ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. VII, 6 SECTIO A 1953

Z Seminarium Matematycznego Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr M. Biernacki

MIECZYSŁAW BIERNACKI

Sur quelques propriétés des ovales

O kilku własnościach owali

О нескольких свойствах овалов

Introduction. Ce travail contient quelques résultats qui n'ont que peu de rapports entre eux. G. Pólya a montré [7] [1]) qu'on peut toujours inscrire dans un ovale un rectangle de manière que le rapport des aires du rectangle et de l'ovale soit supérieur à une constante numérique positive. C. Radziszewski a démontré [8] que la valeur exacte de cette constante est $\frac{1}{2}$. Dans le cas des ovales ayant un centre de symétrie j'ai trouvé une démonstration particulièrement simple de cette proposition (elle est exposée dans l'article cité de C. Radziszewski p. 5-6). Au § 1 de ce travail je m'occupe de problèmes analogues relatifs aux cylindres inscrits dans les corps de révolution convexes. Au § 2 j'expose une démonstration simple du théorème: il est toujours possible d'inscrire dans un ovale deux carrés au moins. Ce théorème est un cas particulier du théorème de Sznirelman [9], d'après lequel il existe sur chaque courbe fermée plane, ayant une courbure continue, 4 points qui sont les sommets d'un carré, et du théorème de Kakeya [6], d'après lequel il est toujours possible d'inscrire dans un ovale deux rectangles dont le rapport des côtés est donné à l'avance. Au § 3 je détermine la limite inférieure exacte du rapport de la longueur d'un arc de la frontière de l'ovale, dont la corde est un diamètre, à la longueur totale de cette frontière. J'y signale aussi quelques problèmes qui ne semblent pas résolus à présent. Enfin au § 4 je m'occupe de l'intégrale

$$\int\limits_C r\, ds$$

1) Les numéros renvoient à la bibliographie placée à la fin de l'article.

où C désigne la frontière de l'ovale, s la longueur de l'arc de C et r la distance d'un point de C au point fixe de l'ovale. Je détermine des limites entre lesquelles peut varier le rapport de cette intégrale au carré du diamètre de l'ovale; la limite inférieure est déterminée exactement.

§ 1. Théorème I. *Considérons un corps engendré par la révolution d'un ovale, ayant deux axes de symétrie perpendiculaires, autour de l'un d'eux. Nous admettons que la frontière de l'ovale est de classe C_1 et qu'elle ne contient pas de segments de droite* [2]*). Il est toujours possible d'inscrire dans ce corps un cylindre circulaire, dont l'axe coïncide avec l'axe de révolution du corps donné, est dont le volume est égal au moins à $\frac{4}{9}$ du volume du corps de révolution. La constante $\frac{4}{9}$ ne peut être augmentée.*

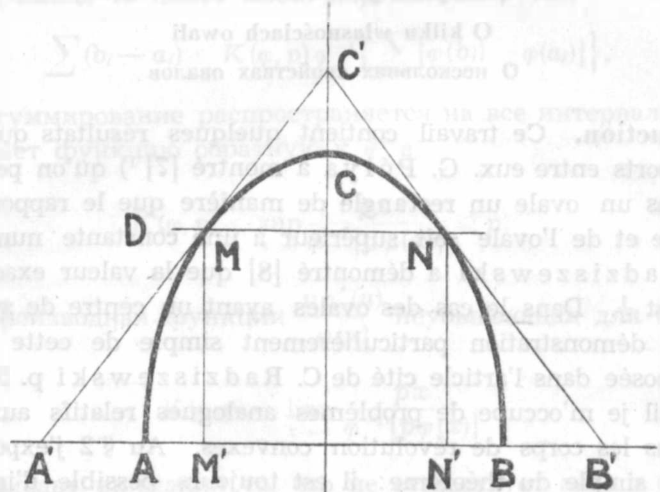

fig. 1

On peut admettre que l'ovale en question possède deux axes de symétrie, l'un d'eux coïncidant avec l'axe de révolution et l'autre étant perpendiculaire à cet axe. Soit AB la corde de l'ovale qui est perpendiculaire à l'axe de révolution et située sur l'axe de symétrie. Il est clair que la tangente à l'ovale est perpendiculaire à AB aux points A et B.

[2]) Un ovale arbitraire peut être approché indéfiniment par des ovales dont les frontières possèdent les propriétés énumérées. Ceci signifie qu'il existe un ovale O' de la classe particulière considérée, dont la „distance" à l'ovale donné O est arbitrairement petite. Si A est un point de O, $d(A, O')$ sa distance à O', B est un point de O', $d(B, O)$ sa distance à O, la distance entre les ovales O et O' est égale à l'expression $\max[\sup_{A \in O} d(A, O'), \sup_{B \in O'} d(B, O)]$.

Si CE est la corde de l'ovale située sur l'axe de révolution, les tangentes à l'ovale aux points C et E sont parallèles à AB. Considérons une droite D variable, située dans le plan de l'ovale et parallèle à AB, soient M et N ses points d'intersection avec l'ovale (fig. 1). Soit d'autre part $A'B'C'$ le triangle tangent en M et N à l'ovale et dont les sommets A' et B' se trouvent sur le prolongement de AB. Posons $A'B' = a$ et soit h la hauteur du triangle $A'B'C'$ qui correspond à ce côté. En menant par les points M et N des perpendiculaires MM' et NN' sur AB, désignons par x et y respectivement la base $M'N'$ et la hauteur $MM' = NN'$ du rectangle $MNM'N'$, qui est évidemment inscrit dans la partie de l'ovale située d'un côté de AB. Lorsque la droite D est située près de AB, le rapport h/a est évidemment très grand et le rapport y/x très petit. Au contraire, lorsque D passe près de C, le rapport h/a est très petit et le rapport y/x très grand. Les nombres a, h, x, y variant d'une manière continue lorsque D se déplace, il en résulte qu'il existe une position de la droite D telle que l'on ait:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{a}.$$

En tenant compte de la relation $a:x = h:(h-y)$ on trouve que $x = \frac{2}{3}a$, $y = \frac{1}{3}h$. Le volume du cylindre engendré par la révolution du rectangle $MM'NN'$ autour de CC' est égal à $\pi x^2 y/4$, le volume du cône engendré par la révolution du triangle $A'B'C'$ autour de CC' est égal à $\pi a^2/12h$; le rapport des deux volumes étant égal à $\frac{4}{9}$, la première partie du théorème en résulte. La limite $\frac{4}{9}$ est atteinte lorsque le corps de révolution se réduit à l'ensemble de deux cônes circulaires égaux, ayant une base commune, car un calcul simple montre que si le rapport y/x n'est pas égal à $\frac{1}{2} \cdot h/a$, le volume du cylindre de révolution inscrit est plus petit que dans le cas $y/x = \frac{1}{2} \cdot h/a$.

§ 2. Je vais démontrer maintenant que *dans tout ovale dont la frontière est de classe C_1 et ne contient pas de segments de droite on peut inscrire au moins deux carrés* [3]).

Choisissons une droite quelconque dans le plan de l'ovale comme axe Oy et la droite joignant les points de contact M et M' des droites d'appui parallèles à l'axe Oy avec l'ovale comme axe Ox. La longueur d'une corde parallèle à l'axe Oy de l'ovale est une fonction $L(x)$. Cette fonction peut être évidemment considérée comme la somme de deux fonctions concaves, donc *la fonction $L(x)$ possède un maximum unique.* En m'appuyant

[3]) C'est un cas particulier d'un théorème de Kakeya (cf. l'introduction). Malheureusement je n'ai pas pu prendre connaissance de l'article de M. Kakeya.

sur cette propriété je vais établir maintenant qu'il *existe un losange et un seul inscrit dans l'ovale et dont un côté est parallèle à une droite donnée à l'avance* (l'axe Oy).

L'existence d'un tel losange est à peu près évidente: deux cordes parallèles à l'axe Oy et de même longueur déterminent un parallélogramme inscrit dans l'ovale. Si les cordes passent près des points de contact M et M' les côtés parallèles à l'axe Oy sont plus petits que les côtés restants, c'est le contraire qui a lieu lorsque les abscisses des cordes diffèrent peu du maximum de la fonction $L(x)$. L'existence du losange inscrit résulte donc des considérations de la continuité.

Supposons maintenant qu'il existe deux losanges inscrits, dont un côté est parallèle à l'axe Oy; soient $ABCD$ et $A'B'C'D'$ ces losanges (fig. 2). Désignons par E, F, G, H les points d'intersection des deux losanges. On a évidemment $AD = HE = GF = CB$, $HG = EF$ et ensuite

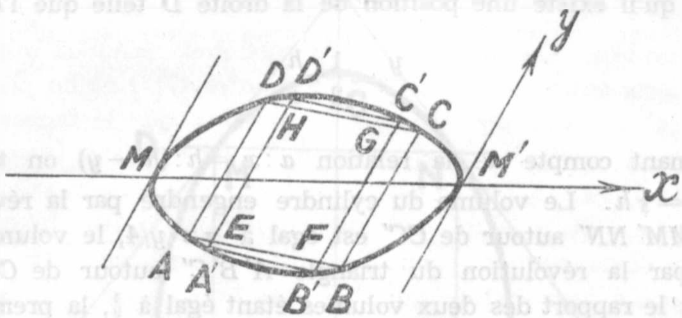

fig. 2

$D'C' < D'H + HG + GC'$ et $A'B' < A'E + EF + FB'$. En ajoutant ces deux inégalités et en tenant compte de ce que $D'C' = D'H + HE + EA'$ et $A'B' = C'G + GF + FB'$, il vient $HE + GF < HG + EF$, c.-à-d. $AD < HG$, inégalité impossible, car $AD = DH + HG + GC$.

Supposons maintenant que la droite arbitraire Δ, choisie comme axe Oy, tourne, il résulte de l'unicité du losange qu'il varie d'une manière continue. Or si $ABCD$ est le losange inscrit dans l'ovale (fig. 2), si l'angle ABC est, par exemple, obtus, et si nous suivons la variation continue du losange lorsque la droite Δ tourne dans le sens positif, par exemple, et devient parallèle à CD, l'angle ABC prend la position BCD, il devient donc aigu. Il existe donc une position intermédiaire de la droite Δ, dans laquelle il est droit et, par suite, le losange est un carré. En tournant la droite Δ dans le sens positif de manière qu'elle devienne de nouveau parallèle au côté DA du losange, on constate qu'il existe un autre carré inscrit dans l'ovale.

§ 3. Considérons maintenant un diamètre AB de l'ovale (fig. 3), c. à d. supposons que AB soit le maximum de la distance entre les points de l'ovale. Ce diamètre détermine sur la frontière de l'ovale l'arc ANB, dont la longueur est L' et l'arc AMB dont la longueur est L''. L désignera la longueur totale de la frontière de l'ovale. D'après la définition du diamètre l'arc ANB est contenu dans l'ovale ABS, où SA et SB désignent des arcs de circonférences, dont les rayons sont égaux au diamètre AB et dont les centres sont situés aux points B et A respectivement. On sait que si un ovale O est contenu dans l'ovale O', la longueur de la frontière de O ne dépasse pas celle de O'; cela résulte p. ex. de la formule de Cauchy qui donne la longueur d'un ovale (la formule (*) du § 4). On a donc

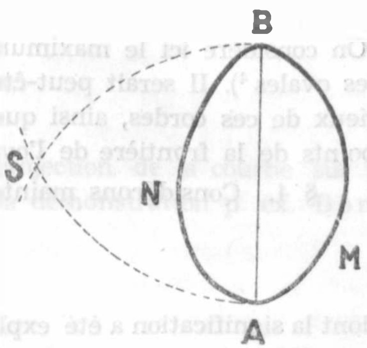

fig. 3

$$AB + L' \leqslant AB + AS + BS,$$

où AS et BS désignent les longueurs des arcs de circonférences AS et BS. Or on a $AS + BS = \pi/3 \cdot AB$, donc $AB \geqslant 3/2\pi L'$ et, a fortiori, $L'' \geqslant 3/2\pi L'$; en ajoutant aux deux membres de l'inégalité $3/2\pi \cdot L''$ on obtient $(2\pi + 3)L'' \geqslant 3L$. Les conditions, dans lesquelles le signe d'égalité peut avoir lieu, résultent de la démonstration. On obtient ainsi la proposition suivante:

Théorème II. *Considérons un arc de la frontière d'un ovale et supposons que la corde de cet arc soit un diamètre de l'ovale. Le rapport de la longueur de cet arc à la longueur totale de la frontière de l'ovale est supérieur ou égal au nombre*

$$\frac{3}{2\pi + 3} \, (> 0{,}32).$$

Le signe d'égalité a lieu lorsque la frontière de l'ovale se réduit à un segment de droite AB et aux arcs de cercles AS et BS, dont les rayons sont égaux à AB et les centres sont situés aux points B et A respectivement.

Il serait intéressant d'étendre cette proposition au cas de l'espace. On pourrait, par exemple, considérer une section plane de l'ovale a) dont l'aire est la plus grande possible, b) dont le diamètre est le plus grand possible, c) section passant par 3 points A, B, C de la frontière de l'ovale, de manière que le produit $AB \cdot BC \cdot CA$ soit le plus grand possible et, dans chacun de ces cas, déterminer le minimum du rapport de l'aire d'une calotte de l'ovale, limitée par le plan en question, à l'aire totale de la frontière de l'ovale.

En revenant au cas du plan, voici des problèmes qui ont quelque connexion avec le théorème II. On considère toutes les cordes de l'ovale qui divisent soit son aire, soit son périmètre en deux parties égales. Soit C la longueur d'une telle corde et D le diamètre de l'ovale. Déterminer, dans chacun de ces cas, le nombre

$$\inf\left(\frac{\max C}{D}\right)$$

(On considère ici le maximum pour un ovale déterminé et inf pour tous les ovales [1]). Il serait peut-être intéressant aussi d'étudier le lieu des milieux de ces cordes, ainsi que le lieu des milieux des cordes joignant les points de la frontière de l'ovale où les tangentes sont parallèles.

§ 4. Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_C r\,ds$$

dont la signification a été expliquée dans l'introduction. Je vais commencer par déterminer une limite inférieure du rapport de cette intégrale au carré du diamètre de l'ovale. Soit AB un diamètre de l'ovale (fig. 4), $AB = D$ et P un point quelconque de l'ovale. On considère les arcs de l'ovale BM et AN de même longueur s; soit C le point où la corde MN coupe le diamètre. On a $CM \geq CB - s$, $CN \geq CA - s$, donc $PM + PN \geq MN \geq D - 2s$. Supposons maintenant que s varie de 0 à $D/2$, en intégrant on déduit de la dernière inégalité que

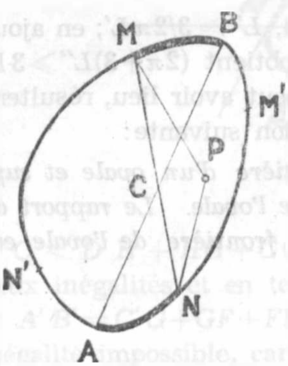

fig. 4

$$\int_C r\,ds \geq \int_0^{D/2} (D - 2s)\,ds = \frac{D^2}{4}.$$

Or les arcs délimités sur la frontière de l'ovale par le diamètre AB ont évidemment des longueurs $\geq D$. On peut donc répéter le raisonnement précédent, en remplaçant les points M et N par des points M' et N' situés de l'autre côté du diamètre AB que les points M et N respectivement. On voit ainsi que

$$\int_C r\,ds \geq \frac{D^2}{2}.$$

[1]) *Remarque pendant la correction des épreuves.* Je viens d'apprendre que C. Radziszewski a déterminé les deux nombres en question.

Le signe d'égalité a lieu lorsque l'ovale se réduit à un segment et le point P au milieu de ce segment. Il résulte d'ailleurs de la démonstration que c'est le seul cas dans lequel le signe d'égalité a lieu.

Je me bornerai à quelques aperçus en ce qui concerne la limite supérieure du rapport de l'intégrale étudiée au carré du diamètre. Tout d'abord il résulte immédiatement de la formule de Cauchy, qui donne la longueur d'une courbe plane:

$$(*) \qquad L = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} P(\varphi)\, d\varphi,$$

où $P(\varphi)$ désigne la longueur totale de la projection de la courbe sur la droite qui fait l'angle φ avec Ox (cf. pour la démonstration p. ex. Bonnesen (1) p. 32), que $L \leq \pi D$, donc que

$$(**) \qquad \int_C r\, ds \leq \pi D^2.$$

Il est d'ailleurs clair que la limite supérieure de $\int_C r ds$ est atteinte lorsque le point P est sur la frontière de l'ovale, car l'intégrale étudiée est une fonction sous-harmonique de P [5]).

Je vais améliorer un peu l'inégalité (**) dans le cas où l'ovale possède un centre de symétrie. Soit AB un diamètre de l'ovale. L'ovale est contenu dans le cercle fermé dont le diamètre est AB et dont le centre S est le centre de symétrie de l'ovale. Soient P un point fixe de la frontière de l'ovale et M, M' deux points de cette frontière symétriques par rapport à S (fig. 5). Un calcul élémentaire montre que, l'ovale étant contenu dans le cercle, la somme $PM + PM'$ ne dépasse pas $D\sqrt{2}$. Il résulte d'autre part de la formule de Cauchy (*) que la longueur de la frontière de l'ovale ne dépasse pas celle du cercle. On a donc

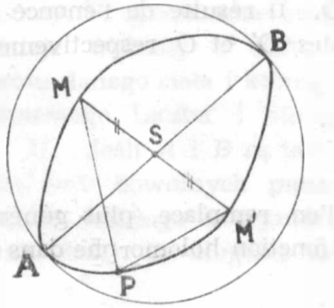

fig. 5

$$\int_C r\, ds \leq D\sqrt{2}\,\frac{\pi D}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} D^2.$$

En résumant les résultats nous pouvons énoncer le théorème suivant.

[5]) La distance entre P et un point fixe est une fonction sousharmonique; l'intégrale est une limite de sommes de telles distances, multipliées par des constantes

Théorème III. *Soit C la frontière d'un ovale, s la longueur de l'arc de cette frontière, P un point quelconque de l'ovale et r sa distance à un point de la frontière C. Si D désigne le diamètre de l'ovale, on a les inégalités*

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{\int\limits_C r\,ds}{D^2} \leqslant \pi.$$

Lorsque l'ovale possède un centre de symétrie, on peut remplacer dans ces inégalités π par $\pi/\sqrt{2}$ ($<2{,}3$). La limite $\frac{1}{2}$ est atteinte lorsque l'ovale se réduit à un segment de droite et P à son milieu. Le nombre π ne saurait être remplacé par un nombre inférieur à 2, car si l'ovale est un cercle et P un point de sa circonférence, le rapport de l'énoncé est égal à 2.

Remarques. Il semblerait intéressant d'étendre le problème de l'énoncé III en introduisant n points fixes $P_1, P_2, \dots, P_n$ de l'ovale et de considérer le rapport

$$\frac{\int\limits_C r_1 r_2 \dots r_n\,ds}{D^{n+1}},$$

où r_i désigne la distance de P_i à un point de la frontière C. Le produit $r_1 r_2 \dots r_n$ représente, dans le plan complexe, le module d'un polynome dont tous les zéros sont contenus dans l'ovale. Considérons maintenant deux ovales O' et O, O' étant contenu dans O. Il résulte de l'énoncé III que, C' et C désignant les frontières des ovales O' et O respectivement et P étant un point de O', on a

$$\int\limits_{C'} r\,ds \leqslant 2\pi \int\limits_C r\,ds.$$

Or R. M. Gabriel a établi [4] que si l'on remplace, plus généralement, r par $|f(z)|^\lambda$, où $\lambda > 0$ et $f(z)$ est une fonction holomorphe dans O, on a

$$\int\limits_{C'} |f(z)|^2\,ds \leqslant |\pi(e+1)+e| \cdot \int\limits_C |f(z)|^2\,ds,$$

et il a remarqué que, probablement, la constante $\pi(e+1)+e$ pourra être remplacée par 2. Cette hypothèse a été établie par Carlson [2] dans le cas où O est un cercle. La limite 2 est atteinte lorsque O' est le segment $-1 \leqslant x \leqslant +1$, O le cercle $|z| < 1$, $\lambda = 1$ et $f(z) = z - 1$. Au sujet de ces questions on peut consulter aussi les articles de Frazer [3] et de Ghica [5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Bonnesen, *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes*. Paris, Gauthier-Villars, 1929.

[2] F. Carlson, *Quelques inégalités concernant les foncions analytiques*. Arkiv Mat. Astr. Fis. 29 B, 1943, Nr 11.

[3] Frazer, *On functions regular in a convex region*. Journ, Lond. Math. Soc. 20, 1945, p. 199-204.

[4] R. M. Gabriel, *Concerning integrals of moduli of regular functions along convex curves*. Proc. Lond. Math. Soc. (II), 39, 1935, p. 216-231.

[5] A. Ghica, Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, 210, (1940).

[6] S. Kakeya, *On the inscribed rectangles of a closed convex curve*. Tôhoku Math. J. 9. 1916, p. 163-6.

[7] G. Pólya et G. Szegö, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*. Annals of Math. Studies No 27. Princeton Univ. Press, 1951.

[8] C. Radziszewski, *Sur un problème extrémal relatif aux figures inscrites et circonscrites aux figures convexes*. Annales U. M. C. S. (A) VI. 1952. p. 5—18.

[9] L. G. Sznirelmann, *О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых*. Uspiehi Matem. Nauk. 10, 1944, p. 34-44.

Streszczenie

W pracy tej dowodzę twierdzeń następujących:

I. Weźmy pod uwagę ciało, utworzone przez obrót owalu, posiadającego dwie osie symetrii do siebie prostopadłe, dokoła jednej z tych osi. Przypuśćmy, że ograniczenie owalu jest klasy C_1 i nie zawiera odcinków prostej. Istnieje wpisany w ciało walec obrotowy, którego oś obrotu jest osią obrotu danego ciała i którego objętość jest niemniejsza od $\frac{4}{9}$ objętości ciała obrotowego. Liczba $\frac{4}{9}$ nie da się zwiększyć.

II. Jeśli A i B są takimi punktami owalu na płaszczyźnie, że odległości dwu dowolnych punktów owalu nie przekracza AB, to stosunek długości każdego z wyznaczonych przez punkty A i B na ograniczeniu owalu łuków do długości całego tego ograniczenia jest conajmniej równy

$$\frac{3}{2\pi + 3}.$$

Liczba ta nie da się zwiększyć.

III. Niech C oznacza krzywą ograniczającą owal na płaszczyźnie, s długość łuku tej krzywej, r odległość punktu krzywej C od ustalonego punktu P owalu i D średnicę owalu. Zachodzą nierówności:

$$\frac{1}{2} < \frac{\int\limits_C r\,ds}{D^2} < \pi.$$

Jeśli owal posiada środek symetrii, to można tu zastąpić liczbę π przez $\pi/\sqrt{2}$. Liczba $\frac{1}{2}$ nie da się zastąpić przez liczbę większą, liczba π, względnie $\pi/\sqrt{2}$, nie da się zastąpić przez liczbę mniejszą od 2.

Ponad to podaję w tej pracy krótki dowód twierdzenia Kakeya: w każdy owal można wpisać co najmniej dwa kwadraty.

Резюме

В этом труде я доказываю следующие теоремы:

I. Рассмотрим овал, имеющий две взаимно перпендикулярные оси симметрии, и образуем тело вращением овала вокруг одной из этих осей.

Предположим, что граница овала принадлежит к классу C_1 и не содержит отрезков прямой. Существует цилиндр вращения с той же самой осью вращения, вписанный в это тело, которого обьём не меньше, чем $\frac{4}{9}$ обьёма этого тела. Число $\frac{4}{9}$ не может быть увеличено.

II. Если A и B такие две точки овала на плоскости, что расстояние двух произвольных точек овала не превышает AB, то отношение длины каждой дуги овала, определённой точками A и B на границе овала, к длине всей этой границы по меньшей мере равно

$$\frac{3}{2\pi+3}.$$

Это число не может быть увеличено.

III. Пусть C обозначает крувую, ограничивающую овал на плоскости, s — длину дуги этой кривой, r — расстояние точки кривой C от фиксированной точки P овала и D — диаметр овала. Тогда имеют место неравенства:

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{\int_C r\,ds}{D^2} \leqslant \pi.$$

Если овал обладает центром симметрии, то число π можно здесь заменить числом $\pi/\sqrt{2}$. Число $\frac{1}{2}$ в этом неравенстве не может быть заменено большим числом; а число π или $\pi/\sqrt{2}$ не удаётся заменить числом меньшим, чем 2.

Сверх того я даю в этом труде короткое доказательство теоремы Какея: во всякий овал можно вписать по меньшей мере два квадрата.