

Kierownik: prof. dr A. Bielecki

JAN KISYŃSKI

O zadaniu Picarda dla równania hiperbolicznego o pochodnych cząstkowych rzędu drugiego

О задаче Пикара для гиперболического уравнения с частными производными второго порядка

I

Nous admettons l'hypothèse suivante qui sera valable partout dans cette note.

Hypothèse (H₁).

$f(x, y, z, p, q)$ est une fonction définie et continue dans le domaine

$$D = \{(x, y, z, p, q); \quad 0 \leq x \leq a, |y| \leq b\},$$

où $a > 0$ et $b > 0$; $g(x)$ et $\sigma(x)$ sont deux fonctions définies et continues dans l'intervalle $\langle 0, a \rangle$ et $\tau(y)$ est une fonction définie et continue dans l'intervalle $\langle -b, b \rangle$; $\sigma(0) = \tau(0)$, $g(0) = 0$ et $|g(x)| \leq b$ pour $x \in \langle 0, a \rangle$.

Nous nous occuperons du problème suivant, qui sera dit problème de Picard ou problème (P):

Problème (P).

Existe-t-il une fonction $z(x, y)$ définie dans le rectangle

$$R = \{(x, y); 0 \leq x \leq a, |y| \leq b\}$$

et jouissant des propriétés suivantes:

1° la fonction $z(x, y)$ et ses dérivées partielles $p(x, y) = \partial z(x, y)/\partial x$, $q(x, y) = \partial z(x, y)/\partial y$ et $s(x, y) = \partial^2 z(x, y)/\partial x \partial y$ sont définies et continues dans le rectangle R (nous dirons tout court que la fonction $z(x, y)$ est de classe $C^{(1*)}$);

2° la fonction $z(x, y)$ vérifie, pour $(x, y) \in R$, l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

3° elle satisfait aux conditions

$$(2) \quad \begin{aligned} z(x, g(x)) &= \sigma(x) \text{ pour } x \in \langle 0, a \rangle, \\ z(0, y) &= \tau(y) \text{ pour } y \in \langle -b, b \rangle. \end{aligned}$$

Le problème de Darboux, où $g(x) \equiv 0$ pour $x \in \langle 0, a \rangle$, étant un cas particulier du problème (P), il s'ensuit d'un exemple dû à P. Hartman et A. Wintner ([4], p. 841) que dans l'hypothèse (H_1) les solutions peuvent ne pas exister si l'on n'ajoute aucune hypothèse additionnelle relative à la fonction $f(x, y, z, p, q)$. On aura aussi à spécifier plus étroitement les conditions 3° en imposant certaines conditions plus restrictives aux fonctions $g(x)$, $\sigma(x)$ et $\tau(y)$. Il sera commode d'écrire séparément ces nouvelles hypothèses qui seront aussi valables partout dans la suite.

Hypothèse (H_2) .

Il existe deux fonctions $\omega_i(x, y, \delta)$, $i = 1, 2$, définies et continues pour $(x, y) \in R$ et $\delta \in \langle 0, +\infty \rangle$, non négatives, non décroissantes par rapport à δ , telles que

$$(\alpha) \quad \omega_i(x, y, 0) \equiv 0 \text{ pour } (x, y) \in R \text{ et } i = 1, 2;$$

$$(\beta) \quad |f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})| \leq \omega_1(x, y, |q - \bar{q}|) + \omega_2(x, y, |p - \bar{p}|)$$

si les points (x, y, z, p, q) et $(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})$ appartiennent au domaine D ;

(\gamma) Si une fonction $\varphi(x)$ est de classe $C^{(1)}$ ⁽¹⁾ dans l'intervalle $\langle 0, a_1 \rangle$, si $\varphi(0) = 0$ et si

$$\varphi'(x) = \omega_1(x, y^\circ, \varphi(x)) \text{ pour } x \in \langle 0, a_1 \rangle,$$

où $0 < a_1 \leq a$ et $y^\circ = \text{const} \in \langle -b, b \rangle$, alors $\varphi(x) \equiv 0$ dans l'intervalle $\langle 0, a_1 \rangle$.

Si une fonction $\psi(y)$ est de classe $C^{(1)}$ dans l'intervalle $\langle b_1, b_2 \rangle$ où $-b < b_1 < b_2 < b$, si $g(x^\circ) \in (b_1, b_2)$ et $\psi(g(x^\circ)) = 0$, où x° désigne un nombre quelconque de l'intervalle $\langle 0, a \rangle$, et si

$$\psi'(y) = -\omega_2(x^\circ, y, \psi(y)) \text{ pour } y \in \langle b_1, g(x^\circ) \rangle,$$

$$\psi'(y) = \omega_2(x^\circ, y, \psi(y)) \text{ pour } y \in \langle g(x^\circ), b_2 \rangle,$$

alors $\psi(y) \equiv 0$ dans l'intervalle $\langle b_1, b_2 \rangle$ ⁽²⁾.

(1) Cela veut dire qu'elle est continue et qu'elle a une dérivée continue du premier ordre.

(2) Cette hypothèse (H_2) est semblable à l'hypothèse K dans [7], p. 69.

Hypothèse (H₃).

Il existe deux nombres positifs A et B tels que

$$|f(x, y, z, 0, 0)| \leq A + B \cdot |z|$$

pour $(x, y) \in R$ et $-\infty < z < +\infty$.

Cette hypothèse est essentielle pour l'existence d'une solution non locale du problème (P).

Hypothèse (H₄)⁽³⁾.

La fonction $g(x)$ a une dérivée du premier ordre continue dans l'intervalle $(0, a)$, ouvert à gauche, et

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot g'(x) = 0.$$

Évidemment, l'égalité (3) a lieu si $g(x)$ est de classe $C^{(1)}$ dans l'intervalle $\langle 0, a \rangle$ tout entier. Dans ce cas particulier, le problème (P) se simplifie considérablement et du moins l'existence locale d'une solution est assurée, dans les hypothèses (H₁) et (H₂), par un théorème bien général dû à M^{lle} Z. Szmydt (cf. [7], théorème 2, p. 70). L'égalité (3) est aussi vraie si l'on suppose la dérivée $g'(x)$ monotone dans un voisinage du point $x = 0$ (Cf. [3], p. 120).

Hypothèse (H₅).

Il existe une fonction $\chi(x, y)$ de classe $C^{(1)}$ ⁽⁴⁾ dans le rectangle R , telle que

$$|\chi'_y(x, y) - \chi'_y(\bar{x}, y)| \leq K \cdot |x - \bar{x}|, \quad K = \text{const} > 0,$$

$\chi(x, g(x)) \equiv \sigma(x)$ pour $x \in \langle 0, a \rangle$ et $\chi(0, y) \equiv \tau(y)$ pour $y \in \langle -b, b \rangle$.

Remarquons que l'hypothèse (H₅) étant satisfaite par toute solution du problème (P), elle est une condition nécessaire, à vrai dire tout à fait triviale, pour l'existence des solutions (Cf. [3], p. 109).

II

Nous allons donner quelques exemples⁽⁵⁾ qui expliqueront le rôle des hypothèses (H₃), (H₄) et (H₅).

1. Admettons que $f(x, y, z, p, q) \equiv 1$ dans le domaine D , $\sigma(x) \equiv 0$ et $\tau(y) \equiv 0$ dans les intervalles $\langle 0, a \rangle$ et $\langle -b, b \rangle$ respectivement et

⁽³⁾ Une condition semblable a été introduite dans [3], p. 111.

⁽⁴⁾ C'est-à-dire ayant les dérivées partielles du premier ordre continues.

⁽⁵⁾ Ces exemples m'ont été communiqués par M. A. Bielecki.

supposons qu'une fonction $z(x, y)$ de classe $C^{(1*)}$ soit une solution du problème correspondant (P), Or, toute solution de l'équation (1) étant dans ce cas de la forme $xy + G(x) + H(y)$ où l'on peut évidemment supposer que $G(0) = 0$, nous constatons sans peine que $H(y) \equiv 0$ et $z(x, g(x)) \equiv \equiv x \cdot g(x) + G(x) \equiv 0$, où $G(x)$ est une fonction de classe $C^{(1)}$. Il s'ensuit que

$$\lim_{x \rightarrow 0+} xg'(x) = - \lim_{x \rightarrow 0+} [g(x) + G'(x)] = - \lim_{x \rightarrow 0+} [g(x) + x^{-1} \cdot G(x)] = 0.$$

Nous avons ainsi montré que la condition (H_4) est indispensable si l'on veut caractériser une classe des fonctions admissibles indépendamment des autres fonctions qui interviennent dans le problème^(*).

2. Soit $f(x, y, z, p, q) \equiv 0$, $a = b = 1$, $g(x) \equiv \sqrt{x}$, $\sigma(x) \equiv 0$ et $\tau(y) \equiv y$. On voit facilement que dans ce cas la fonction $z(x, y) = -\sqrt{x} + y$ est l'unique solution de l'équation (1) compatible avec les conditions (2). Donc il n'existe aucune solution du problème (P) régulière au point $(0, 0)$, bien que les conditions $(H_1) - (H_4)$ soient remplies. Évidemment, il n'existe aucune fonction $\chi(x, y)$ de classe $C^{(1)}$ dans le rectangle D tout entier qui satisfasse aux conditions $\chi(x, g(x)) \equiv \sigma(x)$ et $\chi(0, y) \equiv \tau(y)$ résultant de l'hypothèse (H_5) . Cependant, cet exemple simple n'explique pas encore le rôle de l'inégalité de Lipschitz, imposée à la dérivée partielle $\chi'_y(x, y)$ dans l'hypothèse (H_5) . Nous allons donc construire encore un exemple.

3. Admettons que $a = b = 1$, $f(x, y, z, p, q) \equiv 0$, $g(x) \equiv \sqrt{x}$ et

$$\chi(x, y) = \begin{cases} x^2 y^{-3} (3y^2 - 2x) \sin y^{-1} & \text{pour } y \neq 0, 0 \leq x \leq y^3 \\ y^3 \sin y^{-1} & \text{pour } y \neq 0, x \geq y^2 \\ 0 & \text{pour } y = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\chi'_x(x, y) = \begin{cases} 6xy^{-3}(y^2 - x) \sin y^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad \text{resp.}$$

et

$$\chi'_y(x, y) = \begin{cases} 3x^2 y^{-4} (2x - y^2) \sin y^{-1} - x^2 y^{-5} (3y^2 - 2x) \cos y^{-1} \\ 3y^2 \sin y^{-1} - y \cos y^{-1} \\ 0 \end{cases} \quad \text{resp.}$$

(*) Nous n'insisterons pas ici sur la question s'il est possible de remplacer les hypothèses (H_4) et (H_5) par quelques conditions moins gênantes, sous forme de certaines relations entre les diverses fonctions qui figurent dans l'énoncé du problème (P).

Il n'est pas difficile de constater que la fonction $\chi(x, y)$ ainsi définie est de classe $C^{(1)}$, mais sa dérivée $\chi'_y(x, y)$ ne satisfait pas à la condition de Lipschitz par rapport à x , donc l'hypothèse (H_5) est en défaut. D'autre part, on vérifie sans peine que la solution de l'équation (1) satisfaisant aux conditions (2) doit avoir, dans ce cas, la forme

$$z(x, y) = x^{3/2} \sin x^{-1/2},$$

d'où

$$z'_x(x, y) = \frac{3}{2} x^{1/2} \sin x^{-1/2} - \frac{1}{2} \cos x^{-1/2} \quad \text{pour } x > 0.$$

Donc il n'y a pas de solutions régulières du problème (P), car la dernière fonction n'admet pas de limite déterminée pour $x = 0$.

4. Considérons l'équation $s = (k^2 + k^4 xy) z^3$ et admettons que $0 < a = b < k^{-1}$. La fonction $z(x, y) = (1 - k^2 xy)^{-1}$ vérifie, dans R, l'équation envisagée ainsi que les conditions $z(x, 0) \equiv z(0, y) \equiv 1$. Or, il n'est par possible de prolonger cette solution au-delà du rectangle $0 \leq x \leq k^{-1}$, $0 \leq y \leq k^{-1}$ ainsi que dans l'hypothèse (H_3) on devrait, dans tous les cas, se borner au problème local du type (P).

III

Réduction du problème (P).

Supposons que les hypothèses $(H_1) - (H_5)$ soient vérifiées et que

$$\begin{aligned} U(x) &= \sigma(x) - \tau(g(x)) & \text{pour } x \in \langle 0, a \rangle \\ V(y) &= \tau(y) & \text{pour } y \in \langle -b, b \rangle \end{aligned}$$

Les fonctions $U(x)$ et $V(y)$ ainsi définies sont de classe $C^{(1)}$. En effet, ceci est évident si les fonctions $g(x)$ et $\sigma(x)$ sont de classe $C^{(1)}$ dans tout l'intervalle $\langle 0, a \rangle$. Sinon, il vient des hypothèses (H_4) et (H_5) que, pour $x \in \langle 0, a \rangle$, on a

$$U'(x) = \chi'_x(x, g(x)) + g'(x) (\chi'_y(x, g(x)) - \chi'_y(0, g(x)))$$

donc la dérivée $U'(x)$ est continue dans l'intervalle $(0, a)$ ouvert à gauche et, en plus, il existe une limite à droite

$$\lim_{x \rightarrow 0+} U'(x) = \chi'_x(0, 0).$$

Puisque la fonction $U(x)$ est continue dans l'intervalle $\langle 0, a \rangle$, elle doit être de classe $C^{(1)}$ dans cet intervalle. Quant à la fonction $\tau(y) = \chi(0, y)$,

il est évident qu'elle est aussi de classe $C^{(1)}$ (pour $y \in \langle -b, b \rangle$). De plus, on a

$$\begin{aligned} U(x) + V(g(x)) &= \sigma(x) \quad \text{pour } x \in \langle 0, a \rangle, \\ U(0) + V(y) &= \tau(y) \quad \text{pour } y \in \langle -b, b \rangle. \end{aligned}$$

Soit

$$f^*(x, y, z, p, q) = f(x, y, z + U(x) + V(y), p + U'(x), q + V'(y))$$

dans le domaine D . Si une fonction $z^*(x, y)$ de classe $C^{(1*)}$ satisfait dans le rectangle R à l'équation

$$(4) \quad \frac{\partial^2 z^*(x, y)}{\partial x \partial y} = f^*\left(x, y, z^*(x, y), \frac{\partial z^*(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial z^*(x, y)}{\partial y}\right)$$

et aux conditions

$$(5) \quad \begin{aligned} z^*(x, g(x)) &\equiv 0 && \text{pour } x \in \langle 0, a \rangle, \\ z^*(0, y) &\equiv 0 && \text{pour } y \in \langle -b, b \rangle, \end{aligned}$$

alors la fonction $z(x, y)$ représentée dans R par la formule

$$z(x, y) = z^*(x, y) + U(x) + V(y)$$

est aussi de classe $C^{(1*)}$ et elle vérifie l'équation (1), ainsi que les conditions (2) dans l'énoncé du problème (P), p. 6. Réciproquement, si une fonction $z(x, y)$ de classe $C^{(1*)}$ satisfait dans le rectangle R à l'équation (1) et aux conditions (2), la fonction

$$z^*(x, y) = z(x, y) - U(x) - V(y)$$

est de classe $C^{(1*)}$ et elle vérifie, dans R , les relations (4) et (5).

Pareillement, une fonction $f(x, y, z, p, q)$ continue dans le domaine D vérifie les hypothèses (H_2) resp. (H_3) si et seulement s'il en est de même de la fonction correspondante $f^*(x, y, z, p, q)$. Il suffira donc, dans la suite, d'envisager le problème (P) dans l'hypothèse simplifiée

$$(6) \quad \sigma(x) \equiv 0 \text{ pour } x \in \langle 0, a \rangle, \quad \tau(y) \equiv 0 \text{ pour } y \in \langle -b, b \rangle.$$

Le problème (P) réduit de cette façon sera dit problème (P^*) .

Equation intégrale auxiliaire. Soit $s(x, y)$ une fonction définie et continue dans le rectangle R et

$$(7) \quad \Theta_s(x, y) = \int_0^x \left\{ \int_{g(x)}^y s(u, v) dv \right\} du.$$

On constate sans peine, en appliquant la formule (3), que

$$(8) \quad \frac{\partial \Theta_s(x, y)}{\partial x} = \begin{cases} \int_{g(x)}^u s(x, v) dv - g'(x) \int_0^x s(u, g(x)) du & \text{pour } x > 0 \\ \int_0^u s(0, v) dv & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

et que cette dérivée est continue dans le rectangle R tout entier. De plus, on a

$$(9) \quad \frac{\partial \Theta_s(x, y)}{\partial y} = \int_0^x s(u, y) du,$$

d'où

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \Theta_s(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Theta_s(x, y)}{\partial y \partial x} = s(x, y)$$

et, par conséquent, la fonction $\Theta_s(x, y)$ est de classe $C^{(1*)}$ dans le rectangle R .

Supposons que $z(x, y)$ soit une solution du problème (P^*) — avec les conditions simplifiées (6) — et

$$s(x, y) = \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Or $\partial^2[z(x, y) - \Theta_s(x, y)]/\partial x \partial y = 0$ pour $(x, y) \in R$ et, par conséquent,

$$z(x, y) - \Theta_s(x, y) = G(x) + H(y)$$

pour $(x, y) \in R$, où $G(x)$ et $H(y)$ sont des fonctions de classe $C^{(1)}$ dans les intervalles $\langle 0, a \rangle$ ou $\langle -b, b \rangle$ respectivement. D'après (6)

$$G(x) + H(g(x)) = 0 \text{ pour } x \in \langle 0, a \rangle, \quad G(0) + H(y) = 0 \text{ pour } y \in \langle -b, b \rangle,$$

d'où $H(y) \equiv -G(0)$ et $G(x) \equiv G(0)$ et, par conséquent,

$$z(x, y) = \Theta_s(x, y) \text{ pour } (x, y) \in R.$$

Donc, la fonction $s(x, y) = \partial^2 z(x, y)/\partial x \partial y$ est continue et elle vérifie l'équation

$$(11) \quad s(x, y) = f\left(x, y, \Theta_s(x, y), \frac{\partial}{\partial x} \Theta_s(x, y), \frac{\partial}{\partial y} \Theta_s(x, y)\right)$$

dans le rectangle R si $z(x, y)$ est une solution du problème (P^*) . L'implication réciproque est aussi tout à fait évidente.

Nous avons ainsi établi une correspondance biunivoque entre les solutions $z(x, y)$ du problème (P*) et les solutions continues $s(x, y)$ de l'équation (11). Il suffira donc de s'occuper de ces dernières.

IV

Tout en conservant les hypothèses (H₁) — (H₅) énoncées dans le chapitre I, nous allons définir quelques fonctions auxiliaires et établir plusieurs lemmes.

Lemme 1.

Soit

$$D_\delta = \{(x, y, z, p, q, \bar{p}, \bar{q}); (x, y) \in R, |p - \bar{p}| + |q - \bar{q}| \leq \delta\}$$

et

$$(12) \quad \omega(\delta) = \sup_{D_\delta} |f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})|.$$

La fonction $\omega(\delta)$ ainsi définie est finie, non décroissante pour $\delta \geq 0$ et, en plus, on a

$$(13) \quad 0 \leq \omega(\delta) < (\delta + 1)\omega(1) \text{ pour } \delta \geq 0.$$

En effet, les fonctions $\omega_1(x, y, \delta)$ et $\omega_2(x, y, \delta)$ étant continues, en vertu de l'hypothèse (H₂), on a pour tout $\delta \geq 0$:

$$0 \leq \omega(\delta) \leq \sup_{(x, y) \in R} \omega_1(x, y, \delta) + \sup_{(x, y) \in R} \omega_2(x, y, \delta) < +\infty$$

donc $\omega(\delta)$ est finie partout dans l'intervalle $\langle 0, +\infty \rangle$. Comme la fonction $\omega(\delta)$ est évidemment non décroissante et satisfait à l'inégalité $\omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$, on a pour $n = \text{Ent}(\delta)$:

$$\omega(\delta) \leq \omega(n) + \omega(\delta - n) \leq n \cdot \omega(1) + \omega(1)$$

d'où l'inégalité (13).

Lemme 2.

$$(14) \quad |f(x, y, z, p, q)| \leq K \cdot (1 + |z| + |p| + |q|),$$

où

$$(15) \quad K = \max(A + \omega(1), B),$$

A et B étant les constantes qui figurent dans l'énoncé de l'hypothèse (H₃).

En effet on a, d'après (12) et (13),

$$\begin{aligned} |f(x, y, z, p, q)| &\leq |f(x, y, z, 0, 0)| + |f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, 0, 0)| \leq \\ &\leq A + B \cdot |z| + \omega(|p| + |q|) \leq A + B \cdot |z| + (1 + |p| + |q|) \cdot \omega(1), \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (14).

Nous allons maintenant définir encore une fonction. Pour cela, fixons un nombre positif ε tel que

$$(16) \quad \varepsilon + 4K\varepsilon + (1 + \varepsilon + 4K\varepsilon)e^{4K\varepsilon} \leq 2$$

et un nombre d satisfaisant aux conditions

$$(17) \quad 0 < d < a, \quad d \leq \varepsilon, \quad \sup_{0 < x < d} x|g'(x)| \leq \varepsilon, \quad \max_{0 < x < d} |g(x)| \leq \varepsilon.$$

Admettons que

$$(18) \quad \gamma = \max_{d \leq x \leq a} |g'(x)|,$$

$$(19) \quad \lambda = K \cdot (4 + \gamma + (2b + \gamma + 1) \cdot 4Kd \cdot e^{4Kb}) + 1$$

et posons⁽⁷⁾

$$(20) \quad M(x, y) = \begin{cases} 4K \exp 4K|y| & \text{si } 0 \leq x \leq d \text{ et } |y| \leq b, \\ \lambda \exp \lambda[(\gamma + 1)x + |y - g(x)|] & \text{si } d < x \leq a \text{ et } |y| \leq b. \end{cases}$$

Lemme 3.

La fonction $M(x, y)$ qui vient d'être définie satisfait à l'inégalité

$$(21) \quad \begin{aligned} \Phi(x, y) = K \cdot & \left(1 + \int_0^x \left| \int_{g(x)}^y M(u, v) dv \right| du + |g'(x)| \cdot \int_0^x M(u, g(x)) du + \right. \\ & \left. + \left| \int_{g(x)}^y M(x, v) dv \right| + \int_0^x M(u, y) du \right) \leq M(x, y) \end{aligned}$$

pour $0 \leq x \leq a$ et $|y| \leq b$, K étant le nombre déterminé par la formule (15).

En effet, si $0 \leq x \leq d$, on a, d'après (16), (17) et (19),

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) & \leq K \cdot (1 + (x + 1) \cdot \left| \int_{g(x)}^y 4Ke^{4K|v|} dv \right| + |xg'(x)| \cdot 4Ke^{4K|g(x)|} + x \cdot 4Ke^{4K|y|}, \\ & \leq K \cdot (1 + (\varepsilon + 1) \left(\int_0^{|y|} 4Ke^{4Kv} dv + \int_0^{|g(x)|} 4Ke^{4Kv} dv \right) + \varepsilon \cdot 4Ke^{4K\varepsilon} + \varepsilon \cdot 4Ke^{4K|y|}) \\ & \leq K \cdot (2 + \varepsilon + 4K\varepsilon + (1 + \varepsilon + 4K\varepsilon)e^{4K\varepsilon}) \cdot e^{4K|y|} \leq M(x, y). \end{aligned}$$

Pour montrer que l'inégalité (21) subsiste lorsque $d \leq x \leq a$, remarquons que dans cet intervalle on a

$$I_1(x, y) = \left| \int_{g(x)}^y e^{\lambda|v - g(x)|} dv \right| = \int_0^{|y - g(x)|} e^{\lambda t} dt \leq \lambda^{-1} e^{\lambda|y - g(x)|}$$

(7) Je dois à M. A. Bielecki l'idée d'introduire une telle fonction au lieu de la fonction en escalier, moins commode, que j'avais utilisée primitivement.

et, en vertu de (18),

$$I_2(x) = \int_a^x \lambda e^{\lambda(\gamma+1)u + \lambda|g(x)-g(u)|} du \leq \int_a^x \lambda e^{\lambda(\gamma+1)u + \lambda\gamma(x-u)} du < e^{\lambda(\gamma+1)x},$$

d'où, d'après (18) — (20),

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &\leq K \cdot \left(1 + \left[\int_0^d \left| \int_{g(x)}^y M(u, v) dv \right| du + I_1(x, y) \cdot I_2(x) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \gamma \cdot \left[\int_0^d M(u, g(x)) du + I_2(x) \right] + \lambda e^{\lambda(\gamma+1)x} \cdot I_1(x, y) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\int_0^d M(u, y) du + e^{\lambda|y-g(x)|} \cdot I_2(x) \right] \right) \leq \\ &\leq K \cdot (1 + (2b + \gamma + 1) d 4K e^{4Kb} + (3 + \gamma) e^{\lambda(\gamma+1)x + \lambda|y-g(x)|}) \leq \\ &\leq \lambda e^{\lambda(\gamma+1)x + \lambda|y-g(x)|} = M(x, y), \end{aligned}$$

ce que nous voulions montrer.

Soit

$$(22) \quad M = \max_{(x,y) \in R} M(x, y)$$

et désignons par $\mathfrak{S}$ l'ensemble de toutes les fonctions $s(x, y)$ définies et continues dans le rectangle R et satisfaisant à l'inégalité $|s(x, y)| \leq M$.

Admettons que

$$(23) \quad \sum_s(t, x) = \begin{cases} g'(t) \cdot \int_0^t s(u, g(x)) du & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

pour $t \in \langle 0, a \rangle$ et $x \in \langle 0, a \rangle$.

Lemme 4.

Les fonctions $\sum_s(t, x)$, où $s(x, y) \in \mathfrak{S}$, sont également continues par rapport à la variable t .

Supposons, en effet, que $\varepsilon > 0$. Alors il existe un $\eta > 0$ tel que, pour toute fonction $s(x, y) \in \mathfrak{S}$, on a

$$(24) \quad \left| \sum_s(t, x) \right| < \frac{1}{2} \varepsilon$$

lorsque $0 \leq t \leq \eta$. D'autre part, on a

$$\left| \sum_s(t, x) - \sum_s(\bar{t}, x) \right| \leq aM \cdot |g'(t) - g'(\bar{t})| + N \cdot M \cdot |t - \bar{t}|$$

si $\eta/2 \leq t \leq a$ et $\eta/2 \leq \bar{t} \leq a$, où $N = \max |g'(x)|$ pour $\eta/2 \leq x \leq a$ et, par conséquent, il existe un nombre δ tel que $0 < \delta < \eta/2$ et

$$(25) \quad \left| \sum_s(t, x) - \sum(\bar{t}, x) \right| < \varepsilon$$

lorsque $s(x, y) \in \mathfrak{S}$, $t, \bar{t} \geq \eta/2$ et $|t - \bar{t}| < \delta$. Mais, d'après (24), la dernière inégalité subsiste encore dans le cas où les nombres t et $\bar{t}$ sont tous les deux inférieurs à η . D'autres cas étant évidemment exclus, nous voyons que l'inégalité (25) est toujours vérifiée lorsque $t, \bar{t} \in \langle 0, a \rangle$ et $|t - \bar{t}| < \delta$, ce qui prouve le lemme.

V

Désignons par $\prod$ l'ensemble des points (x, y, z, p, q) tels que $(x, y) \in R$ et

$$(26) \quad K \cdot (1 + |z| + |p| + |q|) \leq M.$$

D'après (21) et (22), c'est un ensemble non vide; il est évidemment borné et fermé. L'ensemble $\prod_\delta \subset \prod \times \prod$ formé des points $(x, y, z, p, q, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})$ tels que $|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}| + |z - \bar{z}| + |p - \bar{p}| + |q - \bar{q}| \leq \delta$, où $\delta \geq 0$, est aussi non vide, borné et fermé, donc la fonction

$$(27) \quad \Omega(\delta) = \max_{\prod_\delta} |f(x, y, z, p, q) - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})|$$

est bornée pour $\delta \geq 0$. Elle est évidemment non décroissante et continue dans l'intervalle $\langle 0, +\infty \rangle$ et $\Omega(0) = 0$, ce qui résulte de la continuité uniforme de la fonction $f(x, y, z, p, q)$ dans le domaine $\prod$.

Posons encore

$$(28) \quad \begin{aligned} \omega_1^*(x, y, \delta) &= \sup_{|q - \bar{q}| \leq \delta} |f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, p, \bar{q})|, \\ \omega_2^*(x, y, \delta) &= \sup_{|p - \bar{p}| \leq \delta} |f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, \bar{p}, q)|, \end{aligned}$$

où $(x, y, z, p, q) \in \prod$, $(x, y, z, p, \bar{q}) \in \prod$, $(x, y, z, \bar{p}, q) \in \prod$ et $\delta \geq 0$. Le lemme suivant est une conséquence immédiate de ces définitions.

Lemme 5.

Les fonctions $\omega_i^*(x, y, \delta)$, $i = 1, 2$, sont continues, bornées et non négatives pour $(x, y) \in R$ et $\delta \geq 0$, elles sont non décroissantes par rapport à δ et elles vérifient les inégalités

$$(29) \quad \omega_i^*(x, y, \delta) \leq \omega_i(x, y, \delta),$$

$$(30) \quad |\omega_i^*(x, y, \delta) - \omega_i(x, y, \bar{\delta})| \leq \omega_i^*(x, y, |\delta - \bar{\delta}|) \leq \omega_i(x, y, |\delta - \bar{\delta}|),$$

pour $i = 1, 2$, $(x, y) \in R$ et $\delta, \bar{\delta} \geq 0$.

Lemme 6.

Si $(x^0, y) \in R$, $\eta \geq 0$ et $C \geq 0$, l'équation différentielle

$$(31) \quad \varphi'(x) = C + \omega_1'(x, y, \varphi(x))$$

admet une solution $\varphi(x) \geq 0$ de classe $C^{(1)}$ et non décroissante dans $\langle 0, a \rangle$, telle que $\varphi(x^0) = \eta$ et toute intégrale $\varphi^*(x)$ de l'équation (31) satisfaisant à la même condition initiale coïncide avec $\varphi(x)$ dans l'intervalle où $\varphi^*(x)$ est définie. L'intégrale $\varphi(x)$ dépend d'une manière continue des paramètres C, x^0 et η .

En effet, le second membre de l'équation (31) étant borné, toute intégrale saturée de celle-ci est définie dans l'intervalle $\langle 0, a \rangle$ tout entier. L'hypothèse (H_2) et l'inégalité (30) assurent l'unicité des solutions, en vertu du critère bien connu dû à E. Kamke ([5], p. 139). L'unicité des intégrales entraîne leur continuité par rapport aux paramètres.

Lemme 7.

Il existe une fonction $\varepsilon_1(x, y, \delta)$ définie et continue pour $(x, y) \in R$ et $\delta \geq 0$, décroissante par rapport à δ , qui satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(32) \quad \varepsilon_1(x, y, \delta) = \Omega([1 + aM + M]\delta) + \omega_1'\left(x, y, \int_0^x \varepsilon_1(u, y, \delta) du\right)$$

et à la condition:

$$(33) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0+} \left(\max_{(x,y) \in R} \varepsilon_1(x, y, \delta) \right) = 0.$$

En effet, revenons à l'équation différentielle (31), en admettant que $|y| \leq b$, $x^0 = \eta = 0$ et $C = \Omega([1 + aM + M]\delta)$. Or, d'après le lemme 6, il existe une et une seule fonction $\varphi_{y\delta}(x)$ de classe $C^{(1)}$ dans l'intervalle $\langle 0, a \rangle$ telle que $\varphi_{y\delta}(0) = 0$ et $d\varphi_{y\delta}(x)/dx = \Omega([1 + aM + M]\delta) + \omega_1'(x, y, \varphi_{y\delta}(x))$ et, pour achever la démonstration du lemme 7, il suffit d'admettre que $\varepsilon_1(x, y, \delta) = d\varphi_{y\delta}(x)/dx$.

Nous allons encore définir quelques fonctions auxiliaires. Soit

$$(34) \quad \omega_g(\delta) = \max |g(x) - g(\bar{x})|,$$

où $x \in \langle 0, a \rangle$, $\bar{x} \in \langle 0, a \rangle$ et $|x - \bar{x}| \leq \delta$,

$$(35) \quad \omega_\Sigma(\delta) = \sup |\Sigma_s(t, x) - \Sigma_s(\bar{t}, \bar{x})|,$$

où $x \in \langle 0, a \rangle$, $t \in \langle 0, a \rangle$, $\bar{t} \in \langle 0, a \rangle$, $|t - \bar{t}| \leq \delta$ et $s(x, y) \in \mathfrak{S}$

$$(36) \quad \Omega_1(\delta) = M\omega_g(\delta) + \omega_\Sigma(\delta) + \max_{(x,y) \in R} \varepsilon_1(x, y, \omega_g(\delta)) \cdot \sup_{0 < x \leq a} x \cdot |g'(x)|$$

et

$$(37) \quad \Omega_2(\delta) = \Omega([1 + 2bM + M]\delta + \Omega_1(\delta)).$$

Lemme 8.

Il existe une fonction $\varepsilon_2(x, y, \delta)$, définie et continue dans le domaine: $(x, y) \in R$ et $\delta \geq 0$, non décroissante par rapport à δ , qui satisfait à l'équation fonctionnelle:

$$(38) \quad \varepsilon_2(x, y, \delta) = \Omega_2(\delta) + \omega_2 \left(x, y, \left| \int_{g(x)}^y \varepsilon_2(x, v, \delta) dv \right| \right)$$

et à la condition:

$$(39) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0+} (\max_{(x,y) \in R} \varepsilon_2(x, y, \delta)) = 0$$

Nous omettrons la démonstration qui est semblable à celle du lemme 7. Cependant, il convient d'y distinguer deux domaines: $y \geq g(x)$ et $y \leq g(x)$, conformément à la distinction analogue faite dans l'hypothèse (H_2) .

VI

Théorème 1

Dans les hypothèses $(H_1) - (H_5)$ le problème (P) admet au moins une solution (cf. chap. I).

Démonstration. D'après les considérations du chapitre III il suffit de démontrer qu'il existe un solution du problème réduit (P^*) , c'est-à-dire de montrer qu'il existe une fonction $s(x, y)$ continue dans le rectangle R , satisfaisant à l'équation (11), p. 11. Or, une solution de l'équation (11) peut être envisagée comme une fonction invariante par rapport à la transformation fonctionnelle

$$(40) \quad F s(x, y) = S(x, y) = f \left(x, y, \Theta_s(x, y), \frac{\partial}{\partial x} \Theta_s(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \Theta_s(x, y) \right),$$

où

$$(41) \quad \Theta_s(x, y) = \int_0^x \left\{ \int_{g(u)}^y s(u, v) dv \right\} du,$$

dans l'espace linéaire de Banach, dit B , des fonctions $s(x, y)$ définies et continues dans le rectangle R , avec la norme usuelle $\|s(x, y)\| = \max_{(x,y) \in R} |s(x, y)|$. Nous allons montrer qu'une telle fonction invariante existe, en appliquant le théorème bien connu du point fixe dû à J. Schauder [6].

Dans ce but, désignons par Z le sous-ensemble de l'espace B , formé des fonctions $s(x, y)$ telles que

$$(42) \quad |s(x, y)| \leq M(x, y),$$

$$(43) \quad |s(x, y) - s(x, \bar{y})| \leq \varepsilon_1(x, y, |y - \bar{y}|),$$

$$(44) \quad |s(x, y) - s(\bar{x}, y)| \leq \varepsilon_2(x, y, |x - \bar{x}|),$$

où $0 \leq x \leq a$, $0 \leq \bar{x} \leq a$, $|y| \leq b$ et $|\bar{y}| \leq b$, tandis que ε_1 et ε_2 sont les fonctions dont il était question dans les lemmes 7 et 8.

On vérifie sans peine que l'ensemble Z est non vide, convexe, fermé et, eu égard à (33) et (39), compact. Il est aussi évident que les fonctions transformées $Fs(x, y)$ sont définies et continues dans R lorsque les $s(x, y)$ appartiennent à l'espace B .

Supposons que la fonction $s(x, y) \in B$ satisfasse aux inégalités (33), (34) et (35); nous allons montrer qu'il en est de même de la fonction correspondante $S(x, y) = Fs(x, y)$. En effet, en vertu du lemme 2 (p. 12), on a

$$|S(x, y)| \leq K \cdot \left(1 + \left| \Theta_s(x, y) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x} \Theta_s(x, y) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial y} \Theta_s(x, y) \right| \right)$$

d'où, d'après (42) et le lemme 3 (p. 13), $|S(x, y)| \leq \Phi(x, y) \leq M(x, y)$, donc la fonction $S(x, y)$ satisfait à l'inégalité (42). Ensuite on a, cf. (42), (14), (21), (26), (27), (28), (43) et (32):

$$\begin{aligned} |S(x, y) - S(x, \bar{y})| &\leq \\ &\leq \left| f\left(x, \bar{y}, \Theta_s(x, \bar{y}), \frac{\partial}{\partial x} \Theta_s(x, \bar{y}), \frac{\partial}{\partial y} \Theta_s(x, \bar{y})\right) - \right. \\ &\quad \left. - f\left(x, y, \Theta_s(x, y), \frac{\partial}{\partial x} \Theta_s(x, y), \frac{\partial}{\partial y} \Theta_s(x, \bar{y})\right) \right| + \\ &\quad + \left| f\left(x, y, \Theta_s(x, y), \frac{\partial}{\partial x} \Theta_s(x, y), \frac{\partial}{\partial y} \Theta_s(x, \bar{y})\right) - \right. \\ &\quad \left. - f\left(x, y, \Theta_s(x, y), \frac{\partial}{\partial x} \Theta_s(x, y), \frac{\partial}{\partial y} \Theta_s(x, y)\right) \right| \leq \\ &\leq \Omega([1 + aM + M] \cdot |y - \bar{y}|) + \omega_1^1\left(x, y, \int_0^x \varepsilon_1(u, y, |y - \bar{y}|) du = \right. \\ &= \varepsilon_1(x, y, |-\bar{y}|), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la fonction $S(x, y)$ satisfait à la condition (43). Enfin, d'après (42), (14), (21), (27), (28), (23) et (44), il vient:

$$\begin{aligned} |S(x, y) - S(\bar{x}, y)| &\leq \\ &\leq \left| f\left(x, y, \Theta_s(x, y), \int_{\sigma(x)}^y s(x, v) dv - g'(x) \int_0^x s(u, g(x)) du, \int_0^x s(u, y) du\right) - \right. \\ &\quad \left. - f\left(x, y, \Theta_s(x, y), \int_{\sigma(\bar{x})}^y s(\bar{x}, v) dv - g'(x) \int_0^x s(u, g(x)) du, \int_0^x s(u, y) du\right) \right| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left| f(x, y, \Theta_s(x, y), \int_{\vartheta(x)}^y s(\bar{x}, v) dv - g'(x) \int_0^x s(u, g(x)) du, \int_0^x s(u, y) du \right) - \\
 & - f(\bar{x}, y, \Theta_s(\bar{x}, y), \int_{\vartheta(\bar{x})}^y s(\bar{x}, v) dv - g'(\bar{x}) \int_0^{\bar{x}} s(u, g(\bar{x})) du, \int_0^{\bar{x}} s(u, y) du) \leq \\
 & \leq \omega'_2(x, y, \left| \int_{\vartheta(x)}^y \varepsilon_2(x, v, |x - \bar{x}|) dv \right|) + \Omega(|x - \bar{x}| + |\Theta_s(x, y) - \Theta_s(\bar{x}, y)| + \\
 & + \left| \int_{\vartheta(x)}^{\vartheta(\bar{x})} s(\bar{x}, v) dv \right| + \left| \sum_s(x, x) - \sum_s(\bar{x}, x) \right| + \\
 & + \left| g'(\bar{x}) \int_0^{\bar{x}} [s(u, g(x)) - s(u, g(\bar{x}))] du + \int_x^{\bar{x}} s(u, y) du \right|.
 \end{aligned}$$

D'autre part, en appliquant les formules (42), (22), (7), (34), (35) et (43), nous obtenons les inégalités suivantes:

$$|\Theta_s(x, y) - \Theta_s(\bar{x}, y)| \leq 2bM \cdot |x - \bar{x}|, \left| \int_{\vartheta(x)}^{\vartheta(\bar{x})} s(\bar{x}, v) dv \right| \leq M \cdot \omega_\vartheta(|x - \bar{x}|),$$

$$\left| \sum_s(x, x) - \sum_s(\bar{x}, x) \right| \leq \omega_\varphi(|x - \bar{x}|),$$

$$\left| g'(\bar{x}) \int_0^{\bar{x}} [s(u, g(x)) - s(u, g(\bar{x}))] du \right| \leq$$

$$\leq \sup_{0 < x < a} x |g'(x)| \cdot \left(\max_{(x, y) \in R} \varepsilon_1(x, y, \omega_\vartheta(\delta)) \right)_{\delta = |x - \bar{x}|},$$

$$\left| \int_x^{\bar{x}} s(u, y) du \right| \leq M |x - \bar{x}|.$$

D'après (36), (37) et (38), il s'ensuit:

$$\begin{aligned}
 |S(x, y) - S(\bar{x}, y)| & \leq \Omega_2(|x - \bar{x}|) + \omega'_2\left(x, y, \left| \int_{\vartheta(x)}^x \varepsilon_2(x, v, |x - \bar{x}|) dv \right| \right) = \\
 & = \varepsilon_2(x, y, |x - \bar{x}|),
 \end{aligned}$$

donc $S(x, y)$ satisfait à la condition (44). Nous avons ainsi démontré que F transforme Z en un sous-ensemble de Z .

Enfin, supposons que $s_1(x, y) \in Z$ et $s_2(x, y) \in Z$. D'après (7), (8) et (9),

$$\|\Theta_{s_1} - \Theta_{s_2}\| \leq 2ab \|s_1 - s_2\|, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial y} \Theta_{s_1} - \frac{\partial}{\partial y} \Theta_{s_2} \right\| \leq a \|s_1 - s_2\|,$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} \Theta_{s_1} - \frac{\partial}{\partial x} \Theta_{s_2} \right\| \leq (2b + \sup_{0 < x \leq a} x |g'(x)|) \cdot \|s_1 - s_2\|$$

et, d'après (42), (21), (22), (26) et (27):

$$\|Fs_1 - Fs_2\| \leq \Omega \left((2ab + a + 2b + \sup_{0 < x \leq a} x |g'(x)|) \cdot \|s_1 - s_2\| \right).$$

Mais cela signifie que la transformation F est continue dans Z .

Toutes les prémisses du théorème du point fixe de Schauder se trouvent ainsi vérifiées; en vertu de ce théorème il existe donc un point fixe de la transformation F , ou bien, autrement dit, une fonction $s(x, y)$ satisfaisant à l'équation (11), ce qui achève notre démonstration.

Théorème 2.

Si les hypothèses (H_1) , (H_4) et (H_5) sont vérifiées et si la fonction $f(x, y, z, p, q)$ satisfait à la condition de Lipschitz par rapport aux variables z, p et q , c'est-à-dire si

$$(45) \quad |f(x, y, z, p, q) - f(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| \leq L \cdot (|z - \bar{z}| + |p - \bar{p}| + |q - \bar{q}|)$$

pour $(x, y) \in R$ et $z, p, q, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}$ arbitrairement choisis, le problème (P) admet une seule solution qui s'obtient par le procédé des approximations successives, uniformément convergent dans le rectangle R .

Démonstration. Nous pouvons évidemment supposer que L est un nombre positif. Soit B^* l'espace de Banach des fonctions $s(x, y)$ continues dans le rectangle R , avec la norme⁽⁸⁾

$$\|s(x, y)\| = \sup_{(x, y) \in R} \frac{|s(x, y)|}{M(x, y)},$$

où $M(x, y)$ est définie comme au chapitre IV, toutefois en admettant, au lieu de (15), que $K = 2L + 1$.

La transformation (40) est une transformation contractante par rapport à cette nouvelle norme. En effet, si $s_1(x, y) \in B^*$, $s_2(x, y) \in B^*$, on aura

(8) Je dois à M. A. Bielecki l'idée d'appliquer une norme de ce genre ([1] et [2]).

$$|Fs_1(x, y) - Fs_2(x, y)| \leq L \cdot \left(\int_0^x \left| \int_{g(x)}^y |s_1(u, v) - s_2(u, v)| dv \right| du + \right. \\ \left. + \left| \int_{g(x)}^y [s_1(x, v) - s_2(x, v)] dv \right| + |g'(x)| \cdot \int_0^x |s_1(u, g(x)) - s_2(u, g(x))| du + \right. \\ \left. + \int_0^x |s_1(u, y) - s_2(u, y)| du \right).$$

Mais $|s_1(x, y) - s_2(x, y)| \leq M(x, y) \cdot \|s_1 - s_2\|$, donc, en vertu du lemme 3,

$$|Fs_1(x, y) - Fs_2(x, y)| \leq \|s_1 - s_2\| \cdot \frac{1}{2} \Phi(x, y) \leq \frac{1}{2} \|s_1 - s_2\| \cdot M(x, y),$$

d'où

$$\|Fs_1 - Fs_2\| \leq \frac{1}{2} \|s_1 - s_2\|.$$

Pour achever la démonstration, il suffit d'appliquer le théorème bien connu du point fixe dû à Banach (principe de la transformation contractante).

Remarque.

Dans le cas régulier où la fonction $g(x)$ admet une dérivée continue dans l'intervalle fermé $\langle 0, a \rangle$ tout entier, l'hypothèse (H_4) devient superflue et l'hypothèse (H_5) peut être remplacée par la condition que les $\sigma(x)$ et $\tau(y)$ soient de classe $C^{(1)}$ dans $\langle 0, a \rangle$ et $\langle -b, b \rangle$ respectivement et que $\sigma(0) = \tau(0)$. La démonstration du théorème 2 se simplifie considérablement, à savoir la fonction $M(x, y)$ prend la forme $\lambda e^{\lambda(\gamma+1)x + \lambda|y - \sigma(x)|}$, où γ désigne le maximum de la fonction $|g'(x)|$ dans l'intervalle $\langle 0, a \rangle$ et λ est un nombre positif suffisamment grand, la vérification d'un lemme analogue au lemme 3 étant ici bien facile. Cependant, dans ce cas particulier le théorème 2 ne présente rien de nouveau. Pourtant, la méthode exposée ici semble avantageuse par sa simplicité et son caractère non local.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] Bielecki, A., *Une remarque sur la méthode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov dans la théorie des équations différentielles ordinaires*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4 (1956), p. 261–264.
- [2] — — *Une remarque sur l'application de la méthode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov dans la théorie de l'équation $s = f(x, y, z, p, q)$* , Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4 (1956), p. 265–268.

- [3] Bielecki, A. et Kiszyński, J., *Sur le problème de E. Goursat relatif à l'équation* $\partial^2 z(x, y)/\partial x \partial y = f(x, y)$, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **10** (1956), p. 99–126.
- [4] Hartman, P. and Wintner A. *On hyperbolic partial differential equations*, Amer. Journ. Math., **74** (1952), p. 832–864.
- [5] Kamke, E., *Differentialgleichungen reeller Functionen*, Leipzig, 1930.
- [6] Schauder, J. *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math., **2** (1930), p. 171–180.
- [7] Szmydt, Z., *Sur un nouveau type de problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **4** (1956), p. 67–72.

Streszczenie

Praca dotyczy następującego problemu Picarda dla równania

$$(1) \quad z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y).$$

Dana jest funkcja $f(x, y, z, p, q)$, ciągła dla $(x, y) \in R$, gdzie $R = \{(x, y); 0 \leq x \leq a, |y| \leq b\}$ i dla dowolnych z, p, q . Dana jest funkcja $g(x)$, ciągła w przedziale $\langle 0, a \rangle$, przy czym $g(0) = 0$ oraz $|g(x)| \leq b$ dla $x \in \langle 0, a \rangle$. Wreszcie dane są funkcje $\sigma(x)$ i $\tau(y)$, ciągłe odpowiednio w przedziałach $\langle 0, a \rangle$ i $\langle -b, b \rangle$, takie, że $\sigma(0) = \tau(0)$.

Pytamy, czy istnieje funkcja $z(x, y)$, ciągła w prostokącie R wraz ze swymi pochodnymi z_x, z_y i z_{xy} , spełniająca w prostokącie R równanie (1) i spełniająca warunki

$$\begin{aligned} z(x, g(x)) &= \sigma(x) \text{ dla } x \in \langle 0, a \rangle, \\ z(0, y) &= \tau(y) \text{ dla } y \in \langle -b, b \rangle. \end{aligned}$$

Twierdzenie 1 niniejszej pracy głosi, że powyższy problem Picarda posiada rozwiązanie, jeśli spełnione są cztery warunki następujące:

1° funkcja $g(x)$ jest klasy $C^{(1)}$ w przedziale $(0, a)$ i spełnia warunek

$$\lim_{x \rightarrow 0+} xg'(x) = 0;$$

2° istnieje funkcja $\chi(x, y)$, klasy $C^{(1)}$ w prostokącie R , taka, że

$$|\chi'_y(x, y) - \chi'_y(\bar{x}, y)| \leq K \cdot |x - \bar{x}|, K = \text{const.} > 0$$

dla $(x, y) \in R$ i $(\bar{x}, y) \in R$, oraz

$$\begin{aligned} \chi(x, g(x)) &= \sigma(x) \text{ dla } x \in \langle 0, a \rangle, \\ \chi(0, y) &= \tau(y) \text{ dla } y \in \langle -b, b \rangle; \end{aligned}$$

3° для $(x, y) \in R$ и dowolnych z spełniona jest nierówność

$$|f(x, y, z, 0, 0)| \leq A + B|z|, \quad A = \text{const} > 0, \quad B = \text{const} > 0;$$

4° функция $f(x, y, z, p, q)$ czyni zadość warunkowi (H_2) , analogicznemu do warunku K , pochodzącego od A. Plisia, stosowanego przez Zofię Szmydt w pracy [7].

Warunek (H_2) dotyczy regularności funkcji $f(x, y, z, p, q)$ ze względu na zmienne p i q i obejmuje jako przypadek szczególny warunek Lipschitz'a ze względu na te zmienne.

Twierdzenie 2 udowodnione w tej pracy głosi, że jeśli spełnione są warunki 1° i 2° oraz jeśli funkcja $f(x, y, z, p, q)$ spełnia warunek Lipschitz'a ze względu na zmienne z, p i q , wówczas problem Picarda posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Rozwiązanie to uzyskuje się metodą kolejnych iteracji. Przy tym dla dowolnej funkcji wyjściowej, klasy $C^{(1)}$ w prostokącie R , ciąg kolejnych iteracji oraz ciągi ich pochodnych rzędu pierwszego i pochodnych mieszanych rzędu drugiego są zbieżne jednostajnie w całym prostokącie R do rozwiązania równania (1) i jego odpowiednich pochodnych.

Резюме

Эта работа касается проблемы Пикара для уравнения

$$(1) \quad z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y).$$

Дана функция $f(x, y, z, p, q)$ непрерывная для $(x, y) \in R$ где $R = \{(x, y); 0 \leq x \leq a, |y| \leq b\}$ и для произвольных z, p, q . Дана функция $g(x)$ непрерывная на сегменте $\langle 0, a \rangle$, при чём $g(0) = 0$ и $|g(x)| \leq b$ для $x \in \langle 0, a \rangle$. К тому даны функции $\sigma(x)$ и $\tau(y)$ непрерывные на сегментах соответственно $\langle 0, a \rangle$ и $\langle -b, b \rangle$ такие, что $\sigma(0) = \tau(0)$.

Спрашивается, существует ли функция $z(x, y)$ непрерывная на прямоугольнике R вместе с производными z_x, z_y и z_{xy} , удовлетворяющая уравнению (1) и условиям

$$\begin{aligned} z(x, g(x)) &= \sigma(x) \quad \text{для } x \in \langle 0, a \rangle, \\ z(0, y) &= \tau(y) \quad \text{для } y \in \langle -b, b \rangle. \end{aligned}$$

Теорема 1 этой работы гласит, что выше упомянутая проблема Пикара имеет решение, если соблюдены следующие четыре условия: 1° функция $g(x)$ принадлежит к классу $C^{(1)}$ на сегменте $\langle 0, a \rangle$ и исполняет условие

$$\lim_{x \rightarrow 0+} xg'(x) = 0;$$

2° существует функция $\chi(x, y)$ класса $C^{(1)}$ в прямоугольнике такая, что

$$|\chi'_y(x, y) - \chi'_y(\bar{x}, y)| \leq K \cdot |x - \bar{x}|, \quad K = \text{const} > 0$$

для $(x, y) \in R$ и $(\bar{x}, y) \in R$ а также

$$\chi(x, g(x)) = \sigma(x) \quad \text{для } x \in \langle 0, a \rangle,$$

$$\chi(0, y) = \tau(y) \quad \text{для } y \in \langle -b, b \rangle;$$

3° для $(x, y) \in R$ и произвольных z выполняется неравенство

$$|f(x, y, z, 0, 0)| \leq A + B|z|, \quad A = \text{const} > 0, \quad B = \text{const} > 0;$$

4° функция $f(x, y, z, p, q)$ удовлетворяет условию (H_2) аналогичному с условием K , поданным А. Плисем и применяемым Софией Шмыдт в работе [7].

Условие (H_2) касается регулярности функции $f(x, y, z, p, q)$ по отношению к переменным p, q и обнимает, как частный случай, условие Липшица по отношению к этим переменным.

Теорема 2 этой работы говорит, что если выполнены условия 1° и 2°, а притом функция $f(x, y, z, p, q)$ выполняет условие Липшица по отношению к переменным z, p и q , то проблема Пикара имеет в точности одно решение. Это решение получается методом последовательных итерирований. Притом при любой исходной функции класса $C^{(1)}$ в прямоугольнике R последовательность очередных приближений а также последовательности их производных первого порядка и смешанных производных второго порядка сходятся в целом прямоугольнике R равномерно к решению уравнения (1) и к его соответственным производным.