

Z Seminarium Matematycznego I Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr M. Biernacki

MIECZYŚŁAW BIERNACKI

Sur les coefficients de Taylor des fonctions univalentes II

O współczynnikach Taylora funkcji jednolistnych II

О тэйлоровых коэффициентах однолистных функций II

§ 1. Considérons la classe S de fonctions

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

holomorphes et univalentes dans le cercle $|z| < 1$. On sait que l'on a $|a_n| < e \cdot n$ ($n = 2, 3, \dots$). G. M. Golousine a établi ([3], [4], [5], p. 207) que l'on a

$$|a_n| - |a_{n-1}| < C n^{1/4} \log n \quad (n = 2, 3, \dots),$$

où C est une constante numérique. Dans le cas particulier des fonctions qui représentent le cercle $|z| < 1$ sur un domaine étoilé par rapport à l'origine, cet auteur a obtenu ([4], p. 24—26) la limitation dans un sens définitive

$$|a_n| - |a_{n-1}| < C_1 \quad (n = 2, 3, \dots),$$

où C_1 est une constante numérique. Dans un article publié récemment [2] j'ai établi d'autre part que l'on a dans le cas général

$$|a_n| - |a_{n-1}| < C_2 (\log n)^{3/2}, \quad (n = 2, 3, \dots)$$

C_2 étant encore une constante numérique. Dans cet article je me propose d'ajouter quelques compléments à ce dernier résultat. Je vais établir notamment au sujet des fonctions de la classe S les propositions suivantes:

I. On a dans le cas général

$$\frac{|a_2| - 1 + |a_3| - |a_2| + \dots + |a_{n-1}| - |a_n|}{n} < C_3 \log n, \quad (n = 2, 3, \dots)$$

où C_3 est une constante numérique.

II. Lorsque $z^p f'(z)$, où p est un entier positif quelconque, est en aire p -valente¹⁾ dans le cercle $|z| < 1$, on a

$$|a_n| - |a_{n-1}| < C(p) \log n, \quad (n = 2, 3, \dots)$$

où la constante $C(p)$ ne dépend que de p .

Je ferai ensuite quelques remarques au sujet de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right|^2 d\Theta \quad (z = re^{i\Theta}).$$

Dans la démonstration je vais m'appuyer sur les résultats connus suivants:

A. G. M. Golousine ([3], [5] p. 207):

$f(z)$ étant une fonction de la classe S définie au début de cet article et z_1 étant le point où $|f(z)|$ atteint son maximum sur la circonférence $|z| = r$, $0 < r < 1$, on a

$$|z - z_1| \cdot |f(z)| < \frac{2r^2}{1 - r^2}.$$

B. M. Biernacki [1]:

Si $f(z) = z^p + b_2 z^{p+1} + \dots$ est holomorphe et p -valente en aire dans le cercle $|z| < 1$, on y a les inégalités

$$(B') \quad \int_0^r \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right|^2 d\Theta < A_1(p) \log \frac{1}{1-r} \quad (z = \varrho e^{i\Theta}),$$

$$(B'') \quad \int_0^{2\pi} \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right|^2 d\Theta < \frac{A_2(p)}{1-r} \log \frac{1}{1-r} \quad (z = re^{i\Theta}).$$

§ 2. Pour établir l'énoncé 1 considérons une valeur fixe de r , $1/2 < r < 1$, et posons $\varphi(z) = (z - z_1)f(z)$, z_1 étant le point de la circonférence $|z| = (1+r)/2$ où $|f(z)|$ atteint son maximum. Si

$$\varphi(z) = c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

¹⁾ Une fonction $\varphi(z)$ holomorphe dans un domaine y est dite en aire p -valente lorsque l'aire de la portion de surface de Riemann de $w = \varphi(z)$ qui se projette sur le cercle $|w| < R$ ne dépasse pas. quel que soit $R > 0$, $p \pi R^2$. Une fonction p -valente est évidemment p -valente en aire.

évaluons l'aire de la surface de Riemann décrite par $\varphi(z)$ lorsque z décrit le cercle $|z| \leq r$. Si $z = \rho e^{i\theta}$, cette aire est égale à

$$\begin{aligned} \pi \sum_{n=1}^{\infty} k |c_k|^2 r^{2k} &= \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} |\varphi'(z)|^2 d\theta = \int_0^{1/2} \rho d\rho \int_0^{2\pi} |\varphi'(z)|^2 d\theta + \\ &+ \int_{1/2}^r \frac{d\rho}{\rho} \int_0^{2\pi} \left| \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right|^2 |\varphi(z)|^2 d\theta < A_1 + 2 \operatorname{Max}_{|z|=r} |\varphi(z)|^2 \int_{1/2}^r d\rho \int_0^{2\pi} \left| \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right|^2 d\theta < \\ &< A_1 + 4 \operatorname{Max}_{|z|=r} |\varphi(z)|^2 \left[\int_{1/2}^r d\rho \int_0^{2\pi} \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right|^2 d\theta + \int_{1/2}^r d\rho \int_0^{2\pi} \left| \frac{z}{z-z_1} \right|^2 d\theta \right], \end{aligned}$$

où A_1 est une constante numérique, en vertu de théorèmes classiques²⁾. En vertu des énoncés A et B' et de l'inégalité élémentaire

$$\int_{1/2}^r d\rho \int_0^{2\pi} \left| \frac{z}{z-z_1} \right|^2 d\theta < A_8 \log \frac{1}{1-r},$$

on aura donc

$$\pi \sum_{k=1}^{\infty} k |c_k|^2 r^{2k} < \frac{A_1}{(1-r)^2} \log \frac{1}{1-r}.$$

En posant $r = 1 - 1/n$, on aura

$$(1) \quad |c_1|^2 + 2|c_2|^2 + \dots + n|c_n|^2 < A_8 n^2 \log n,$$

et en appliquant l'inégalité de Cauchy:

$$\begin{aligned} |c_1| + |c_2| + \dots + |c_n| &\leq \sqrt{|c_1|^2 + 2|c_2|^2 + \dots + n|c_n|^2} \\ &\cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} < A_8 n \log n. \end{aligned}$$

Or on a $c_k = a_{k-1} - z_1 a_k$ et $|z_1| = (1+r)/2 = 1 - \frac{1}{2n}$ donc

$$\sum_{k=1}^n \left| |a_{k-1}| - \left(1 - \frac{1}{2n}\right) |a_k| \right| < A_6 n \log n$$

et par suite

$$\sum_{k=1}^n \left| |a_k| - |a_{k-1}| \right| < A_6 n \log n + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

²⁾ De même, dans la suite, A_i désigneront des constantes numériques, $A_i(p)$ des constantes qui dépendent uniquement de p .

Cependant $|a_k| < e \cdot k$ pour tout k naturel, donc

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n |a_k| < A_7 n,$$

et l'énoncé I s'ensuit immédiatement.

§ 3. Supposons maintenant que $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ étant holomorphe et univalente dans le cercle $|z| < 1$, $z^p f'(z) = z^p + \dots$ est p -valente en aire dans ce cercle, z_1 étant toujours le point de la circonférence $|z| = (1+r)/2$ ($1/2 \leq r < 1$) où $|f(z)|$ atteint son maximum, posons

$$\psi(z) = (z - z_1) f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n \quad \text{et} \quad \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$$

(la dernière série converge dans le cercle $|z| < (1+r)/2$).

En écrivant

$$\psi'(z) = \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} \cdot \psi(z)$$

et en égalant les coefficients de z^{n-1} dans les deux membres, on obtient l'égalité

$$n g_n = d_0 g_{n-1} + d_1 g_{n-2} + \dots + d_{n-1} g_0$$

d'où, en utilisant l'inégalité de Cauchy

$$(2) \quad |g_n| \leq \sqrt[n]{\frac{|d_0|^2 + \dots + |d_{n-1}|^2}{n} \cdot \frac{|g_0|^2 + \dots + |g_{n-1}|^2}{n}}.$$

Or $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \frac{f''(z)}{f'(z)}$; $z^p f'(z) = h(z)$ étant p -valente en aire, on a d'après l'énoncé (B'')

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{z h'(z)}{h(z)} \right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{z f''(z)}{f'(z)} + p \right|^2 d\theta < \frac{A_2(p)}{1-r} \log \frac{1}{1-r};$$

d'autre part, on a après un calcul élémentaire

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{z}{z - z_1} \right|^2 d\theta < \frac{A_8}{1-r},$$

donc pour $r > 1/2$ il vient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} \right|^2 d\theta = |d_0|^2 + |d_1|^2 r^2 + \dots + |d_n|^2 r^{2n} + \dots < \frac{A_3(p)}{1-r} \log \frac{1}{1-r},$$

et en posant $r = 1 - 1/n$ on aura

$$(3) \quad |d_0|^2 + |d_1|^2 + \dots + |d_n|^2 < A_4(p) n \cdot \log n.$$

Comme d'autre part $\varphi(z) = (z - z_1) \cdot f(z)$, on a $\psi(z) = (z - z_1) f'(z) = \varphi'(z) - f(z)$; en égalant les coefficients de z^k dans les deux membres on obtient l'égalité $g_k = (k + 1) \cdot c_{k+1} - a_k$, d'où

$$(4) \quad |g_k|^2 \leq 2(k+1)^2 |c_{k+1}|^2 + 2|a_k|^2.$$

Or nous avons eu l'inégalité (1):

$$(1) \quad |c_1|^2 + 2|c_2|^2 + \dots + n|c_n|^2 < A_5 n^2 \log n$$

qui entraîne l'inégalité

$$(5) \quad |c_1|^2 + 2^2 |c_2|^2 + \dots + n^2 |c_n|^2 < A_5 n^3 \log n.$$

Comme $|a_k| < e \cdot k$, on a d'ailleurs

$$(6) \quad |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2 < A_8 n^3,$$

donc, d'après (2), (3), (4), (1), (5) et (6):

$$|g_n| \leq A_5(p) n \cdot \log n.$$

Or si $\varphi(z) = (z - z_1) f(z) = c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$

on a

$$c_{n+1} = \frac{g_n + a_n}{n+1},$$

donc

$$|c_{n+1}| \leq A_5(p) \log n + e,$$

il en résulte, comme à la fin du § 2, que

$$||a_{n+1}| - |a_n|| \leq A_5(p) \log n + 2e,$$

et ceci entraîne immédiatement l'énoncé II.

§ 4. Dans le cas des fonctions $f(z) = z + \dots$ univalentes dans le cercle $|z| < 1$ l'inégalité (B'') du § 1 peut s'écrire

$$(B'') \quad \int_0^{2\pi} \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right|^2 d\theta < \frac{A}{1-r} \log \frac{1}{1-r} \quad (z = re^{i\theta}),$$

où A est une constante numérique.

On sait que dans ce cas la limitation supérieure du module de $\frac{f''(z)}{f'(z)}$ dans le cercle $|z| \leq r < 1$ est du même ordre de grandeur que celle de $\frac{zf'(z)}{f(z)}$, on pourrait donc s'attendre à ce que l'on ait une inégalité analogue à (B''):

$$(C) \quad \int_0^{2\pi} \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right|^2 d\theta < \frac{A_1}{1-r} \log \frac{1}{1-r}.$$

Or *cela est inexact*. Pour le voir, posons:

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad \frac{zf''(z)}{f'(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n.$$

En égalant les coefficients de z^n dans les développements tayloriens des deux membres de l'identité

$$z \frac{d}{dz} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right] = \frac{zf''(z)}{f'(z)} \cdot \frac{zf'(z)}{f(z)} - \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right]^2 + \frac{zf'(z)}{f(z)}$$

on obtient

$$nb_n = \beta_0 b_n + \dots + b_0 \beta_n - (b_0 b_n + \dots + b_n b_0) + b_n,$$

d'où

$$(7) \quad (n-1)|b_n| < \sqrt{|\beta_0|^2 + \dots + |\beta_n|^2} \cdot \sqrt{|b_0|^2 + \dots + |b_n|^2} + |b_0|^2 + \dots + |b_n|^2$$

Or l'inégalité (B'') entraîne évidemment la suivante:

$$|b_0|^2 + \dots + |b_n|^2 < A_1 n \log n$$

et l'inégalité (C) entraînerait l'inégalité

$$|b_0|^2 + \dots + |b_n|^2 < A_3 n \log n,$$

d'après (7) on aurait donc $|b_n| < A_4 \log n$. Or cette dernière inégalité n'est pas possible en général. En reprenant, en effet, le raisonnement du § 3 de mon travail [1], où j'ai montré que la suite $\{b_n\}$ ne peut être en général bornée, on obtiendrait une contradiction avec un résultat de J. E. Littlewood [6] relatif aux coefficients des fonctions univalentes et k -symétriques. Ainsi, l'assertion formulée au début de ce § est justifiée.

Remarques. Il résulte de ce qui précède que lorsque $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ est univalente dans le cercle $|z| < 1$, $z^p f'(z)$ n'est pas en général en aire p -valente dans ce cercle, car, dans le cas contraire, une inégalité analogue à (C) aurait lieu, en vertu de l'énoncé (B''). Or il est bien connu que si $f(z)$ représente la carte $|z| < 1$ sur un domaine convexe, $zf'(z)$ est univalente (et représente le cercle $|z| < 1$ sur un domaine étoilé par rapport à l'origine). Le raisonnement de ce § ne permet pas de résoudre la question de savoir si, lorsque $f(z)$ représente le cercle $|z| < 1$ sur un domaine étoilé par rapport à l'origine, $z^p f'(z)$ est-elle nécessairement p -valente ou au moins en aire p -valente dans ce cercle, car dans ce cas la suite $\{b_n\}$ est — comme il est bien connu — bornée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Biernacki M., *Sur les fonctions en aire multivalentes*. Annales UMCS (A) 8 (1954).
- [2] Biernacki M., *Sur les coefficients de Taylor des fonctions univalentes*. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Cl. III, 4 (1956) No 1.
- [3] Golousine G. M., *О теоремах искажения и коэффициентах однолистных функций*. Mat. Sbornik 19 (1946), p. 183—202.
- [4] Golousine G. M., *Некоторые вопросы теории однолистных функций*. Travaux Inst. Stekloff 27 (1949).
- [5] Golousine G. M., *Геометрическая теория функций комплексного переменного*. Moscou-Leningrad, 1952.
- [6] Littlewood J. E., Quart. Journ. of Mathem. 9 (1938) p. 14—20.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Streszczenie

Udowadniam twierdzenia następujące:

I. Jeśli $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ jest holomorficzna i jednolista w kole $|z| < 1$, to zachodzi nierówność

$$|a_2| - 1 + |a_3| - |a_2| + \dots + |a_{n+1}| - |a_n| < C n \log n,$$

gdzie C jest stałą liczbową.

II. Jeśli, ponadto, $z^p f'(z)$ jest połowo p -listna w kole $|z| < 1$ (p jest liczbą naturalną), to zachodzi nierówność

$$|a_n| - |a_{n-1}| < C(p) \log n$$

gdzie $C(p)$ zależy tylko od p .

Резюме

Доказаны следующие теоремы:

I Если $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ функция голоморфна и однолистая в круге $|z| < 1$, то имеет место неравенство

$$|a_2| - 1 + |a_3| - |a_2| + \dots + |a_{n+1}| - |a_n| < C n \log n,$$

где C числовая постоянная.

II. Если сверх того, $z^p f'(z)$ плоскомерно p -листна в круге $|z| < 1$ (p натуральное число), то имеет место неравенство

$$|a_n| - |a_{n-1}| < C(p) \log n$$

где $C(p)$ зависит только от p .

