 - 1)]/2 + \\
&\quad + 10^{\mu-1} n (1 - n^2 - 2^2 \cdot 10^{2\mu-2})/3 \\
&= 10^\mu [2^7 \cdot 10^{6\mu-7} n + 3 \cdot 2^6 \cdot 10^{5\mu-6}(n^2 + n) + \\
&\quad + 2^5 \cdot 10^{4\mu-5}(7n^3 + 10n^2 + 3n) + 2^4 \cdot 10^{3\mu-4}(8n^4 + 17n^3 + 8n^2) + \\
&\quad + 2^3 \cdot 10^{2\mu-3}(17n^7 + 7n^5 + 11n^3 - n) + \\
&\quad + 2^2 \cdot 10^{\mu-2}(3n^6 + 10n^5 + 8n^4 - n^2) + \\
&\quad + (n^7 + 3n^6 + 3n^5 - n^3)/5 + 2^5 \cdot 10^{5\mu-6}(n^2 + n) + \\
&\quad + 2^4 \cdot 10^{4\mu-5}(n^2 + n) + 2^3 \cdot 10^{3\mu-4} n^3 + 2^2 \cdot 10^{2\mu-3} n^4 + \\
&\quad + 2 \cdot 10^{\mu-2} n^5 (n + 1) + n^5 (n + 1)/10 + 2^4 \cdot 10^{2\mu-3} n^3 / 3 + \\
&\quad + 3 \cdot 2^2 \cdot 10^{3\mu-4} n^2 (n^2 + 1) + 3 \cdot 10^{\mu-2} n^2 (n^2 - 1) + \\
&\quad + n(1 - n^2 - 2^2 \cdot 10^{2\mu-2})/30] \\
&\equiv 10^\mu [(n^7 + 3n^6 + 3n^5 - n^3)/5 + n^5 (n + 1)/10 + \\
&\quad + 16 \cdot 10^{2\mu-3} n^3 / 3 + n(1 - n^2 - 4 \cdot 10^{2\mu-2})/30] \\
&\equiv 10^\mu (6n^7 + 21n^6 + 21n^5 - 7n^3 + 10^{2\mu-2} n^3 + n - 4 \cdot 10^{2\mu-2} n)/30 \\
&\not\equiv 0 \pmod{10^\mu}
\end{aligned}$$

pour $\mu \geqslant 2$ et pour tout $n \equiv 1 \pmod 5$ car l'expression entre parenthèses n'est pas divisible par 5, et d'autant plus par 30, pour $n \equiv 1 \pmod 5$.

Donc $2.10^{\mu-1}$ ne peut pas être une période.

Pareillement, par un calcul simple, nous trouvons

$$R_7(n, 5\cdot 10^{\mu-1}) \equiv 10^\mu(6n^7+21n^6+21n^5-n^3+10^{2\mu}n^3-5n-5^2\cdot 10^{2\mu-2}n)/12$$
$$\not\equiv 0 \pmod{10^\mu} \quad \text{pour } \mu \geqslant 2 \text{ et } n \equiv 1 \pmod 4$$

puisque l'expression entre parenthèses n'est pas divisible par 4, et d'autant plus par 12, pour $n \equiv 1 \pmod 4$.

Donc $5\cdot 10^{\mu-1}$ ne peut pas non plus être une période, et, par conséquent, le nombre 10^μ est la plus courte période modulo 10^μ ($\mu \geqslant 2$) de la suite $\{S_7(n)\}$, ce qui entraîne le théorème pour $p = 7$.

Les démonstrations pour $p = 3$ et pour $p = 9$, en principe analogues, sont même plus simples dans les détails du calcul; la différence principale consiste en ce qu'il faut démontrer que

$R_3(n, 2\cdot 10^{\mu-1}) \not\equiv 0 \pmod{10^\mu}$ pour $\mu \geqslant 2$ et n impairs (dans le cas $p = 7$ ou $p = 3$ on a $n \equiv 1 \pmod 5$).

(iv) En ce qui concerne les cas $p = 2$ et $p = 6$, les démonstrations sont aussi trés semblables; c'est pourquoi je ne donnerai que celle du cas plus simple dans les détails, à savoir pour $p = 2$.

De même que précédemment les formules (2) et (3), nous obtenons pour tout q naturel la formule

$$(4) \quad S_2(n+q) = S_2(n)+S_2(q)+R_2(n,q), \quad \text{où} \quad R_2(n,q) = n^2q+nq^2+nq.$$

Remarquons que

$$S_2(2\cdot 10^\mu) = 2\cdot 10^\mu(2\cdot 10^\mu+1)(4\cdot 10^\mu+1)/6 = 10^\mu(2\cdot 10^\mu+1)(4\cdot 10^\mu+1)/3$$
$$\equiv 0 \pmod{10^\mu}$$

car $\sim 3 | 10^\mu$, donc on doit avoir $3 | (2\cdot 10^\mu+1)(4\cdot 10^\mu+1)$, puisque $S_2(2\cdot 10^\mu)$ est entier (en réalité $3 | 2\cdot 10^\mu+1$ en vertu du caractère de divisibilité)(1). De même, on a évidemment

$$R_2(n, 2\cdot 10^\mu) = 2\cdot 10^\mu n^2+4\cdot 10^{2\mu}n+2\cdot 10^\mu n \equiv 0 \pmod{10^\mu}$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ De là et en vertu de la formule (4)

$$S_2(n+2\cdot 10^\mu) \equiv S_2(n) \pmod{10^\mu} \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

c'est-à-dire le nombre $2\cdot 10^\mu$ est une période modulo 10^μ de la suite $\{S_2(n)\}$. Je vais démontrer, que c'est la plus courte période.

(1) Dans le cas $p = 6$ on démontre de la même manière la divisibilité par 7, nécessaire dans ce cas.

Évidemment $\varrho_{\mu,2} | 2 \cdot 10^{\mu}$ (où $\varrho_{\mu,2}$ est la plus courte période modulo 10^{μ} de cette suite). Supposons que $\varrho_{\mu,2} < 2 \cdot 10^{\mu}$. Alors $\varrho_{\mu,2} | 10^{\mu}$ ou $\varrho_{\mu,2} | 4 \cdot 10^{\mu-1}$ c'est-à-dire 10^{μ} ou $4 \cdot 10^{\mu-1}$ est aussi une période.

Mais

$$S_2(10^{\mu}) = 10^{\mu}(10^{\mu}+1)(2 \cdot 10^{\mu}+1)/6 \not\equiv 0 \pmod{10^{\mu}}$$

car $(10^{\mu}+1)(2 \cdot 10^{\mu}+1)$ n'est pas divisible par 2, et d'autant plus par 6.

En ce qui concerne le nombre $4 \cdot 10^{\mu-1}$, de même que dans les cas précédents, en vertu du lemme 3 et de (4) il faut, pour que le nombre naturel q soit la période modulo 10^{μ} de notre suite que la congruence

$$R_2(n, q) \equiv 0 \pmod{10^{\mu}} \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \ldots$$

soit satisfaite.

Mais

$$\begin{aligned} R_2(n, 4 \cdot 10^{\mu-1}) &= 4 \cdot 10^{\mu-1} n^2 + 16 \cdot 10^{2\mu-2} n + 4 \cdot 10^{\mu-1} n \\ &= 10^{\mu}(2n^2 + 8 \cdot 10^{\mu-1} n + 2n)/5 \not\equiv 0 \pmod{10^{\mu}} \end{aligned}$$

pour tout $n \equiv 1 \pmod 5$, car on vérifie qu'en prenant séparément les cas $\mu = 1$ et $\mu \geqslant 2$, on a $\sim 5 | 2n^2 + 8 \cdot 10^{\mu-1} n + 2n$ pour $n \equiv 1 \pmod 5$.

Par conséquent, ni 10^{μ} ni $4 \cdot 10^{\mu-1}$ ne peuvent pas être des périodes modulo 10^{μ} de la suite $\{S_2(n)\}$, donc $2 \cdot 10^{\mu}$ en est la plus courte période modulo 10^{μ}. La démonstration dans le cas $p = 6$ est tout à fait analogue.

(v) Les démonstrations pour $p = 4$ et $p = 8$ sont si simples que je me bornerai à esquisser leur schéma commun.

De même que précédemment nous obtenons par un calcul simple pour tout q naturel:

$$S_p(n+q) = S_p(n) + S_p(q) + R_p(n, q), \quad p = 4, 8, \tag{5}$$

où $R_p(n, q)$ est un polynôme à coefficients rationnels en n et q.

On démontre presque immédiatement que $S_p(10^{\mu+1}) \equiv 0 \pmod{10^{\mu}}$. et que $R_p(n, 10^{\mu+1}) \equiv 0 \pmod{10^{\mu}}$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$. La divisibilité, nécessaire ici, se démontre de même que dans (iv), c'est-à-dire en profitant du fait que $\sim 3 | 10$ et que $S_p(10^{\mu+1})$ et $R_p(n, 10^{\mu+1})$ doivent être entiers, pour n naturel.

De là et de (5) nous obtenons

$$S_p(n + 10^{\mu+1}) \equiv S_p(n) \pmod{10^{\mu}} \text{ pour } n = 0, 1, 2, \ldots; \; p = 4, 8.$$

c'est-à-dire $10^{\mu+1}$ est une période modulo 10^{μ} des suites $\{S_4(n)\}$ et $\{S_8(n)\}$.

Évidemment $\varrho_{\mu p} | 10^{\mu+1}$ $(p = 4; 8)$. Supposons que $\varrho_{\mu p} < 10^{\mu+1}$ pour $p = 4, 8$. Alors $\varrho_{\mu p} | 2 \cdot 10^\mu$ ou $\varrho_{\mu p} | 5 \cdot 10^\mu$ $(p = 4, 8)$, c'est-à-dire $2 \cdot 10^\mu$ ou $5 \cdot 10^\mu$ est une période. Mais on démontre facilement que ces deux nombres ne satisfont pas aux conditions du lemme 3, donc ils ne peuvent pas être des périodes; c'est pourquoi $10^{\mu+1}$ est la plus courte période modulo 10^μ de toutes les deux suites. Le théorème est donc bien vrai pour $p = 4$ et $p = 8$.

Puisque le théorème est vrai dans les cas (i) — (v), il est vrai en son entier, c. q. f. d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Schwatt I. J., *An introduction to the operations with series*, *Philadelphia* 1924, p. 88.

[2] Ząbek Ś., *Sur la périodicité modulo m des suites de nombres* $\binom{n}{k}$, Ann. Univ Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **10**, 3 (1956) p. 37—47.

Streszczenie

W pracy tej, stanowiącej kontynuację mej poprzedniej pracy [2]. dowodzi się twierdzenia, dotyczącego okresowości i najkrótszego okresu modulo 10^μ ciągów liczb $S_p(n)$, gdzie $S_p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^p$, p jest ustaloną liczbą całkowitą nieujemną, $n = 0, 1, 2, \ldots, \mu$ jest dowolną liczbą naturalną. Mianowicie dowodzi się, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej p i dla dowolnej liczby naturalnej m ciąg liczb $S_p(n)$ jest okresowy modulo m, oraz że najkrótsze okresy $\varrho_{\mu p}$ modulo 10^μ ciągów liczb $S_p(n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ dla $p = 0, 1, 2, \ldots, 9$ mają wartości przedstawione w tabelce na stronicy 146.

Резюме

В работе, являющейся продолжением моей предыдущей работы [2] доказывается теоремы, касающейся периодичности по модулю 10^μ последовательностей чисел $S_p(n)$, где $S_p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^p$, p целое неотрицательное постоянное, $n = 0, 1, 2, \ldots$, μ произвольное и натуральное число. Доказывается именно, что всякая последовательность чисел $S_p(n)$ (p целое неотрицательное число $n = 0, 1, 2, \ldots$) периодическая по модулю m, где m произвольное натуральное число; и что кратчайшие периоды $\varrho_{\mu p}$ по моъулю 10^μ последовательностей чисел $S_p(n)$ $(n = 0, 1. 2, \ldots)$ для $p = 0, 1, 2, \ldots 9$ имеют значения в виде табели на стр. 146.