ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. IX, 4 SECTIO A 1955

Z Zakładu Matematyki II Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. nadzw. dr Adam Bielecki

ADAM BIELECKI

# Certaines propriétés topologiques des solutions des équations au paratingent

## Pewne własności topologiczne rozwiązań równań paratyngensowych

## Некоторые топологические свойства решений паратингентных уравнений

Soit $\Omega$ un ensemble ouvert contenu dans l'espace $E_{n+1}$ à $n+1$ dimensions et $\omega$ un ensemble ouvert contenu dans $\Omega$. Supposons que les seconds membres des équations différentielles ordinaires

$$(1) \qquad \frac{dx_\nu}{dt} = f_\nu(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

soient continus dans $\Omega$.

Nous adopterons les définitions et notations introduites dans les chapitres 1 — 4 de notre travail antérieur [3] publié dans le même périodique (p. 37 de ce volume), consacré au même sujet, à savoir aux équations au paratingent. Il s'agit, en particulier, des notions fondamentales de contingent, de paratingent, de champ de pinceaux, d'intégrale asymptotique, de point de sortie, de glissement, d'entrée (forte, stricte), de zone d'émission, d'ensemble asymptotique etc., ainsi que des symboles relatifs. Nous admettons que tout cela est déjà connu.

Revenons au système (1) et considérons encore un ensemble $V \subset \omega' = \omega + s(L(P), \omega, \Omega)$ et fermé par rapport à $\omega'$, où $L(P)$ désigne le champ d'éléments linéaires engendré par les équations (1), et posons

$$A^+ = A^+(L(P), \omega, \Omega) \quad \text{et} \quad Z^- = Z^-(L(P), V, \omega'),$$

c'est-à-dire $A$ est l'ensemble asymptotique par rapport à (1), $\omega$ et $\Omega$, tandis que $Z^-$ est la zone d'émission de l'ensemble $V$ par rapport aux équations (1) envisagées dans $\omega'$. Ensuite admettons que $U$ désigne un ensemble contenu dans $\omega'$ fermé par rapport à $\omega'$, contenant sa propre zone d'émission négative et l'ensemble $A^+$. Enfin, désignons par $s$ l'ensemble de tous les points de sortie par rapport à $L(P), \omega$ et $\Omega$.

Il est intéressant que la structure topologique des ensembles $\omega - A^+$, $\omega - Z^-$ et $\omega - U$ soit dans certaines conditions beaucoup plus simple que la structure des ensembles $A^+$, $Z$ et $U$ [**4**]. L'étude de ces ensembles complémentaires (le plus important d'eux c'est $\omega - U$) qui est le but principal de la présente note, peut fournir des nouveaux moyens de l'examen de l'allure des intégrales des équations différentielles ordinaires. Les recherches dans cette direction ont été initiées par T. Ważewski qui a étudié les équations remplissant la condition d'unicité des intégrales [**10**]. Je m'occupe, au contraire, des équations au paratingent beaucoup plus générales que les équations différentielles ordinaires ne satisfaisant pas à la condition d'unicité. Les sérieuses difficultés qui surgissent dans cette théorie imposent diverses restrictions qui sont superflues dans le simple cas envisagé par T. Ważewski. Je n'ai pas pu me passer dans l'énoncé des théorèmes de certaines hypothèses accessoires qui ne sont peut-être pas essentielles, mais sont indispensables dans la méthode du raisonnement dont je me suis servi. C'est pourquoi p. ex. notre théorème 2 (chap. 3) concernant la structure des familles de solutions d'équations au paratingent ne peut être considéré comme une généralisation proprement dite d'aucun des théorèmes de la note [**10**].

La démonstration du théorème 2 est basée sur une certaine méthode de régularisation d'une équation au paratingent (chap. 2, théorème 1) qui diffère assez essentiellement, d'une part de la méthode appliquée dans [**3**] et, d'autre part, d'une méthode proposée par T. Ważewski ([**9**], p. 313).

Le corollaire 1 au théorème 3 (chap. 4), qui résulte du théorème 2, avait été établi directement déjà en 1947 et communiqué par moi au V$^e$ Congrès des Mathématiciens Polonais à Cracovie [**1**]. Ce théorème exprime d'une façon simple et claire une propriété essentielle, semble-t-il, des zones d'émission, dont résulte entre autres le théorème connu de Kneser [**6**]. Le chapitre 5 contient quelques simples applications.

## 1. Lemmes

Soit $M(P)$ un champ donné dans un ensemble ouvert $\Omega \subset E_{n+1}$ et soit $S$ un sous-ensemble de $\Omega$. Nous dirons que l'ensemble $S$ est *transversal* au champ $M(P)$ au point $P_0 \in S$ s'il existe deux nombres positifs $\varepsilon$ et $\delta$

tels que les ensembles de droites $Ct(S,R)$ [1]) et $k(M(P_0),\varepsilon)$ soient disjoints pour tout $R \in K(P_0,\delta)$ [2]). En particulier, la condition est remplie lorsque $S$ est une hypersurface régulière et $M(P)$ est un champ d'éléments linéaires qui ne sont pas tangents à $S$.

**Hypothèse** $\mathcal{R}$. *Le champ $M(P)$ est défini dans un ensemble $\Omega \subset E_{n+1}$ contenant un ensemble ouvert $\omega$. L'ensemble $U \subset \omega' = \omega + s(M(P),\omega,\Omega)$, est fermé par rapport à $\omega'$.*

$$A^+ = A^+(M(P),\omega,\Omega) \subset U.$$
$$Z^- = Z^-(M(P),U,\omega') \subset U.$$

*L'ensemble $S = s(M(P),\omega,\Omega) - U$ se compose des points de sortie forte par rapport à $M(P)$, $\omega$ et $\Omega$, l'ensemble $S$ est transversal au champ $M(P)$ en tout point $Q \in S$, l'ensemble $T' = \mathrm{Front}(\omega,\Omega) - U - S$ est fermé par rapport à $\Omega$.*

Nous allons encore introduire les abbréviations et les notations suivantes:

$$B = \omega - U,$$
$$T'' = \bar{B} \cdot U,$$
$$T = T' + T'',$$
$$D = \Omega - T.$$

$D = \sum_{i=1}^{\infty} D_i$, où $D_i$ sont des ensembles bornés et fermés tels que $D_i \underset{i}{\subset} D_{i+1}$, pour $i = 1, 2, \ldots$ [3]). $S_i = D_i \cdot S$.

$M(P) = \prod_{j=1}^{\infty} M_j(P)$, où $M_j(P)$ sont des champs continus et gras dans $\Omega$ et tels que $M_{j+1}(P) \underset{i}{\subset} M_j(P)$, pour $j = 1, 2, \ldots$ [4]).

**Lemme 1.** *Dans l'hypothèse $\mathcal{R}$ il existe un champ $M^*(P)$ défini dans $\Omega$ et jouissant des propriétés suivantes:*

$$M(P) \underset{i}{\subset} M^*(P) \underset{i}{\subset} M_{i+1}(P) \text{ dans } D - D_i, \text{ pour } i = 1, 2, \ldots,$$
$$M^*(P) = M(P) \text{ dans } \Omega - D,$$
*$M^*(P)$ est continu et gras dans $D$,*
*l'ensemble $S$ est transversal au champ $M^*(P)$.*

---

[1]) La notion de contingent (resp. paratingent) introduite dans [2], p. 60, et adoptée ici ne diffère pas essentiellement de celle qui est due à G. Bouligand [5], p. 65, 72. Les symboles dont nous faisons usage ici et dans la suite ont été introdnits dans [3], chapitres 1 — 4.

[2]) C'est une modification d'une définition dont j'ai fait usage dans [2], p. 64.

[3]) Le symbole $A \underset{i}{\subset} B$ signifie que l'ensemble $A$ est contenu dans l'intérieur de $B$.

[4]) Cf. [3], lemme 1, p. 42.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons, en effet, que toutes les hypothèses de notre lemme soient remplies et fixons, pour un instant, un point $A \epsilon S_i = S \cdot D_i$. L'ensemble $S$ étant transversal à $M(P)$ au point $A$, il existe deux nombres positifs $\varepsilon(A)$ et $\delta'(A)$ tels que l'ensemble

$$\mathrm{Ct}(S,R) \cdot k(M(A), 3\,\varepsilon(A))$$

est vide si $|R, A| < 2\,\delta'(A)$. D'autre part, il existe évidemment un indice $p = p(A)$ tel que

$$M_p(A) \subset \overline{k}(M(A), \varepsilon(A)).$$

Le champ $M_p(P)$ étant continu, on a, pour un nombre positif $\delta(A) \leqslant \delta'(A)$ convenablement choisi et pour $Q \epsilon K(A, \delta(A))$, l'inclusion

$$M_p(Q) \subset \overline{k}(M(A), 2\,\varepsilon(A))$$

ou bien

$$\overline{k}(M_p(Q), \varepsilon(A)) \subset \overline{k}(M(A), 3\,\varepsilon(A)).$$

Il s'ensuit que l'ensemble

$$\mathrm{Ct}(S,R) \cdot \overline{k}(M_j(Q), \varepsilon(A))$$

est vide si $j \geqslant p(A)$, $|Q, A| < \delta(A)$ et $|R, A| < 2\,\delta(A)$.

Or, d'après le théorème de B o r e l - L e b e s g u e, on peut couvrir l'ensemble $S_i$ au moyen d'un nombre fini de sphères

$$K_\sigma = K(A_\sigma, \delta(A_\sigma)), \text{ où } A_\sigma \epsilon S_i, \sigma = 1, 2, \ldots, N.$$

Soit

$$\delta = \min_{\sigma=1,2,\ldots,N} (\delta(A_\sigma)), \qquad \varepsilon = \min_{\sigma=1,2,\ldots,N} (\varepsilon(A_\sigma))$$

et

$$p_i = \max_{\sigma=1,2,\ldots,N} (p(A_\sigma)).$$

Supposons que $Q \epsilon S_i$, alors $|Q, A_s| < \delta(A_s)$, où $s$ est un des nombres $1, 2, \ldots, N$. Si $|R, Q| < \delta$, on a $|R, A_s| < 2\,\delta(A_s)$ et l'ensemble

$$\mathrm{Ct}(S, R) \cdot \overline{k}(M_j(Q), \varepsilon)$$

est vide pour tout $j \geqslant p_i$. Nous avons ainsi démontré que l'ensemble $S$ est transversal en tout point de $S_i$ aux champs $M_j(P)$, où $j \geqslant p_i$, $i = 1, 2, \ldots$.

Soit

$$M_i^*(P) = M_i(P) \cdot M_{p_i}(Q).$$

Nous aurons

$$M_i^*(P) \subset M_i(P) \text{ et } \prod_{i=1}^{\infty} M_i^*(P) = M(P).$$

Tout champ $M_i^*(P)$ est évidemment gras et continu dans $D$ et l'ensemble $S$ est transversal à $M_j^*(P)$ en tout point appartenant à $S_i$, pour $j \geqslant i$, $i, j = 1, 2, \ldots$.

Admettons que $D_0$ désigne l'ensemble vide et que, pour $i = 1, 2, \ldots,$ la fonction $\lambda_i(P)$ soit nulle dans l'ensemble $D_{i-1}$ et dans la fermeture $\Omega - D_{i+1}$. Dans $D_{i+1} - D_{i-1}$ supposons la fonction $\lambda_i(P)$ égale à la distance entre $P$ et la frontière de $D_{i+1} - D_{i-1}$. Posons

$$M^*(P) = \left| \begin{array}{ll} \operatorname*{Agr}_{i=1,2,\ldots} (M^*_{i+1}(P), \lambda_i(P)) & \text{dans } D, \\ M(P) & \text{dans } \Omega - D. \end{array} \right.$$

Dans chacun des ensembles $D_i$ l'agrégat est, en réalité, engendré par un nombre fini de champs et, par conséquent, $M^*(P)$ est un champ gras et continu dans $D$. Nous allons montrer qu'il est semi-continu supérieurement par rapport à l'inclusion dans $\Omega$. Il suffit de le prouver pour un point quelconque $P_0 \in \Omega - D$.

Soit, en effet, $\varepsilon > 0$. Il existe un indice I tel que

$$M_{\rm I}(P_0) \subset \bar{k}\left(M(P_0), \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

et un $\delta > 0$ tel que

$$M^*(P) \subset M_{\rm I}(P) \subset \bar{k}\left(M_{\rm I}(P_0), \frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad \text{si } |P, P_0| < \delta,$$

d'où

$$M^*(P) \subset \bar{k}(M(P_0), \varepsilon) = \bar{k}(M^*(P_0), \varepsilon) \quad \text{si } |P, P_0| < \delta.$$

La vérification des autres propriétés du champ $M^*(P)$ énumérées dans l'énoncé du lemme ne présentant aucune difficulté, nous l'omettrons.

**Lemme 2.** *Dans les hypothèses du lemme 1 tout point de l'ensemble $S$ est un point de sortie stricte et, de plus, les demi-intégrales positives issues des points de l'ensemble $S$ entrent dans $D - B$.*

Démonstration. Supposons que $Q = (t^0, x^0) \in S$. Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que les ensembles de droites $M^0 = \bar{k}(M(Q), \varepsilon)$ et $\mathrm{Ct}(S, Q)$ sont disjoints. Désignons par $C$ le cône engendré par les droites menées du point $Q$ et parallèles à celles du pinceau $M^0$. Le cône $C$ se compose du deux demi-cônes opposés $C^-$ et $C^+$, le premier correspondant aux valeurs de $t \leqslant t^0$, le second aux valeurs $t \geqslant t^0$. Or il existe évidemment un $\delta > 0$ tel que

1° $K = K(Q, \delta) \subset D$;

2° l'ensemble $K \cdot C^- - Q$ n'a pas de points communs avec $S$;

3° toute demi-intégrale négative issue du point $Q$ et contenue dans $K$ est située dans $K \cdot C^-$ [5]).

Le point $Q$ étant un point de sortie, il existe une demi-intégrale négative issue du point $Q$ et sortant de $B$. Tout l'ensemble $K \cdot C^- - Q$ doit

[5]) Cela résulte p. ex. du lemme 6 dans [2], p. 61.

alors être contenu dans $B$, d'où la première partie du lemme. La démonstration de la seconde partie du lemme est analogue (on prend le demi-cône $C^+$).

## 2. Théorème sur la régularisation d'un champ

Dans [3] le théorème sur la régularisation d'un champ (p. 55) joue un rôle capital. Nous y ajouterons encore un théorème du même genre moyennant des hypothèses plus fortes.

**Théorème 1.** *Nous admettons que le champ $M(P)$ et les ensembles $\Omega, \omega$ et $U$ satisfont à l'hypothèse $\mathcal{H}$. Alors il existe un champ $\tilde{M}(P)$ défini dans $\Omega$ et jouissant des propriétés suivantes:*

I $\tilde{M}(P) = M(P)$ *si* $P \in T$,

II $\tilde{M}(P)$ *est un champ d'éléments linéaires analytique dans* $\Omega - T$,

III *l'ensemble $S$ est transversal au champ* $\tilde{M}(P)$,

IV *il n'existe pas d'intégrales asymptotiques à droite*[6]) *du champ* $\tilde{M}(P)$ *par rapport aux ensembles $B$ et $\Omega$,*

V $s(\tilde{M}(P), B, \Omega) = S(\tilde{M}(P), B, \Omega) = S(M(P), B, \Omega) = S$,

VI $e(M(P), B, \Omega) \subset T$.

D é m o n s t r a t i o n. Posons $D = \Omega - T$, où $T$ a été déjà défini dans le chapitre précédent, et conservons toutes les notations qui y ont été introduites. Soit $\{M_i(P)\}$ la suite de champs dont il était question dans le lemme 1 et $M^*(P)$ le champ correspondant dont l'existence est assurée par ce lemme.

Désignons par $\bar{B}$ la fermeture de l'ensemble $B$ par rapport à $\Omega$ et soit

$$M_i^*(P) = M^*(P) \cdot M_i(P), \qquad i = 1, 2, \ldots ;$$

les $M_i^*(P)$ auront simultanément les propriétés, importantes pour nous, des champs $M_i(P)$ et du champ $M^*(P)$.

Ceci étant, on construit une suite d'indices $\{j(i)\}$, $i = 1, 2, \ldots$, satisfaisant à des conditions semblables à celles dont nous nous sommes servis dans la démonstration du théorème 1 [3], p. 51, à savoir:

$$\alpha)\quad j(i+1) > j(i) \geq i,$$

$$\beta)\quad Z^+(M_{j(i)}^*(P), D_i \cdot \bar{B}, B) \subset \Omega_{j(i)} - T,$$

$$\gamma)\quad Z^+(M_{j(i)}^*(P), S, \bar{B}) = S.$$

Les détails du raisonnement étant semblables à ceux de la démonstration du théorème 1 [3], je n'en indique ici que l'idée générale.

6) Voir [3], p. 50.

Remarquons d'abord qu'il existe, pour $i$ fixe, un $j_0$ tel que, pour $j \geqslant j_0$, on a

$$Z_i^+ = Z^+(M(P), D_i \cdot B, B) \subset \Omega_j,$$

car, dans le cas contraire, il existerait une demi-intégrale asymptotique à droite[7]). Il est aussi évident que les ensembles $Z_i^+$ et $T$ sont disjoints, donc $Z_i^+ \subset \Omega_j - T$ pour $j \geqslant j_0$. On démontre ensuite que l'ensemble $Z_i^+$ est fermé et qu'il existe un $j'(i) \geqslant j_0$ tel que l'on a encore, pour $j \geqslant j'(i)$,

$$Z^+(M_j^*(P), D_i \cdot \overline{B}, \overline{B}) \subset \Omega_j - T.$$

Quant à la condition $\gamma$), nous profitons de ce que l'ensemble $S$ est transversal au champ $M_1^*(P)$. Soit $P_0 = (t_0, x^0)$ un point quelconque de l'ensemble $S$. En vertu de la définition de la transversalité il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que le pinceau $M_0 = k(M_1^*(P_0), \varepsilon)$ et le contingent $\mathrm{Ct}(S, P_0)$ sont disjoints. Désignons par $C^+$ un demi-cône positif engendré par les demi-droites positives (composées des points $(t, x)$ tels que $t \geqslant t_0$) parallèles aux droites du pinceau $M_0$. Il existe évidemment un entourage $K$ du point $P_0$ tel que $K \subset \Omega - T$, que l'ensemble $S \cdot C^+ \cdot K$ ne contient qu'un seul point $P_0$ et que les portions des demi-intégrales positives du champ $M_1^*(P)$, issues de $P_0$ et contenues dans $K$, sont encore contenues dans $K \cdot C^+$. L'ensemble $K \cdot C^+ - \{P_0\}$ est contenu dans $\Omega - B$, ou bien dans $B$. Dans ce dernier cas, toute demi-intégrale positive du champ $M(P)$, issue du point $P_0$, entrerait dans $B$, puisque les intégrales du champ $M(P) \subset M_1^*(P)$ sont en même temps des intégrales du champ $M_1^*(P)$. Mais ceci contredirait l'hypothèse $\mathcal{R}$. Il s'ensuit que $K \cdot C^+ - \{P_0\} \subset \Omega - B$ et toute demi-intégrale positive du champ $M_1^*(P)$ et, a fortiori, d'un champ quelconque $M_i^*(P)$, issue du point $P_0$, entre dans $\Omega - B$, d'où la condition $\gamma$).

Il suffit maintenant de poser

$$j(i) = 1 + \max(i, j'(i), j'(i-1)), \qquad i = 2, 3, \ldots$$

et $j(1) = j'(1)$ pour satisfaire à toutes les trois conditions $\alpha, \beta$ et $\gamma$.

Ceci posé, désignons, pour $i = 1, 2, \ldots$, par $\lambda_i(P)$ une fonction continue positive dans l'intérieur de $D_{i+1} - D_{i-1}$ et nulle ailleurs — $D_0$ désignant l'ensemble vide. On vérifie sans peine que le champ

$$M^{**}(P) = \left| \begin{array}{l} \underset{i=1,2,\ldots}{\mathrm{Agr}} \; (M^*_{j(i+1)}(P), \lambda_i(P)) \text{ dans } \Omega - T, \\ M(P) \text{ dans } T, \end{array} \right.$$

est continu et gras dans $\Omega - T$ et qu'il satisfait dans $\Omega$ aux conditions I, III, IV, V et VI de la thèse du théorème.

[7]) Cf. la démonstration du théorème 1 [3], p. 52.

Pour terminer la démonstration, nous remplacerons dans $\Omega - T$ le champ $M^{**}(P)$ par un champ d'éléments linéaires analytique $M'(P) \subset M^{**}(P)$ (le procédé est tout à fait analogue à celui de la démonstration du théorème 2 [3]) et nous admettons que

$$\tilde{M}(P) = \begin{cases} M'(P) \text{ dans } \Omega - T, \\ M(P) \text{ dans } T. \end{cases}$$

Nous omettrons la vérification facile que les conditions I — VI seront remplies.

## 3. Structure topologique de l'ensemble $B+S$

**Théorème 2.** *Si l'hypothèse $\mathfrak{R}$ est remplie, les ensembles*

$$B+S \quad \text{et} \quad S \times \langle 0,1)$$

*sont homéomorphes. Cette homéomorphie fait correspondre à l'ensemble $B$ le produit cartésien $S \times (0,1)$ et au point arbitraire $Q = (u, y) \epsilon S$ le point $(Q, 0) = (u, y, 0) \epsilon S \times \{0\}$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\tilde{M}(P)$ un champ régularisé jouissant des propriétés spécifiées dans la thèse du théorème 1.

Les intégrales du champ $\tilde{M}(P)$ satisfont dans $\Omega - T$ à la condition d'unicité. Tous les points de sortie par rapport au champ $\tilde{M}(P)$ et les ensembles $B$ et $\Omega$ sont des points de sortie forte (et même de sortie stricte), leur ensemble est identique à $S$. Il n'y a pas d'intégrales asymptotiques à droite et, par suite, tout point $P = (t, x) \epsilon B+S$ a un conséquent $C(P) = (u, y) \epsilon S$, étant une fonction continue de $P$ dans $B+S$ (Cf. [3], chap. 6, p. 56). Posons

$$R = F(P) = (u, y, \tau), \text{ où } (u, y) = C(P) \text{ et } \tau = u - t.$$

Si $P \epsilon B+S$ le point correspondant $R \epsilon S \times \langle 0, +\infty)$. La transformation $F(P)$ est évidemment biunivoque, continue et elle transforme $B+S$ en un ensemble $\mathfrak{S} \subset S \times \langle 0, +\infty)$. Réciproquement, le point $P = F^{-1}(R)$ dépend d'une manière continue de $R$, ce qui résulte immédiatement du théorème classique sur la dépendance des intégrales d'équations différentielles ordinaires de leurs valeurs initiales. Il est aussi facile de voir que l'ensemble $\mathfrak{S}$ peut s'écrire:

$$(u, y) \epsilon S \text{ et } 0 \leqslant \tau < u - a(u, y),$$

où $a(u, y)$ désigne une telle fonction des $u$ et $y$, bien déterminée sur $S$, que la demi-intégrale saturée à gauche, issue du point $(u, y)$ soit définie dans l'intervalle $a(u, y) < t \leqslant u$, pour tout point $(u, y) \epsilon S$.

Nous allons montrer que la fonction $\gamma(u, y) = u - a(u, y) \leqslant +\infty$ est semi-continue inférieurement sur $S$.

En effet, fixons pour un instant le point $(u, y) \epsilon S$ et admettons que $0 < \Theta \leqslant \gamma(u, y)$. Le point $P_0 = F^{-1}(R_0)$, où $R_0 = (u, y, \Theta)$ est un point intérieur de $B$ et les points $(u', y', \Theta)$ appartiennent encore à $\Xi$, pourvu que les $u'$ et $y'$ soient suffisamment voisins de $u$ et $y$ respectivement. Il est donc clair que $\gamma(u', y') \geqslant \Theta = \gamma(u, v)$ dans les mêmes conditions et, par conséquent,

$$\liminf_{(u', y') \to (u, y)} \gamma(u', y') \geqslant \Theta,$$

d'où

$$\liminf_{(u', y') \to (u, y)} \gamma(u', y') \geqslant \gamma(u, y),$$

puisque $\Theta$ peut être choisi arbitrairement proche de $\gamma(u, y)$. Nous avons ainsi démontré que cette fonction est en réalité semi-continue inférieurement.

Or, en vertu du théorème bien connu de Baire, il existe une suite croissante de fonctions continues

$$g_i(u, y), \qquad i = 1, 2, \ldots, \qquad (u, y) \epsilon S$$

convergente vers la fonction $\gamma(u, y)$. Soit $\eta(u, y)$ la distance, dans l'espace à $n+2$ dimensions, entre le point $(u, y, 0)$ et l'ensemble des points $(v, z, \tau)$ tels que $(v, z) \epsilon S$ et $\tau = \gamma(v, z)$. Admettons que

$$G_i(u, y) = \max\left(g_i(u, y), \eta(u, y)\right) \frac{i}{i+1}.$$

On vérifie facilement que la suite de fonctions $G_i(u, y)$ est encore croissante et converge vers $\gamma(u, y)$, et, de plus, que les nouvelles fonctions sont positives et continues dans $S$. Enfin, posons, pour $\frac{i-1}{i} \leqslant \sigma < \frac{i}{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$,

$$\tau = G(u, y, \sigma) = G_i(u, y) + [G_{i+1}(u, y) - G_i(u, y)] \cdot (i\sigma - i + 1)(i+1).$$

C'est une fonction croissante en $\sigma$, continue par rapport à toutes les variables indépendantes. On a évidemment

$$\lim_{\sigma \to 1} G(u, y, \sigma) = \gamma(u, y), \text{ pour } (u, y) \epsilon S,$$

et on constate que la transformation biunivoque et continue

$$\tau = G(u, y, \sigma)$$

$$u = u$$

$$y = y$$

transforme l'ensemble $S\times\langle 0,1)$ en $\mathfrak{S}$. La transformation composée $\mathcal{T}$:

$$P=(t,x)=F^{-1}(u,y,G(u,y,\sigma))$$

est biunivoque, continue et transforme l'ensemble $S\times\langle 0,1)$ en $B+S$; la transformafion $\mathcal{T}^{-1}$ est aussi continue, donc les ensembles $B+S$ et $S\times\langle 0,1)$ sont homéomorphes et il est clair que $B=\mathcal{T}(S\times(0,1))$ et $(u,y)=\mathcal{T}(u,y,0)$, pour $(u,y)\in\check{S}$.

Nous avons ainsi démontré le théorème 2. Nous allons cependant modifier encore un peu son énoncé, afin de mettre en évidence sa connexion avec un théorème de T. Ważewski concernant la structure de l'ensemble engendré par les intégrales des systèmes d'équations différentielles ordinaires ([10], théorème 4).

**Théorème 2 bis.** *Nous supposons que le champ $M(P)$ est défini dans un ensemble ouvert $\Omega\subset E_{n+1}$ qui contient un ensemble ouvert $\omega$. L'ensemble $U\subset\omega'$ contient toutes les demi-intégrales du champ $M(P)$ asymptotiques à droite par rapport aux ensembles $\omega$ et $\Omega$, en symboles $A^{+}(M(P),\omega,\Omega)\subset U$. L'ensemble $U$ est fermé par rapport à $\omega'$ et saturé à gauche par rapport au champ $M(P)$ et à l'ensemble $\omega'$* [8]*). Tout point de sortie par rapport au champ $M(P)$ et aux ensembles $\omega$ et $\Omega$ n'appartenant pas à $U$ est un point de sortie forte. L'ensemble $S'$ de ces points est transversal au champ $M(P)$ et $\eta(P)=|P,T|>0$* [9]*) pour $P\in S'$, où $T=\mathrm{Front}(\omega,\Omega)-U-S'$, $B=\omega-U$. Dans ces hypothèses les ensembles $B+S'$ et $S'\times\langle 0,1)$ sont homéomorphes. Cette homéomorphie fait correspondre à tout point $Q=(u,y)\in S'$ le point $(Q,0)=(u,y,0)\in S'\times\{0\}$.*

Ce théorème ressemble beaucoup au théorème de T. Ważewski que nous venons de citer, mais leurs domaines de validité s'entrecroisent. Considérons le cas particulier où $M(P)$ est un champ d'éléments linéaires d'un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre dont les intégrales satisfont à la condition d'unicité. Supposons que

$$s(M(P),\omega,\Omega)=S(M(P),\omega,\Omega),$$

ce qui est une hypothèse un peu plus forte que l'hypothèse $s=\check{S}$, et admettons que $S=s(M(P),\omega,\Omega)$ et $U=A^{+}(M(P),\omega,\Omega)+Z^{-}(M(P),S'',\omega')$, où $S''$ est un sous-ensemble de $S$ fermé par rapport à $S$. Supposons enfin que $S'=S-S''$ soit transversal au champ $M(P)$ et que $\eta(P)>0$ dans $S'$. En appliquant dans ce cas le théorème 2 nous obtiendrons une proposition moins générale que le théorème de Ważewski à cause des restrictions qu'impose la méthode utilisée dans le présent mémoire.

[8]) Cf. [3], chap. 2, p. 43.

[9]) Cela garantit que l'ensemble $T$ est fermé par rapport à $\Omega$.

Remarquons cependant que, dans la fin de son travail fondamental ([9], p. 313) sur le sujet en question, T. W a ż e w s k i fait mention de systèmes d'équations différentielles ne remplissant pas la condition d'unicité. L'ensemble $\omega$ y est supposé polyfacial avec faces régulières. Les faces qui forment l'ensemble $S$ satisfont à une condition qui correspond à la transversalité au champ donné. La méthode d'approximation du champ donné par une suite de champs plus réguliers, proposée par T. W a ż e w s k i, conduit à un résultat moins général que la méthode de régularisation du champ présentée ici.

## 4. Compléments

### Cas particuliers

I. Supposons que $U = A^{+}(M(P), \omega, \Omega)$, c'est-à-dire que $U$ soit un ensemble engendré par les demi-intégrales asymptotiques à droite. Dans ce cas l'ensemble complémentaire $B+s(M(P), \omega, \Omega)$ est homéomorphe à l'ensemble $s \times \langle 0,1)$.

II. Lorsqu'il n'y a pas de demi-intégrales asymptotiques à droite, l'ensemble $A^{+}(M(P), \omega, \Omega)$ est vide et l'ensemble $U$ peut être considéré comme la zone négative d'émission d'un ensemble fermé donné d'avance. L'ensemble complémentaire $B+s-U$ est alors homéomorphe à l'ensemble $(s-U) \times \langle 0,1)$.

III. Nous énoncerons un théorème qui n'est qu'une conséquence presque immédiate du théorème 2 bis et concerne un cas encore beaucoup plus particulier, qui semble pourtant assez intéressant par sa simplicité.

**Théorème 3.** *Supposons que $M(P)$ soit défini dans un ensemble $W \subset E_{n+1}$ de tous les points $(t, x)$ tels que $-\infty \leqslant a < t \leqslant \beta$. Désignons par $\Pi$ l'hyperplan $t = \beta$ et par $\omega$ l'intérieur de l'ensemble $W$. Soit $V$ un ensemble fermé contenu dans $W$, $U = Z^{-}(M(P), V, W)$ sa zone d'émission négative par rapport à $W$ et $A^{+} = A^{+}(M(P), \omega, W)$ l'ensemble asymptotique des points appartenant aux intégrales du champ $M(P)$, saturées à droite par rapport à $W$ et contenues dans $\omega$.*

*Dans ces conditions les ensembles $W-U-A^{+}$ et $(\Pi - V) \times \langle 0,1)$ sont homéomorphes et l'homéomorphie est une identité sur $\Pi - V$.*

D é m o n s t r a t i o n. Désignons par $\Omega$ l'ensemble des points $(t, x)$ tels que $a < t < +\infty$. On peut prolonger le champ $M(P)$ sur l'ensemble $\Omega$ tout entier[10]). Tous les points de la frontière $\Pi = \mathrm{Front}(\omega, \Omega)$ sont des points de sortie stricte et $\Pi$ est évidemment transversal au champ $M(P)$. Pour terminer la démonstration il suffit d'appliquer le théorème 2 bis.

[10]) Cf. [3], lemme 1. p. 42.

**Corollaire 1.** *Si le champ $M(P)$ est borné, il n'y a pas d'intégrales asymptotiques à droite et $A^{+}$ est un ensemble vide. Les ensembles $W-U$ et $(H-V)\times\langle 0,1)$ sont alors homéomorphes*[11]. *Si, en outre, l'ensemble $V\cdot H$ est vide, l'ensemble $W-U$ est homéomorphe à un demi-espace $t\geqslant 0$.*

**Corollaire 2.** *On peut renforcer le théorème 3 en exigeant que l'homéomorphie qui transforme $W-U-A^{+}$ en $(H-V)\times\langle 0,1)$ soit une transformation de classe $C^{(\infty)}$*[12] *dont le Jacobien ne disparaît pas partout.*

Nous omettrons la démonstration qui ne présente pas de difficultés essentielles.

R e m a r q u e. Dans le cas général des équations au paratingent ou des systèmes d'équations différentielles ordinaires ne remplissant pas la condition d'unicité, la structure topologique des zones d'émission peut être très compliquée. Au contraire, celle des ensembles complémentaires est bien simple dans les hypothèses du théorème 3. D'autre part, la structure de l'ensemble complémentaire détermine déjà, en quelque mesure, celle de la zone d'émission. On peut p. ex. montrer que le théorème bien connu de K n e s e r [6] est une conséquence immédiate du théorème 3.

En employant la terminologie adoptée ici, le contenu de ce théorème peut être exprimé de la façon suivante. Lorsque $M(P)$ est un champ d'éléments linéaires, défini et borné dans $W$ et que $Z$ est la zone d'émission négative d'un point $P_0$ appartenant à l'intérieur de l'ensemble $W$, alors les intersections de l'ensemble $Z$ avec les hyperplans $t=\mathrm{const}$, contenus dans $W$, sont des continus bornés s'ils ne sont pas vides.

En effet, dans le cas contraire, il existerait dans $W-Z$ un circuit $\Gamma$ non homologue à un point dans $W-Z$ (c'est-à-dire un circuit qui ne peut être transformé en un point par une transformation continue dans $W-Z$), mais ceci contredirait le fait que tout circuit contenu dans un ensemble homéomorphe à un demi-espace est homologue à un point (comp. le corollaire du théorème 3).

## 5. Exemples simples d'applications

**Intégrales asymptotiques.** Nous allons maintenant montrer par un exemple[13], comment on peut profiter du théorème 3 dans l'étude quali-

[11]) J'ai communiqué ce résultat oralement au V^e Congrès des Mathématiciens Polonais à Cracovie (30 mai 1947). voir Ann. Soc. Pol. Math. 21 (1950). Suppl. Sprawozdanie z V Zjazdu Matematyków Polskich ..., p. 33.

[12]) C'est-à-dire une transformation représentée par des fonctions ayant partout des dérivées continues de tous les ordres.

[13]) Exemple ressemblant beaucoup à ceux qui ont été discutés par T. W a ż e w s k i [9], p. 306 et A. P l i ś [7].

tative de l'allure des intégrales des équations au paratingent. Dans ce but, nous envisagerons, dans l'espace $E_{2+1}$, le cube ouvert $\omega$ de sommets

$$(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1)$$
$$(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1).$$

Nous supposons que les points intérieurs des faces supérieure et inférieure, c'est-à-dire des faces situées dans les plans $x_2=0$ et $x_2=1$, sont des points de sortie forte par rapport à un champ $M(P)$ défini dans un ensemble $W$, représenté par l'inégalité $0<t\leqslant 2$. Nous supposons encore que les points intérieurs des faces de devant et de derrière ($x_1=0$ et $x_1=1$) ne sont pas des points de sortie et que toutes les faces de $\omega$ sont transversales au champ $M(P)$. Supposons enfin que l'on ait joint deux points intérieurs des faces, inférieure et supérieure, par un ensemble fermé $C_1$ en forme d'une chaînette, contenu (à l'exception de ces deux points) dans le cube $\omega$ et, de façon analogue, deux autres points, des faces de devant et de derrière, par une autre chaînette $C_2$, située à droite de la première. Nous allons montrer qu'il existe une intégrale du champ donné joignant les chaînettes dans l'intérieur du cube $\omega$.

A cet effet, nous définirons un nouveau champ dans $W$:

$$M^*(P)=\begin{cases} M(P) & \text{dans } \omega,\\ M(P)\widehat{+}M_0 & \text{sur la frontière de } \omega,\\ M_0 & \text{en dehors de } \omega,\end{cases}$$

où $M_0$ est l'élément linéaire parallèle à l'axe $t$. $M(P)\widehat{+}M_0$ désigne, pour tout $P$ fixe, le plus petit pinceau contenant les pinceaux $M(P)$ et $M_0$[14]. Posons $V=C_2$. L'ensemble $U=Z^-(M^*(P),V,W)$ contient évidemment un ensemble $C''$ composé de la chaînette $C_2$ et de deux segments de droite parallèles à l'axe $t$ qui joignent les deux bouts de $C_2$ au plan $t=0$. De même, la zone d'émission positive de la chaînette $C_1$ contient un ensemble $C'$ composé de la chaînette $C_1$ et de deux segments de droite parallèles à l'axe $t$ qui joignent les deux bouts de $C_1$ au plan $t=2$.

Il est facile de voir que, si la chaînette $C_1$ et l'ensemble $U$ étaient disjoints, les ensembles $C'$ et $U$ seraient encore disjoints et l'ensemble $C'$ serait contenu dans l'ensemble $W-U$. Ce dernier étant homéomorphe à un demi-espace, en vertu du théorème 3, on pourrait transformer l'ensemble $C'$ continuement dans $W-U$ en un ensemble situé sur le plan $t=2$, mais ceci est impossible, eu égard à la position mutuelle des ensembles $C'$ et $C''$. Nous avons ainsi constaté qu'il existe un point commun de la

[14]) Voir [3], chap. 1, p. 40.

chaînette $C_1$ et de l'ensemble $U$, c'est-à-dire il existe une intégrale joignant les ensembles $C_1$ et $C_2$. On vérifie sans peine qu'elle doit être contenue dans $\omega$.

En faisant tendre $C_1$ vers le plan $t=0$, on en obtient une intégrale asymptotique issue de $C_2$. Il est clair que le même procédé peut être appliqué aux systèmes d'équations différentielles ordinaires.

**Problème aux limites.** Soit $\Omega = E_{2+1}$ et admettons que le champ $M(P)$ soit borné. Prenons deux plans $\sigma_a$ et $\sigma_b$, où $a < b$, et deux droites $l_a$, $l_b$ representées par les équations:

$$(\sigma_a) \qquad t=a$$
$$(\sigma_b) \qquad t=b$$
$$(l_a) \qquad t=a, \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 = a_3,$$
$$(l_b) \qquad t=b, \quad \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = \beta_3,$$
$$\begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ \beta_1, \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Désignons par $W$ l'ensemble des points $(t, x_1, x_2)$ tels que $t \leqslant b$, et posons $U = Z^-(M(P), l_b, W)$.

Le champ $M(P)$ étant borné on peut trouver sur la droite $l_a$ deux points $P_1 = (a, x_1', x_2')$ et $P_2 = (a, x_1'', x_2'')$ tels que les points $R_1 = (b, x_1', x_2')$ et $R_2 = (b, x_1'', x_2'')$ soient situés dans $\sigma_b$ de part et d'autre de la droite $l_b$, et que les segments droits $P_1 R_1$ et $P_2 R_2$ n'aient pas de points communs avec la zone d'émission $U$.

En vertu du théorème 3 l'ensemble $W - U$ est homéomorphe à l'ensemble $\Gamma = (\sigma_b - l_b) \times \langle 0,1)$, l'homéomorphie étant une identité sur $\sigma_b$. Or si le segment droit $P_1 P_2$ n'avait aucun point commun avec $U$, l'image de la ligne polygonale $R_1 P_1 P_2 R_2$ dans $\Gamma$ serait un arc joignant les points $(b, x_1', x_2')$ et $(b, x_1'', x_2'')$ appartenant aux deux composantes disjointes de $\Gamma$, ce qui est évidemment impossible. Il existe donc une intégrale joignant le segment $P_1 P_2$ à la droite $l_b$.

Si le champ $M(P)$ est engendré par un système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{d x_i}{d t} = f_i(t, x_1, x_2), \qquad i = 1, 2,$$

dont les seconds membres sont continus et bornés dans $\Omega$, alors il existe une intégrale $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), a \leqslant t \leqslant b$ de ce système satisfaisant aux conditions aux limites

$$a_1 \varphi_1(a) + a_2 \varphi_2(a) = a_3$$
$$\beta_1 \varphi_1(b) + \beta_2 \varphi_2(b) = \beta_3$$

pourvu que le déterminant des coefficients ne s'annule pas.

Dans le cas linéaire où

$$f_i(t, x_1, x_2) = \lambda F_i(t) x_1 + \lambda G_i(t) x_2 + H_i(t), i = 1, 2,$$

un résultat semblable s'obtient immédiatement pour les valeurs suffisamment petites de $|\lambda|$. Ayant en vue l'étude plus détaillée de ce sujet dans un travail ultérieur, je me contente ici de ces très simples remarques et je passe à un dernier exemple.

**Théorème de J. Szarski.** Admettons que le champ $M(P)$ soit donné dans $\Omega = E_{2+1}$ et soit $\omega$ un tuyau représenté par l'inégalité

$$x_1^2 + x_2^2 < r^2,$$

dont la surface $\Phi$ est transversale au champ $M(P)$. Supposons que tous les points de cette surface soient des points de sortie forte. Désignons par $\sigma_a$ le plan $t = a$ et posons $A_a = \sigma_a \cdot A^+$, où $A^+$ est un ensemble asymptotique à droite. Nous allons montrer que $A_a$ est un continu ou se réduit à un seul point pour chaque valeur de $a$ (cf. J. Szarski [8]).

Dans le cas contraire, il existerait dans $\sigma_a \cdot \overline{\omega} - A_a$ une circonférence $C$ telle que deux intégrales asymptotiques à droite $I_i$ et $I_e$ perceraient le plan $\sigma_a$ à l'intérieur resp. à l'extérieur de $C$. Ces intégrales ne peuvent avoir de points communs à droite du plan $\sigma_a$, en vertu du théorème de Kneser mentionné plus haut, et il existe un nombre $b < a$ tel que ces intégrales ne se coupent pas pour $t > b$. Nous nous bornerons maintenant à la portion de $\omega$ qui est située à droite du plan $\sigma_b$, c'est-à-dire dans le demi-espace $t > b$. On constate facilement qu'il est possible de trouver une homéomorphie transformant cette portion de $\overline{\omega}$ en elle-même et les portions correspondantes des intégrales $I_i$ et $I_e$ en demi-droites. Il est clair que le circuit $C$ ne peut être transformé d'une façon continue, dans la portion de $\omega$ en question, en un circuit situé sur la surface $\Phi$, de telle manière que le circuit ne coupe pas $I_i$ ou $I_e$. D'autre part, il résulte presque immédiatement du théorème 2 que cela est pourtant possible. Cette contradiction montre que l'ensemble $A_a$ ne peut avoir de composantes disjointes.

Le raisonement s'applique évidemment aux tuyaux $\omega$ plus générales.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] Bielecki A., *Pewna własność topologiczna całek układów równań różniczkowych zwyczajnych.* Ann. Soc. Polon. Math. **21** (1950), Suppl., Sprawozdanie z V Zjazdu Matematyków Polskich w Krakowie, p. 33.

[2] ——— *Sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour l'unicité des solutions des systèmes d'équations différentielles ordinaires et des équations au paratingent.* Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sectio A, **2** (1948), p. 49.

[3] ——— *Extension de la méthode du rétracte de* T. Ważewski *aux équations au paratingent.* Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sectio A, **9** (1955), p. 37.

[4] ——— *Certaines propriétés topologiques des intégrales des équations différentielles ordinaires.* Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4, 8 (1956), p. 503—506.

[5] Bouligand G., *Introduction à la géometrie infinitésimale directe.* Paris (1942).

[6] Kneser H., *Über die Lösungen eines systems gewöhnlicher Differentialgleichungen dass der Lipschitz-Bedingung nicht genügt.* Sitz.-Ber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Mat. Kl. (1923), p. 171—174.

[7] Pliś A., *On a topological method for studying the behaviour of the integrals of ordinary differential equations.* Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 2 (1954), p. 416.

[8] Szarski J., *Sur une propriété asymptotique des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires.* Ann. Soc. Polon. Math. 20 (1947), p. 161.

[9] Ważewski T., *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires.* Ann. Soc. Polon. Math., 20 (1947), p. 279—313.

[10] ——— *Sur la structure de l'ensemble engendré par les intégrales non asymptotiques des équations différentielles.* Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3 (1955), p. 143.

## Streszczenie

Metoda regularyzacji równań paratyngensowych inna nieco niż w pracy [3], a podobniejsza do tej, którą zaproponował T. Ważewski ([9] str, 313), prowadzi przy mocniejszych założeniach do twierdzenia 2, które, między innymi, charakteryzuje strukturę topologiczną zbiorów dopełniających do zbiorów utworzonych z całek asymptotycznych lub zbiorów będących lewostronnymi strefami emisji zbiorów relatywnie domkniętych. Wyniki te są odpowiednikami twierdzenia T. Ważewskiego ([10], tw. 4) — tu znowu obszary stosowalności krzyżują się, częściowo tylko zachodząc na siebie.

Szczególnym przypadkiem twierdzenia 2 jest wniosek z twierdzenia 3 (rozdz. 4) wyróżniający się prostotą. Wynik ten, otrzymamy już dawniej na drodze bardziej bezpośredniej referowałem ustnie na V Zjeździe Matematyków Polskich w Krakowie (30 V 1947 r.) [1]. Treść jest następująca: Jeżeli pole $M(P)$ jest określone i ograniczone w obszarze $W: \infty \leqslant \alpha < t \leqslant \beta$ zawartym w przestrzeni $(n+1)$ — wymiarowej i jeśli $V$ oznacza podzbiór $W$ domknięty względem $W$ a $U$ strefę lewostronną emisji zbioru $V$ ze względu na $M(P)$, oraz jeśli $\Pi$ oznacza hiperpłaszczyznę $t=\beta$, to zbiory $W-U$ i $(\Pi - V)\times\langle 0,1)$ są homeomorficzne (homeomorfizm może być nawet transformacją klasy $C^{\infty}$ o jakobianie wszędzie różnym od zera, co jednak wymaga osobnego dowodu).

Wnioskiem natychmiastowym jest znane twierdzenie Knesera [6]; z przykładu podobnego do przykładów podanych przez T. Ważewskiego ([9], str. 306) i A. Plisia [7] i innych wynika, że i to proste twierdzenie może mieć pewne zastosowania w dowodach istnienia rozwiązań zadań brzegowych dla równań paratyngensowych i równań różniczkowych.

Резюме

Метод регуляризаций паратингентных уравнений несклько иной чем в работе [3], но более похожий на применяемый Т. Важевским ([9] стр. 313) ведет при сильнейших предположеньях к теореме 2, которая характеризует, между прочим, топологическую структуру множеств дополнительных к множествам, состоящим из асимптотических интегралов, или множесть, являющихся левосторонными зонами эмиссии относительно домкнутых множеств. Эти результаты — аналоги теоремы Т. Важевского ([10], теор. 4) — но области применимости только отчасти заходят на себя.

Частным случаем теоремы 2 является отличающееся простотой следствие из теоремы 3 (гл. 4). Этот результат, полученный уже раньше более непосредственным методом, был мною реферирован на 5-ом Съезде Польских Математиков в Кракове (30 V 1947) [1]. Содержание его следующее:

Если поле $M(P)$ определённо и ограничено в области $W: -\infty \leqslant \alpha < t \leqslant \beta$, заключённой в $(n+1)$-мерном пространстве, и если $V$ обозначает подмножество $W$ домкнутое относительно $W$, а $U$ обозначает левосторонную зону эмиссии множества $V$ в отношении к $M(P)$, и если к тому $\Pi$ обозначает гиперплоскость $t=\beta$, то множества $W-U$ и $(\Pi-V)\times\langle 0,1)$ гомеоморфны (гомеоморфизм может быть даже преобразованием класса $C^{\infty}$ с якобианом везде отличным от нуля, что требует, все же особого доказательства).

Немедленным, следствием является известная теорема Кнезера [6]; из примера, похожего на примеры, данные Т. Важевским ([9], стр. 306) и А. Плисем [7], следует, что и эта простая теорема может иметь некоторые применения в доказательствах существования решений краевых задач для паратингентных уравнений и дифференциальных уравнений.