ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. VII, 2 SECTIO A 1953

Z Zakładu Matematyki I Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr M. Biernacki

MIECZYSŁAW BIERNACKI

Sur le nombre minimum des zéros des intégrales de l'équation $y^{(n)} + A(x)\, y = 0$

O minimalnej liczbie zer całek równania $y^{(n)} + A(x)\, y = 0$

О минимальном числе нулей интеграла уравнения $y^{(n)} + A(x)\, y = 0$

§ 1. Je considère l'équation

$$y^{(n)} + A(x)\, y = 0 \tag{1}$$

où $A(x)$ *est une fonction continue et positive pour toute valeur réelle de* x. Au sujet de telles équations je vais établir la proposition suivante:

Théorème. *Lorsque n est pair, il existe toujours une intégrale de* (1) *qui possède n zéros réels au moins; lorsque n est impair, il existe toujours une intégrale qui en possède au moins* $(n-1)$.

Considérons d'abord l'intégrale $y(x)$ qui satisfait aux conditions initiales:

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-3)}(0) = 0, \qquad y^{(n-2)}(0) > 0, \qquad y^{(n-1)}(0) = 0$$

(lorsque $n = 2$ ces conditions sont: $y(0) > 0$, $y'(0) = 0$). Supposons que l'intégrale $y(x)$ ne s'annule pas pour $x > 0$, alors l'on a, pour $x > 0$, $y^{(n)}(x) < 0$, $y^{(n-1)}(x)$ est décroissante, donc négative et $y^{(n-2)}(x)$ est aussi décroissante et, étant concave, tend vers $-\infty$ lorsque $x \to +\infty$. Il s'ensuit que $y^{(n-3)}(x)$ décroît pour $x > x_0$ et, étant concave, tend vers $-\infty$ lorsque $x \to +\infty \cdot y^{(n-4)}(x)$ décroît pour $x > x_1$, et, étant concave pour $x > x_0$, tend vers $-\infty$ aussi. En poursuivant ce raisonnement on aboutit à une contradiction avec l'hypothèse que l'intégrale $y(x)$ ne s'annule pas. Donc $y(x)$ possède un zéro sur l'axe positif. Si n est pair, le changement de variable $x = -t$ ne change pas la forme de l'équation, donc $y(x)$ possède aussi un zéro sur l'axe négatif. Or 0 est une racine d'ordre

$(n-2)$ de l'équation $y(x)=0$, donc le théorème est établi, pourvu que l'on compte les zéros avec leurs degrés de multiplicité.

§ 2. On peut construire une équation ayant n ou $(n-1)$ zéros, mentionnés dans l'énoncé, tous distincts entre eux. Pour cela considérons un système fondamental quelconque $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ d'intégrales de (1) et $(n-2)$ nombres $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-2} \cdot \lambda$ étant un nombre positif, il existe une intégrale $y(\lambda, x)$ qui satisfait aux $(n-1)$ équations:

$$(2) \qquad \begin{aligned} & y(\lambda, \lambda x_i) = C_1 y_1(\lambda x_i) + \dots + C_n y_n(\lambda x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-2) \\ & y^{(n-1)}(\lambda, 0) = C_1 y_1^{(n-1)}(0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(0) = 0 \end{aligned}$$

et aux conditions:

$$y^{(n-2)}(\lambda, 0) \geqslant 0, \quad y^2(\lambda, 0) + y'^2(\lambda, 0) + \dots + y^{(n-1)2}(\lambda, 0) = 1.$$

Considérons une suite de valeurs de λ qui tend vers zéro. On peut en extraire une suite partielle telle que $y(\lambda, 0), y'(\lambda, 0), \dots y^{(n-1)}(\lambda, 0)$ tendent, lorsque $\lambda \to 0$, vers des limites finies et déterminées $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ respectivement, tous les nombres z_i n'étant d'ailleurs pas nuls, car $z_0^2 + \dots + z_{n-1}^2 = 1$. En vertu de théorèmes classiques l'intégrale $z(x)$ de (1), qui satisfait aux conditions initiales $z(0) = z_0, z'(0) = z_1, \dots, z^{(n-1)}(0) = z_{n-1}$, est limite, lorsque $\lambda \to 0$, de l'intégrale $y(\lambda, x)$ dans tout intervalle fini. Or $y(\lambda, x)$ ayant comme zéros $\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n-2}$ il est clair que $z(x)$ aura une racine $(n-2)$-ple à l'origine, on aura donc $z_0 = z_1 = \dots = z_{n-3} = 0$. On aura d'ailleurs $z_{n-1} = 0$ en vertu de la dernière des équations (2) et $z_{n-2} > 0$ en vertu de l'inégalité $y^{(n-2)}(\lambda, 0) \geqslant 0$. L'intégrale $z(x)$ est donc identique avec l'intégrale $y(x)$ considérée au § 1. Par suite, l'intégrale $y(\lambda, x)$ aura, pour λ assez petit, un zéro plus grand que λx_{n-2} et, lorsque n est pair, en outre un zéro plus petit que λx_1. Notre assertion est donc démontrée.

§ 3. Les nombres n et $n-1$ qui figurent dans l'énoncé du théorème du § 1 pourront-ils être remplacés par des nombres plus grands? Il semble que l'étude de l'équation particulière

$$(3) \qquad (1 + x^2)^n y^{(n)} + k y = 0$$

où k est une petite constante positive, peut fournir quelques renseignements sur ce sujet. D'après J. Fayet |1|[1]) l'équation (3) se réduit, par

[1]) Les numéros renvoient à la bibliographie placée à la fin de l'article.

des substitutions $y = (1+x^2)^{\frac{n-1}{2}} z$, $x = \operatorname{tg} t$ à une équation linéaire et homogène à coefficients constants. Dans le cas où $n = 1$ toute intégrale (non identiquement nulle) ne s'annule nulle part.

Dans le cas $n = 2$ l'intégrale générale de (3) est (cf. Kamke [2])

$$y = C\sqrt{1+x^2}\,\sin(\sqrt{1+k}\,\operatorname{arc\,tg} x + \varphi),$$

C et φ sont des constantes arbitraires. Il est clair que si k est assez petit toute intégrale possède au plus deux zéros.

Si $n = 3$ l'équation se réduit à l'équation aux coefficients constants

$$(*) \qquad \frac{d^3 z}{dt^3} + 4\frac{dz}{dt} + kz = 0$$

dont l'intégrale générale sera de la forme

$$z = C_1 e^{-2\alpha t} + C_2 e^{\alpha t}[\sin(\beta t + \varphi)],$$

où C_1, C_2 et φ sont des constantes arbitraires, $\alpha > 0$ et $\alpha \to 0$ lorsque $k \to 0$; d'ailleurs β et α sont liés par la relation obtenue en égalant à zéro la partie imaginaire de l'équation caractéristique de l'équation (*) $3\alpha^2 - \beta^2 + 4 = 0$. On a donc $\beta > 2$ et $\beta \to 2$ lorsque $k \to 0$. On trouve aisément, par des considérations géométriques, que si k est assez petit, toute intégrale z a au plus 3 zéros dans l'intervalle $-\pi/2 < t < \pi/2$, il en est donc de même de l'intégrale $y(x)$ de l'équation (3) sur tout l'axe réel.

Il résulte de ces exemples que les nombres n et $(n-1)$ du théorème ne sauraient être probablement remplacés par des nombres plus grands que n.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Fayet. *Sur la réduction des équations linéaires et homogènes aux équations à coefficients constants.* Bull. Soc. Math. de France 66, 1938, p. 194-209.
2. E. Kamke. *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. I. Teil. Gewöhnliche Differentialgleichungen.* 2. Auflage. Leipzig 1943, p. 492, problème 2.365

Streszczenie

Wykazuję, że jeśli w równaniu różniczkowym $y^{(n)} + A(x)y = 0$, $A(x)$ jest ciągła i dodatnia dla każdego x rzeczywistego, to istnieje zawsze całka, która ma conajmniej n zer rzeczywistych o ile n jest parzyste, conajmniej $(n-1)$ takich zer o ile n jest nieparzyste. Liczby te nie mogą być prawdopodobnie zastąpione przez liczby większe od n.

Резюме

Если в дифференциальном уравнении $y^{(n)} + A(x)y = 0$ функция $A(x)$ непрерывна и положительна для всякого действительного x, то всегда существует интеграл, который имеет по меньшей мере n действительных нулей, по скольку n число четное, и по меньшей мере $n-1$ таких нулей, по скольку n нечетное.

Вероятно, эти числа не могут быть заменены числами большими, чем n.