ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. IV, 9 SECTIO A 1950

Z Seminarium Matematycznego I Wydziału Matem.-Przyrodniczego U. M. C. S.
Kierownik: prof. dr Mieczysław Biernacki.

Zygmunt BUTLEWSKI

Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles

O całkach pewnego układu równań różniczkowych

Introduction. Nous considérons dans cet article un système d'équations différentielles:

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = f(t, x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = g(t, x, y),$$

où $f(t, x, y)$ et $g(t, x, y)$ sont des fonctions *continues* des variables t, x et y pour $t \geqslant t_0 > 0$, $-\infty < x, y < +\infty$.

Nous appelons une intégrale $x(t)$, $y(t)$ du système (1) *oscillante* pour $t \geqslant t_0 > 0$, si les deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ changent leurs signes + et — une infinité de fois dans l'intervalle $(t_0, +\infty)$. Dans le cas contraire l'intégrale $x(t)$, $y(t)$ est dite *non-oscillante.*

Dans le § 1 nous obtenons quelques propriétés de l'intégrale $x(t)$, $y(t)$. Nous trouvons en particulier des conditions *suffisantes* pour que le système (1) n'ait pas des intégrales oscillantes (théorème II) et les conditions *suffisantes* pour que l'intégrale $x(t)$, $y(t)$ soit oscillante (théorème III et IV).

La méthode, que nous appliquons pour démontrer le théorème II est analogue à celle employée par Kneser[1]) avec quelques simplifications dues à L. Cesari[2]).

---

[1]) A. Kneser. Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen. Mathematische Annalen. T. 42, 1893, pp. 409—435.

[2]) Z. Butlewski. Sur les intégrales oscillantes et bornées d'une équation différentielle du second ordre. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa. Serie II-Vol. IX (1940—XVIII) pp. 192—193.

En supposant que l'intégrale $x(t)$, $y(t)$ soit oscillante nous obtenons (§ 2) des conditions *suffisantes* pour que les extréma de la fonction $x(t)$ resp. $y(t)$ forment une suite croissante (décroissante) pour les grandes valeurs de la variable t.

Dans le § 2 j'ai appliqué la méthode, employée par M. Biernacki dans son travail fondamental sur l'équation différentielle du second ordre[3]).

J'exprime mes remerciements à M. M. Biernacki pour ses précieux conseils et sa collaboration pendant la rédaction de ce travail.

§ 1. Considérons un système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y)$$
$$(1) \qquad \frac{dy}{dt} = g(t, x, y),$$

où $f(t, x, y)$ *et* $g(t, x, y)$ *sont des fonctions continues des variables* t, x *et* y *pour* $t \geqslant t_0 > 0$, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$.

Nous supposons dans la suite que par chaque point (t_1, x_1, y_1) il passe une intégrale unique du système (1).

Théorème I.

Supposons que les fonctions $f(t, x, y)$ *et* $g(t, x, y)$ *possèdent pour* $t \geqslant t_0 > 0$ *les propriétés suivantes:*

1) $f(t, x, y) \neq 0$ *pour* $|x| < \infty$, $y \neq 0$
   $f(t, x, 0) = 0$ „ $|x| < \infty$
2) $g(t, x, y) \neq 0$ „ $x \neq 0$, $|y| < \infty$
   $g(t, 0, y) = 0$ „ $|y| < \infty$.

Alors nous avons les propriétés suivantes:

1°). *Si l'une de fonctions* $x(t)$ *et* $y(t)$ *est identiquement égale à zéro dans un sous-intervalle de l'intervalle* $\langle t_0, +\infty)$, *alors la solution* $x(t), y(t)$ *du système* (1) *est identiquement nulle dans cet sous-intervalle, c. à d. on obtient à la fois* $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$.

2°). *Si l'une de fonctions* $x(t)$ *et* $y(t)$ *est non-oscillante, alors la solution* $x(t)$, $y(t)$ *du système* (1) *est non-oscillante, c. à d. chacune des fonctions* $x(t)$ *et* $y(t)$ *est non-oscillante.*

---

[3]) M. Biernacki. Sur l'équation différentielle $x'' + A(t)x = 0$. Prace Matematyczno-Fizyczne. T. XL, Warszawa, 1933, p. 165.

3°). *Si l'une de fonctions $x(t)$ et $y(t)$ est oscillante, alors la solution $x(t)$, $y(t)$ du système* (1) *est oscillante, c. à d. chacune des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ est oscillante; de plus les zéros des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ se séparent mutuellement.*

4°). *Si la solution $x(t)$, $y(t)$ est oscillante, alors les zéros des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont simples, c. à d. si $x(T)=0$ alors $x'(T)\neq 0$, si $y(T_1)=0$ alors $y'(T_1)\neq 0$.*

5°). *Si la fonction $x(t)$ (ou $y(t)$) est oscillante pour $t \geqslant t_0 > 0$, alors $x(t)$ (ou $y(t)$) possède un nombre fini de zéros dans l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$, où $t_0 \leqslant \alpha < \beta < +\infty$.*

Démonstration.

Ad 1°). Supposons que $x(t) \equiv 0$ et $y(t) \equiv 0$ dans l'intervalle $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, où $t_0 \leqslant \alpha < \beta < +\infty$. Alors d'après la première équation du système (1) on a $x' \equiv 0$ dans l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$ et par conséquent $x \equiv c$ (c étant une constante) dans l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$. D'après la seconde équation du système (1) nous avons donc:

$$0 \equiv g(t, c, 0) \quad \text{dans l'intervalle } \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Or cette équation n'a pas lieu, si $c \neq 0$ et $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, on a donc $c = 0$ pour $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Par suite la solution $x(t)$, $y(t)$ du système (1) est identiquement nulle.

Supposons maintenant que $x(t) \equiv 0$, $y(t) \not\equiv 0$ dans l'intervalle $\alpha' \leqslant t \leqslant \beta'$, où $t_0 \leqslant \alpha' < \beta' < +\infty$.

D'après la seconde équation du système (1) on obtient donc $y'(t) \equiv 0$ et par suite $y(t) \equiv c'$ dans l'intervalle $\langle \alpha', \beta' \rangle$, ($c'$ est une constante). Supposons que $c' \neq 0$. D'après la première équation du système (1) on a donc:

$$0 \equiv f(t, 0, c') \quad \text{dans l'intervalle } \langle \alpha', \beta' \rangle,$$

ce qui est impossible, parce que $f(t, 0, c') \neq 0$ pour $c' \neq 0$. Donc nous avons $y(t) \equiv 0$ dans l'intervalle $\langle \alpha', \beta' \rangle$.

Ad 2°). Supposons que la fonction $x(t)$ est non-oscillante pour les grandes valeurs de la variable t, c. à d. on a $x(t) \neq 0$ pour les grandes valeurs de la variable t.

Alors on a:

$$y'(t) = g[t, x(t), y(t)] \neq 0$$

et par suite la fonction $y(t)$ est monotone (croissante ou décroissante), c. à d. non-oscillante pour les grandes valeurs de la variable t.

Supposons maintenant que $y(t)$ est une fonction non-oscillante pour les grandes variables de la variable t. On a donc $y(t) \neq 0$ pour les grandes valeurs de la variable t.

Nous obtenons dans ce cas:

$$x'(t) = f[t, x(t), y(t)] \neq 0,$$

donc $x(t)$ est une fonction monotone (croissante ou décroissante) et par suite $x(t)$ est une fonction non-oscillante pour les grandes valeurs de la variable t.

Ad 3°). Supposons par exemple que $x(t)$ est une fonction oscillante et que t_1, t_2 $(t_0 < t_1 < t_2)$ sont deux zéros consécutifs de cette fonction. Alors on a $x(t_1) = x(t_2) = 0$.

D'après le théorème de Rolle l'intervalle (t_1, t_2) contient au moins un point $t = \tau$ $(t_1 < \tau < t_2)$ tel, que $x'(\tau) = 0$. D'autre part on a:

$$x'(\tau) = f[\tau, x(\tau), y(\tau)] = 0$$

et par suite

$$y(\tau) = 0.$$

Donc la fonction $y(t)$ est oscillante.

Nous démontrerons que dans l'intervalle (t_1, t_2) il existe au plus un zéro de la fonction $y(t)$. En effet, si l'intervalle (t_1, t_2) contenait deux zéros τ_1, τ_2 $(t_1 < \tau_1 < \tau_2 < t_2)$ de la fonction $y(t)$, on aurait

$$y(\tau_1) = 0 \text{ et } y(\tau_2) = 0.$$

D'après le théorème de Rolle on aurait en un point T

$$y'(T) = 0 \qquad (t_1 < T < t_2).$$

D'après (1) nous aurions donc la relation

$$g[T, x(T), y(T)] = 0,$$

qui n'est satisfaite que si $x(T) = 0$, or ceci est impossible, car les zéros t_1 et t_2 sont consécutifs.

La démonstration pour $y(t)$ est analogue.

En résumé nous obtenons: Entre deux zéros consécutifs de $x(t)$, il y a un zéro et un seul de $y(t)$, et réciproquement, c. à d. les zéros des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ se séparent mutuellement.

Ad 4°). Désignons par $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ les zéros plus grands que t_0 de la fonction $x(t)$ et par $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ les zéros plus grands que t_0 de la fonction $y(t)$.

Alors on a: $x(t_n) = 0$ et d'après (1)

$$y'(t_n) = g[t_n, x(t_n), y(t_n)] = 0.$$

Si $t = t_n$ était un zéro double de la fonction $x(t)$, on aurait $x'(t_n) = 0$ et par suite d'après (1)

$$x'(t_n) = f[t_n, x(t_n), y(t_n)] = 0$$

et donc, d'après l'hypothése du théorème I, $y(t_n) = 0$.

Alors en un point $t = t_n$ nous aurions

$$x(t_n) = 0,\ x'(t_n) = 0,\ y(t_n) = 0,\ y'(t_n) = 0,$$

ce qui est impossible, si la condition de l'unicité des intégrales est remplie. Si l'on avait $y(\tau_n) = 0$ et $y'(\tau_n) = 0$ on aurait d'après (1)

$$y'(\tau_n) = g[\tau_n, x(\tau_n), y(\tau_n)] = 0,$$

donc $x(\tau_n) = 0$. Alors nous aurions

$$x(\tau_n) = 0,\ y(\tau_n) = 0,$$

ce qui est impossible, si la condition de l'unicité des intégrales est remplie.

Ad 5°). Supposons que, par exemple, la fonction $x(t)$ soit oscillante pour $t \geqslant t_0 > 0$. Nous démontrerons que cette fonction ne peut avoir une infinité de zéros dans l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$, où $t_0 \leqslant \alpha < \beta < +\infty$.

Si $x(t)$ avait une infinité de zéros $s_1, s_2, \dots, s_\nu, \dots$ dans l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$, ces zéros auraient dans $\langle \alpha, \beta \rangle$ au moins un point limite s. Alors nous pouvons admettre

$$\lim_{\nu \to +\infty} s_\nu = s.$$

D'après la continuité de la fonction $x(t)$ on a

$$x(s) = 0$$

et simultanément

$$\frac{x(s_\nu) - x(s)}{s_\nu - s} = 0 \qquad \text{pour } \nu = 1, 2, \dots$$

et d'après la dérivabilité de la fonction $x(t)$ on aurait

$$x'(s) = 0.$$

Donc d'après (1) on obtient

$$x'(s) = f[s, x(s), y(s)] = 0$$

et par suite

$$y(s) = 0.$$

Alors pour $t = s$ nous obtenons

$$x(s) = 0,\ y(s) = 0,\ x'(s) = 0,\ y'(s) = 0$$

ceci est impossible, si la condition de l'unicité est remplie. D'après le théorème I, 3°) on obtient que la fonction $y(t)$ a aussi un nombre fini de zéros dans l'intervalle $\langle\alpha, \beta\rangle$. Le théorème I est donc démontré.

Théorème II.

Supposons que les conditions suivantes sont remplies:

$$\begin{array}{llll} f(t,x,y)>0 & \text{pour } t\geqslant t_0>0, & |x|<+\infty, & 0<y<+\infty \\ f(t,x,y)<0 & \quad\text{„} \quad t\geqslant t_0>0, & |x|<+\infty, & -\infty<y<0 \\ g(t,x,y)>0 & \quad\text{„} \quad t\geqslant t_0>0, & 0<x<+\infty, & |y|<+\infty \\ g(t,x,y)<0 & \quad\text{„} \quad t\geqslant t_0>0, & -\infty<x<0, & |y|<+\infty. \end{array}$$

Alors le système des équations (1) *n'a pas des intégrales oscillantes pour les grandes valeurs de la variable t.*

Démonstration.

1°). Supposons que pour $t=\tau\,(\tau\geqslant t_0)$ on a

$$x(\tau)>0,\ y(\tau)\geqslant 0,$$

donc nous avons

$$x'(\tau)=f[\tau, x(\tau), y(\tau)]\geqslant 0,$$

alors $x(t)>0$ pour $t>\tau$ et suffisamment voisin de τ.

D'après des hypothèses du théorème II on obtient

$$y'(t)=g[t, x(t), y(t)]>0$$

pour $t>\tau$ et suffisamment voisines de τ. Donc nous obtenons que $y(t)>0$ pour $t>\tau$ et suffisamment voisin de τ.

Nous démontrerons que $y(t)>0$ pour $\tau<t<+\infty$. Si au contraire il y avait un premier point $t=T$ $(\tau<T<+\infty)$ où $y(T)=0$, on aurait $y(t)>0$ dans l'intervalle $\tau<t<T$. D'après les hypothèses du théorème II on aurait $x'(t)>0$ dans l'intervalle $\tau<t<T$. D'autre part on a:

$$x'(T)=f[T, x(T), y(T)]=0.$$

On a $x(t)>0$ dans l'intervalle $\tau\leqslant t\leqslant T$ et par suite

$$y'(t)=g[t, x(t), y(t)]>0$$

dans l'intervalle $\tau\leqslant t\leqslant T$ et finalement $y(T)>0$, ce qui est en contradiction avec la définition du nombre T. Ainsi la fonction $y(t)$ est non-oscillante pour les grandes valeurs de la variable t. Il résulte du théorème I, 2°) que l'intégrale $x(t), y(t)$ est non-oscillante pour les grandes valeurs de la variable t.

Pour les valeurs initiales $x(\tau) \geqslant 0$, $y(\tau) > 0$ la démonstration est analogue.

2°) Supposons maitenant que

$$x(\tau) < 0,\ y(\tau) \leqslant 0 \text{ ou } x(\tau) \leqslant 0,\ y(\tau) < 0 \qquad (\tau \geqslant t_0).$$

En remplaçant dans le système (1) x par $-x$, y par $-y$ et x' par $-x'$, y' par $-y'$, on peut ramener les cas considérés au cas 1°.

3°) Supposons que

$$x(\tau) > 0,\ y(\tau) < 0 \qquad (\tau \geqslant t_0).$$

Supposons que les fonctions $x(t)$ où $y(t)$ peuvent s'annuler pour $t > \tau$. Soit $\tau_0 (\tau_0 > \tau)$ le premier point où s'annule l'une des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.

Considérons deux cas: α) $x(\tau_0) = 0$, β) $y(\tau_0) = 0$.

α) Soit $x(\tau_0) = 0$, donc $x(t) > 0$ dans l'intervalle $\tau \leqslant t < \tau_0$ et $y(t) < 0$ dans l'intervalle $\tau \leqslant t \leqslant \tau_0$. Nous obtenons donc les valeurs initiales:

$$x(\tau_0) = 0,\ y(\tau_0) < 0.$$

Or ce cas a été considéré sous 2°.

β) Supposons maintenant que $y(\tau_0) = 0$. Donc $y(t) < 0$ dans l'intervalle $\tau \leqslant t < \tau_0$ et $x(t) > 0$ dans l'intervalle $\tau \leqslant t \leqslant \tau_0$. Alors pour $t = \tau_0$ on a

$$x(\tau_0) > 0,\ y(\tau_0) = 0,$$

c'est encore le cas nous avons considéré sous 1°.

4°) Le cas $x(\tau) < 0$, $y(\tau) > 0$, $(\tau \geqslant t_0)$ se ramène au cas 3° en changeant des signes comme dans le cas 2°.

Le théorème II est démontré.

Théorème III.

Supposons que les fonctions $f(t,x,y)$ et $g(t,x,y)$ possèdent les propriétés suivantes:

$$\alpha) \quad \begin{cases} f(t,x,y) > 0 & \text{pour } t \geqslant t_0 > 0,\ |x| < +\infty, \quad 0 < y < +\infty \\ f(t,x,y) < 0 & \text{,,} \qquad \text{,,} \qquad ,\ |x| < +\infty, \quad -\infty < y < 0 \end{cases}$$

$$\beta) \quad \begin{cases} g(t,x,y) > 0 & \text{,,} \qquad \text{,,} \qquad ,\ -\infty < x < 0,\ |y| < +\infty \\ g(t,x,y) < 0 & \text{,,} \qquad \text{,,} \qquad ,\ 0 < x < +\infty,\ |y| < +\infty \end{cases}$$

γ) $x(t)$, $y(t)$ étant une intégrale du système des équations (1) satisfaisante aux conditions:

$$x(\tau) = \xi,\ y(\tau) = \eta \quad (\tau \geqslant t_0,\ |\xi| + |\eta| < \infty).$$

Il existe une fonction $\Phi(\xi,\eta)$ des deux variables ξ,η, qui possède les propriétés suivantes:

1) *si* $\xi>0,\ \eta>0$

$$\Phi(\xi,\eta)\equiv\eta+\int_{\tau}^{+\infty}\max_{\substack{0<\xi\leqslant x\\ 0<y\leqslant\eta}} g(t,x,y)\,dt<0\,;$$

2) *si* $\xi>0,\ \eta<0$

$$\Phi(\xi,\eta)\equiv\xi+\int_{\tau}^{+\infty}\max_{\substack{0<x\leqslant\xi\\ y\leqslant\eta<0}} f(t,x,y)\,dt<0\,;$$

3) *si* $\xi<0,\ \eta>0$

$$\Phi(\xi,\eta)\equiv\xi+\int_{\tau}^{+\infty}\min_{\substack{\xi\leqslant x<0\\ y\geqslant\eta>0}} f(t,x,y)\,dt>0\,;$$

4) *si* $\xi<0,\ \eta<0$

$$\Phi(\xi,\eta)\equiv\eta+\int_{\tau}^{+\infty}\min_{\substack{x\leqslant\xi<0\\ \eta\leqslant y<0}} g(t,x,y)\,dt>0\,.$$

Alors l'intégrale $x(t)$, $y(t)$ du système des équations (1) *est oscillante pour les grandes valeurs de la variable t.*

Remarque.

a) On peut remplacer les conditions (γ) en particulier par les suivantes:

1) si $\xi>0$, $\eta>0$ on a $\frac{\partial g}{\partial x}\leqslant0$, $\frac{\partial g}{\partial y}\geqslant0$ pour $t\geqslant\tau$, $0<\xi\leqslant x$, $0<y\leqslant\eta$ et

$$\int_{\tau}^{\infty} g(t,\xi,\eta)\,dt=-\infty\,;$$

2) si $\xi>0$, $\eta<0$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}\geqslant0$, $\frac{\partial f}{\partial y}\geqslant0$ pour $t\geqslant\tau$, $0<x\leqslant\xi$, $y\leqslant\eta<0$ et

$$\int_{\tau}^{\infty} f(t,\xi,\eta)\,dt=-\infty\,;$$

3) si $\xi<0$, $\eta>0$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}\geqslant0$, $\frac{\partial f}{\partial y}\geqslant0$ pour $t\geqslant\tau$, $\xi\leqslant x<0$, $y\geqslant\eta>0$ et

$$\int_{\tau}^{\infty} f(t,\xi,\eta)\,dt=+\infty\,;$$

4) si $\xi < 0$, $\eta < 0$ on a $\frac{\partial g}{\partial x} \leqslant 0$, $\frac{\partial g}{\partial y} \geqslant 0$ pour $t \geqslant \tau$, $x \leqslant \xi < 0$, $\eta \leqslant y < 0$ et

$$\int_{\tau}^{\infty} g(t, \xi, \eta)\, dt = +\infty.$$

b) On peut en particulier remplacer les conditions (γ) aussi par los suivantes:

1) $\frac{\partial f}{\partial x} \leqslant 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} \geqslant 0$ pour $t \geqslant t_0 > 0$, $x > 0$, $y < 0$ et $x < 0$, $y > 0$;

2) $$\int^{+\infty} f(t, 0, c)\, dt = \begin{cases} +\infty & \text{si } c > 0 \\ -\infty & \text{„ } c < 0 \end{cases} \quad (c = \text{Const.});$$

3) $\frac{\partial g}{\partial x} \leqslant 0$, $\frac{\partial g}{\partial y} \leqslant 0$ pour $t \geqslant t_0 > 0$, $x > 0$, $y > 0$ et $x < 0$, $y < 0$;

4) $$\int^{+\infty} g(t, c_1, 0)\, dt = \begin{cases} +\infty & \text{si } c_1 < 0 \\ -\infty & \text{„ } c_1 > 0 \end{cases} \quad (c_1 = \text{Const.})\text{[4]}.$$

Démonstration.

Les fonctions $f(t, x, y)$ et $g(t, x, y)$ remplissent les hypothèses du théorème I. Donc les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont simultanément oscillantes ou non-oscillantes. Supposons que les hypothèses du théorème III soient remplies et que l'intégrale $x(t)$, $y(t)$ du système des équations différentielles

(1) $$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y) \qquad \frac{dy}{dt} = g(t, x, y)$$

soit non-oscillante c. à d. chacune des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ soit non-oscillante pour les grandes valeurs de la variable t.

Alors les quatre cas sont possibles:

I. $x(t) > 0$, $y(t) > 0$
II. $x(t) > 0$, $y(t) < 0$
III. $x(t) < 0$, $y(t) > 0$
IV. $x(t) < 0$, $y(t) < 0$.

[4]) Comp.: J. G.-Mikusiński. On Fite's oscillation theorems. Colloquium Mathematicum, Vol. II, pp. 33—39. Wrocław 1949.

Nous démontrérons que toutes ces cas sont impossibles si les hypothèses du théorème III sont remplies.

I. Supposons que il existe un point $t=\tau_1$ $(\tau_1 \geqslant t_0)$ tel que pour $t \geqslant \tau_1$ on a: $x(\tau_1)=\xi_1>0$, $y(\tau_1)=\eta_1>0$ et supposons que $y(t)>0$ pour $t>\tau_1$.

D'après (α) on obtient $f>0$ pour $t \geqslant \tau_1$. Alors de la première des équations (1) on déduit que $x'(t)>0$ pour $t \geqslant \tau_1$. Donc nous obtenons:

$$x(t) \geqslant \xi_1 > 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant \tau_1 .$$

D'après (β) nous obtenons:

$$y'(t)=g\,[t, x(t), y(t)]<0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant \tau_1 .$$

Alors:

$$0<y(t) \leqslant \eta_1 \quad \text{pour} \quad t \geqslant \tau_1 .$$

En intégrant la seconde équation du système (1) entre τ_1 et t on obtient

$$y(t)-\eta_1=\int_{\tau_1}^{t} g\,[t, x(t), y(t)]\,dt<0$$

$$\text{pour} \quad t>\tau_1,\ 0<\xi_1 \leqslant x,\ 0<y \leqslant \eta_1$$

et par suite:

$$y(t) \leqslant \eta_1+\int_{\tau_1}^{t} \max_{\substack{0<\xi_1 \leqslant x \\ 0<y \leqslant \eta_1}} g(t, x, y)\,dt$$

En tenant compte de l'hypothèse (γ, 1) on obtient:

$$\eta_1+\int_{\tau_1}^{t} \max_{\substack{0<\xi_1 \leqslant x \\ 0<y \leqslant \eta_1}} g(t, x, y)\,dt<0$$

pour t suffisement grand. On aurait donc $y(t)<0$ pour les grandes valeurs de la variable t. Nous aboutissons à une contradiction.

II. Supposons maintenant que pour $t=\tau_2$ $(\tau_2 \geqslant t_0)$ on a

$$x(\tau_2)=\xi_2>0,\ y(\tau_2)=\eta_2<0$$

et

$$x(t)>0,\ y(t)<0 \quad \text{pour} \quad t>\tau_2 .$$

D'après la seconde équation du système (1) et l'hypothèse (β) nous avons:

$$y'(t)=g\,[t, x(t), y(t)]<0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant \tau_2 .$$

Donc

$$y(t) \leqslant \eta_2 < 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant \tau_2 .$$

D'après la première équation (1) et l'hypothèse (α) on a

$$x'(t) < 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant \tau_2$$

et donc:

$$0 < x(t) \leqslant \xi_2 \quad \text{pour} \quad t \geqslant \tau_2 .$$

En intégrant la première équation du système (1) entre τ_2 et t nous obtenons

$$x(t) - \xi_2 = \int_{\tau_2}^{t} f[t, x(t), y(t)]\, dt < 0$$

$$\text{pour } t > \tau_2,\ 0 < x(t) < \xi_2,\ y(t) \leqslant \eta_2 < 0$$

et par suite

$$x(t) \leqslant \xi_2 + \int_{\tau_2}^{t} \max_{\substack{0 < x \leqslant \xi_2 \\ y \leqslant \eta_2 < 0}} f(t, x, y)\, dt$$

D'après l'hypothèse (γ, 2) on a:

$$\xi_2 + \int_{\tau_2}^{t} \max_{\substack{0 < x \leqslant \xi_2 \\ y \leqslant \eta_2 < 0}} f(t, x, y)\, dt < 0$$

pour les grandes valeurs de la variable t. On aurait donc $x(t) < 0$ pour les grandes valeurs de la variable t. Nous obtenons une contradiction.

III. Supposons que pour $t = \tau_3$ ($\tau_3 \geqslant t_0$) on a

$$x(\tau_3) = \xi_3 < 0,\ y(\tau_3) = \eta_3 > 0$$

et

$$x(t) < 0,\ y(t) > 0 \text{ pour } t > \tau_3 .$$

D'après l'hypothèse (α) on a donc

$$x'(t) = f[t, x(t), y(t)] > 0 \text{ pour } t \geqslant \tau_3$$

et par suite:

$$\xi_3 \leqslant x(t) < 0 \text{ pour } t \geqslant \tau_3 .$$

D'après l'hypothèse (β) nous avons

$$y'(t) = g[t, x(t), y(t)] > 0 \text{ pour } t \geqslant \tau_3$$

et par suite

$$y(t) \geqslant \eta_3 > 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant \tau_3 .$$

En intégrant la première équation du système (1) entre τ_3 et t nous obtenons

$$x(t) - \xi_3 = \int_{\tau_3}^{t} f[t, x(t), y(t)]\, dt > 0$$

pour $t > \tau_3$, $\xi_3 \leqslant x(t) < 0$, $y(t) \geqslant \eta_3 > 0$.
D'après l'hypothèse $(\gamma, 3)$ on a:

$$x(t) \geqslant \xi_3 + \int_{\tau_3}^{t} \min_{\substack{\xi_3 \leqslant x < 0 \\ y \geqslant \eta_3 > 0}} f(t, x, y)\, dt > 0$$

pour les grandes valeurs de la variable t, ce qui est en contradiction avec l'inégalité $x(t) < 0$.

IV. Supposons maintenant que pour $t = \tau_4$ $(\tau_4 \geqslant t_0)$ on a

$$x(\tau_4) = \xi_4 < 0, \quad y(\tau_4) = \eta_4 < 0$$

et

$$x(t) < 0, \quad y(t) < 0 \text{ pour } t > \tau_4$$

D'après l'hypothèse (β) nous obtenons donc:

$$y'(t) = g[t, x(t), y(t)] > 0 \text{ pour } t \geqslant \tau_4,$$

et par suite

$$\eta_4 \leqslant y(t) < 0 \text{ pour } t \geqslant \tau_4.$$

Alors:

$$x'(t) = f[t, x(t), y(t)] < 0 \text{ pour } t \geqslant \tau_4.$$

En intégrant la seconde équation du système (1) nous obtenons:

$$y(t) - \eta_4 = \int_{\tau_4}^{t} g[t, x(t), y(t)]\, dt > 0 \text{ pour } t > \tau_4.$$

D'après l'hypothèse $(\gamma, 4)$ on a

$$y(t) \geqslant \eta_4 + \int_{\tau_4}^{t} \min_{\substack{x \leqslant \xi_4 < 0 \\ \eta_4 \leqslant y < 0}} g[t, x(t), y(t)]\, dt > 0$$

pour les valeurs suffisamment grandes de la variable t. Ainsi nous aboutissons à une contradiction.

Le théorème III est démontré.

Considérons maintenant le système des équations différentielles

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y) \end{aligned}$$

où $f(t, x, y)$ et $g(t, x, y)$ sont des fonctions continues ainsi que leurs dérivées partielles du 1^e ordre dans le domaine (D):

$$(D)\qquad t \geqslant t_0 > 0,\ -\infty < x < +\infty,\ -\infty < y < +\infty.$$

On sait[5]) que les fonctions f et g remplissent la condition de Lipschitz par rapport à x et y dans (D).

Théorème IV.

Supposons que pour $t \geqslant t_0 > 0$ les conditions suivantes sont remplies[6]):

$$\begin{array}{lll}
1) & f(t, x, y) \left\{ \begin{array}{lll} > 0 & \text{pour} & |x| < +\infty,\ y > 0 \\ < 0 & ,, & |x| < +\infty,\ y < 0 \end{array} \right. \\
2) & g(t, x, y) \left\{ \begin{array}{lll} > 0 & ,, & x < 0,\ |y| < +\infty \\ < 0 & ,, & x > 0,\ |y| < +\infty \end{array} \right. \\
3) & f_t + f_x f + f_y g \left\{ \begin{array}{lll} \geqslant 0 & ,, & x < 0,\ \ y > 0 \\ \leqslant 0 & ,, & x > 0,\ \ y < 0 \end{array} \right. \\
4) & g_t + g_x f + g_y g \left\{ \begin{array}{lll} \geqslant 0 & ,, & x < 0,\ \ y < 0 \\ \leqslant 0 & ,, & x > 0,\ \ y > 0 \end{array} \right. .
\end{array}$$

5) *les conditions initiales suivantes:*

$$x(t_0) = x_0 \neq 0,\ y(t_0) = y_0 = 0$$

ou bien

$$x(t_0) = x_0 = 0,\ y(t_0) = y_0 \neq 0.$$

Alors l'intégrale $x(t)$, $y(t)$ du système (1) est oscillante pour $t > t_0$[7]).

Démonstration.

1) Supposons que $x_0 > 0$, $y_0 = 0$, donc $x(t) > 0$ pour $t > t_0$ et suffisamment voisin de t_0 et par suite

---

[5]) Cf. par exemple E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, p. 124, Leipzig (1930).

[6]) Nous désignons $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$ par φ_u.

[7]) Cf. E. Milne. A thecrem of Oscillation. Bull. Am. Math. Soc. 28 (1922), pp. 102—104.

$$y'(t) = g[t, x(t), y(t)] < 0$$

pour ces valeurs de t.

Alors $y(t) < 0$ pour les valeurs de $t\,(t > t_0)$ tant que $x(t)$ reste positive.

Nous obtenons:

$$x'(t) = f[t, x(t), y(t)] < 0$$

pour $t > t_0$ et suffisamment voisin de t_0.

Donc la fonction $x(t)$ est positive et décroissante pour $t > t_0$ et suffisamment voisin de t_0.

En dérivant la première équation du système (1) nous obtenons:

$$x''(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f + \frac{\partial f}{\partial y} g \leqslant 0$$

pour $t > t_0$ et suffisamment voisin de t_0, parce que pour ces valeurs de t on a: $x(t) > 0$, $y(t) < 0$.

Pour les valeurs de t plus grandes que t_0 et suffisamment voisines de t_0 nous obtenons les inégalités:

$$x(t) > 0, \; x'(t) < 0, \; x''(t) \leqslant 0.$$

Il existe donc dans l'intervalle $(t_0, +\infty)$ un premier point $\tau_1\,(\tau_2 > t_0)$ où $x(\tau_1) = 0$.

2) Dans l'intervalle $t_0 < t < \tau_1$ on a donc: $y(t) < 0$, $y'(t) < 0$. Pour $t = \tau_1$ on obtient:

$$y'(\tau_1) = g[\tau_1, 0, y(\tau_1)] = 0.$$

Posons: $y(\tau_1) = y_1 < 0$. Pour $t > \tau_1$ et suffisamment voisin de τ_1 on a $y(t) < 0$ et donc:

$$x'(t) = f[t, x(t), y(t)] < 0.$$

Alors pour $t > \tau_1$ et suffisamment voisin de τ_1 on a $x(t) < 0$. Pour $x(t) < 0$ nous avons:

$$y'(t) = g[t, x(t), y(t)] > 0.$$

En dérivant la seconde équation du système (1) nous obtenons:

$$y''(t) = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} f + \frac{\partial g}{\partial y} g \geqslant 0$$

pour $t > t_0$ et suffisamment voisin de t_0, parce que pour ces valeurs de t on a: $x(t) < 0$, $y(t) < 0$.

Finalement nous obtenons les inégalités:

$$y(t) < 0, \; y'(t) > 0, \; y''(t) \geqslant 0$$

pour $t > \tau_1$ et suffisamment voisin de τ_1.

Il existe donc un premier point $t = t_1 < +\infty$ dans l'intervalle $\tau_1 < t < +\infty$ où $y(t_1) = 0$.

3) Pour $t = t_1$ on a:

$$x'(t_1) = f[t_1, x(t_1), 0] = 0$$

et

$$x(t_1) = x_1 < 0.$$

Nous avons $x(t) < 0$ pour $t > t_1$ et suffisamment voisin de t_1 et par suite

$$y'(t) = g[t, x(t), y(t)] > 0$$

pour les mêmes valeurs de t. Alors $y(t) > 0$ pour $t > t_1$ et suffisamment voisin de t_1. Par suite on a

$$x'(t) = f[t, x(t), y(t)] > 0$$

pour $t > t_1$ et suffisamment voisin de t_1.

Nous avons:

$$x''(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f + \frac{\partial f}{\partial y} g \geqslant 0$$

pour $t > t_1$ et suffisamment voisin de t_1, parce que pour ces valeurs de t on a: $x(t) < 0$, $y(t) > 0$.

Pour les valeurs de t plus grandes que t_1 et suffisamment voisines de t_1 nous obtenons les inégalités:

$$x(t) < 0, \; x'(t) > 0, \; x''(t) \geqslant 0.$$

Il existe donc un premier point $t = \tau_2 < +\infty$ dans l'intervalle $(t_1, +\infty)$ où $x(\tau_2) = 0$.

4) Dans l'intervalle $t_1 < t < \tau_2$ on a $x(t) < 0$, et par suite

$$y'(t) = g[t, x(t), y(t)] > 0$$

dans cet intervalle.

Pour $t = \tau_2$ nous avons:

$$y'(\tau_2) = g[\tau_2, 0, y(\tau_2)] = 0$$

et

$$y(\tau_2) = y_2 > 0.$$

Pour $t > \tau_2$ et suffisamment voisin de τ_2 on a $y(t) > 0$, et par suite

$$x'(t) = f[t, x(t), y(t)] > 0$$

pour les mêmes valeurs de t. Donc $x(t) > 0$ pour $t > \tau_2$ et suffisamment voisin de τ_2, et par suite

$$y'(t) = g[t, x(t), y(t)] < 0$$

pour ces valeurs de t.

D'autre part nous obtenons

$$y''(t) = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} f + \frac{\partial g}{\partial y} g \leqslant 0$$

pour $t > \tau_2$ et suffisamment voisin de τ_2, parce que pour ces valeurs de t on a: $x(t) > 0$, $y(t) > 0$.

Alors pour les valeurs de $t > \tau_2$ et suffisamment voisines de τ_2 nous obtenons les inégalités:

$$y(t) > 0, \; y'(t) < 0, \; y''(t) \leqslant 0\,.$$

Il existe donc un premier point $t = t_2 < +\infty$ dans l'intervalle $(\tau_2, +\infty)$ où $y(t_2) = 0$.

5) Dans l'intervalle $\tau_2 \leqslant t < t_2$ on a $y(t) > 0$ et par suite

$$x'(t) = f[t, x(t), y(t)] > 0$$

dans l'intervalle $\tau_2 \leqslant t < t_2$. Pour $t = t_2$ on a

$$x'(t_2) = f[t_2, x(t_2), 0] = 0$$

et

$$x(t_2) = x_2 > 0\,.$$

Nous avons obtenu les conditions initiales:

$$x(t_2) > 0, \; y(t_2) = 0,$$

qui sont du même type que les conditions initiales pour $t = t_0$. Nous pouvons donc continuer en appliquant la raisonnement analogue à celui qui précède.

Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ changent le signe une infinité de fois pour $t \geqslant t_0$. L'intégrale $x(t)$, $y(t)$ du système (1) est donc oscillante pour $t \geqslant t_0$.

Lorsque $x_0 < 0$, $y_0 = 0$, il suffit de commencer la raisonnement comme dans „3)" pour $t = t_1$.

Dans le cas des conditions initiales:

$$x_0 = 0,\ y_0 > 0 \text{ ou } x_0 = 0,\ y_0 < 0$$

il suffit de commencer la démonstration comme dans „4)" et „2)" pour les valeurs $t = \tau_2$ et $t = \tau_1$ respectivement. Le théorème IV est donc démontré.

§ 2. Considérons un système d'équations différentielles

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y) \end{aligned}$$

où $f(t, x, y)$ *et* $g(t, x, y)$ *sont des fonctions continues des variables* t, x, y *pour* $t \geqslant t_0 > 0$, $|x| < +\infty$, $|y| < +\infty$, et possèdent pour $t \geqslant t_0 > 0$ les propriétés suivantes:

$$(W_1)\quad \text{a)}\ f(t, x, y) \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \text{pour} \begin{array}{l} |x| < +\infty,\ 0 < y < +\infty \\ |x| < +\infty,\ -\infty < y < 0 \end{array}$$

$$f(t, 0, -y) = -f(t, 0, y)$$

$$\text{b)}\ g(t, x, y) \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases} \text{pour} \begin{array}{l} 0 < x < +\infty,\ |y| < +\infty \\ -\infty < x < 0,\ |y| < +\infty \end{array}$$

$$g(t, -x, 0) = -g(t, x, 0)$$

Nous supposons aussi que les dérivés partielles $f_t, f_x, f_y, g_t, g_x, g_y$ sont continues pour $t \geqslant t_0 > 0$, $|x| < +\infty$, $|y| < +\infty$. Alors la condition de l'unicité des intégrales du système (1) est remplie.

Considérons les intégrales

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

du système (1) qui existent pour $t \geqslant t_0 > 0$ et sont *oscillantes* pour $t \geqslant t_0 > 0$ (Comp. les théorèmes III et IV).

Désignons par $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ les zéros consécutifs de la fonction $x(t)$ pour $t \geqslant t_0 > 0$ $(t_0 < t_1 < t_2 < \ldots)$, et par $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ les zéros consécutifs de la fonction $y(t)$ pour $t \geqslant t_0 > 0$.

D'après le théorème I les zéros des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont simples et

$$t_n < \tau_n < t_{n+1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

et de plus on a:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=\tau_n} = f[\tau_n, x(\tau_n), 0] = 0 \qquad\qquad (n=1,2,\ldots).$$
$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=t_n} = g[t_n, 0, y(t_n)] = 0$$

Ainsi donc les extréma de la fonction $x(t)$ sont aux points $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ et de même les extréma de la fonction $y(t)$ sont aux points $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$.

Le système (1) fournit l'équation:

$$f(t,x,y)\frac{dy}{dt} = g(t,x,y)\frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

En intégrant l'équation (2) entre les limites a et b $(t_0 \leqslant a < b)$ on obtient:

$$\int_a^b f[t,\ x(t),\ y(t)]\frac{dy}{dt}\,dt = \int_a^b g[t,\ x(t),\ y(t)]\frac{dx}{dt}\,dt \tag{3}$$

Posons:

$$F(t,\ x,\ y) = \int_0^y f(t,\ x,\ \eta)\,d\eta$$

$$G(t,\ x,\ y) = \int_0^x g(t,\ \xi,\ y)\,d\xi$$

D'après les propriétés (W_1) nous obtenons les propriétés suivantes des fonctions F et G pour $t \geqslant t_0 > 0$:

(W_2) a) $F(t,\ 0,\ y) \geqslant 0$ pour $|y| < +\infty$

b), c) $F_y(t,\ 0,\ y) = f(t,\ 0,\ y) \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$ pour $\begin{matrix} 0 < y < +\infty \\ -\infty < y < 0 \end{matrix}$

d) $F(t,\ 0,\ y) = F(t,\ 0,\ -y)$ pour $|y| < +\infty$

e) si $|y_1| < |y_2|$, alors $F(t,\ 0,\ y_1) < F(t,\ 0,\ y_2)$

(W'_2) a') $G(t,\ x,\ 0) \leqslant 0$ pour $|x| < +\infty$

b'), c') $G_x(t,\ x,\ 0) = g(t,\ x,\ 0) \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$ pour $\begin{matrix} 0 < x < +\infty \\ -\infty < x < 0 \end{matrix}$

d') $G(t,\ x,\ 0) = G(t,\ -x,\ 0)$ pour $|x| < +\infty$

e') si $|x_1| < |x_2|$, alors $G(t,\ x_1,\ 0) > G(t,\ x_2,\ 0)$.

En remplaçant dans les fonctions F et G x par $x(t)$ et y par $y(t)$, où $x(t)$, $y(t)$ est une intégrale du système (1), et en dérivant des fonctions obtenues par rapport à t, nous avons:

$$\frac{dF}{dt}=\int_0^{y(t)}\{f_t[t,x(t),\eta]+f[t,x(t),y(t)]f_x[t,x(t),\eta]\}\,d\eta+f[t,x(t),y(t)]\frac{dy}{dt}$$

(4)

$$\frac{dG}{dt}=\int_0^{x(t)}\{g_t[t,\xi,y(t)]+g[t,x(t),y(t)]g_y[t,\xi,y(t)]\}\,d\xi+g[t,x(t),y(t)]\frac{dx}{dt}$$

D'après (3) et (4) on a:

$$F[b,\ x(b),\ y(b)]-F[a,\ x(a),\ y(a)]-\int_a^b\Phi[t,\ x(t),\ y(t)]\,dt=$$

(5)

$$=G[b,\ x(b),\ y(b)]-G[a,\ x(a),\ y(a)]-\int_a^b\Psi[t,\ x(t),\ y(t)]\,dt$$

où

$$F[a,\ x(a),\ y(a)]=\int_0^{y(a)}f[a,\ x(a),\ \eta]\,d\eta$$

$$F[b,\ x(b),\ y(b)]=\int_0^{y(b)}f[b,\ x(b),\ \eta]\,d\eta$$

$$G[a,\ x(a),\ y(a)=\int_0^{x(a)}g[a,\ \xi,\ y(a)]\,d\xi$$

$$G[b,\ x(b),\ y(b)]=\int_0^{x(b)}g[b,\ \xi,\ y(b)]\,d\xi$$

(6)
$$\left|\begin{aligned}&\Phi(t,\ x,\ y)=\int_0^{y}[f_t(t,\ x,\ \eta)+f(t,\ x,\ y)\,f_x(t,\ x,\ \eta)]\,d\eta\\&\Psi(t,\ x,\ y)=\int_0^{x}[g_t(t,\ \xi,\ y)+g(t,\ x,\ y)\,g_y(t,\ \xi,\ y)]\,d\xi.\end{aligned}\right.$$

Supposons que

$$(7) \qquad \begin{aligned} &f_x(t,\ 0,\ y)=0 \text{ pour } t \geqslant t_0 > 0,\ |y|<\infty \\ &g_y(t,\ x,\ 0)=0 \text{ pour } t \geqslant t_0 > 0,\ |x|<\infty, \end{aligned}$$

on obtient dans les conditions

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\Phi(t,\ 0,\ y)=\int_0^y f_t(t,\ 0,\ \eta)\, d\eta = F_t(t,\ 0,\ y) \\ &\Psi(t,\ x,\ 0)=\int_0^x g_t(t,\ \xi, 0)\, d\xi = G_t(t,\ x,\ 0) \end{aligned}$$

et par suite

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\Phi_y(t,\ 0,\ y)=f_t(t,\ 0,\ y) \\ &\Psi_x(t,\ x,\ 0)=g_t(t,\ x,\ 0) \end{aligned}$$

D'après (W_1, a) et (W_1 b) nous avons respectivement

$$(10) \qquad \begin{aligned} &f_t(t,\ 0,\ -y)=-f_t(t,\ 0,\ y) \\ &g_t(t,\ -x,\ 0)=-g_t(t,\ x,\ 0). \end{aligned}$$

(10) et (9) fournissent les propriétés suivantes des fonctions (8):

Les propriétés de la fonction $\Phi(t,\ 0,\ y)$ pour $t \geqslant t_0 > 0$ sont les suivantes:

(W_3) a) Si $f_t(t,\ 0,\ y) \geqslant 0$ pour $t \geqslant t_0 > 0$, $0 < y < +\infty$

alors:

$$\Phi(t,\ 0,\ y) \geqslant 0 \text{ pour } |y| < +\infty$$

$$\Phi_y(t,\ 0,\ y) \begin{cases} \geqslant 0 & \\ \leqslant 0 & \end{cases} \text{pour} \quad \begin{matrix} 0 < y < +\infty \\ -\infty < y < 0 \end{matrix}$$

$$\text{si } |y_1| < |y_2|, \quad \Phi(t,\ 0,\ y_1) \leqslant \Phi(t,\ 0,\ y_2)$$

b) Si $f_t(t,\ 0,\ y) \leqslant 0$ pour $t \geqslant t_0$, $0 < y < \infty$

alors:

$$\Phi(t,\ 0,\ y) \leqslant 0 \text{ pour } |y| < \infty$$

$$\Phi_y(t,\ 0,\ y)\begin{cases}\leqslant 0 \\ \geqslant 0\end{cases} \text{pour} \quad \begin{matrix} 0<y<\infty \\ -\infty<y<0\end{matrix}$$

$$\text{si } |y_1|<|y_2|,\ \Phi(t,\ 0,\ y_1)\geqslant \Phi(t,\ 0,\ y_2).$$

Les propriétés de la fonction $\Psi(t,\ x,\ 0)$ pour $t\geqslant t_0>0$ sont les suivantes:

(W'_3) a) Si $g_t(t, x, 0)\geqslant 0$ pour $0<x<+\infty$

alors:

$$\Psi(t, x, 0)\geqslant 0 \text{ pour } |x|<+\infty$$

$$\Psi_x(t, x, 0)\begin{cases}\geqslant 0 \\ \leqslant 0\end{cases} \text{pour} \quad \begin{matrix} 0<x<\infty \\ -\infty<x<0\end{matrix}$$

$$\text{si } |x_1|<|x_2|,\ \Psi(t, x_1, 0)\leqslant \Psi(t, x_2, 0)\,.$$

b) Si $g_t(t, x, 0)\leqslant 0$ pour $0<x<+\infty$

alors:

$$\Psi(t, x, 0)\leqslant 0 \text{ pour } |x|<\infty$$

$$\Psi_x(t, x, 0)\begin{cases}\leqslant 0 \\ \geqslant 0\end{cases} \text{pour} \quad \begin{matrix} 0<x<\infty \\ -\infty<x<0\end{matrix}$$

$$\text{si } |x_1|<|x_2|,\ \Psi(t, x_1, 0]\geqslant \Psi\, t, x_2, 0)\,.$$

Il résulte de (8) que si $f_t(t, 0, y)\equiv 0$ pour $t\geqslant t_0>0$, $|y|<\infty$ alors $\Phi(t, 0, y)\equiv 0$ pour $t\geqslant t_0>0$ et $|y|<+\infty$; si $g_t(t, x, 0)\equiv 0$ pour $t\geqslant t_0>0$, $|x|<+\infty$ alors $\Psi(t,\ x,\ 0)\equiv 0$ pour $t\geqslant t_0>0$, $|x|<+\infty$.

I. Posons dans l'équation (5) $a=t_n$, $b=t_{n+1}$, on a donc $x(t_n)=$ $=x(t_{n+1})=0$ et par suite:

$$G[t_n, 0, y(t_n)]=0,\ G[t_{n+1}, 0, y(t_{n+1})]=0.$$

On peut donc écrire l'équation (5) sous la forme:

$$F[t_{n+1}, 0, y(t_{n+1})]-F[t_n, 0, y(t_n)]=$$

$$= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{\Phi[t, x(t), y(t)]-\Psi[t, x(t), y(t)]\}\,dt\,. \tag{11}$$

Ajoutons au premier et au second membres de l'équation (11) la quantité $F[t_n, 0, y(t_{n+1})]$. On pourra écrire l'équation (11) sous la forme:

$$F[t_n, 0, y(t_{n+1})]-F[t_n, 0, y(t_n)]=$$

$$(12)\qquad = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{\Phi[t, x(t), y(t)] - \Psi[t, x(t), y(t)]\} \, dt -$$
$$- \{ F[t_{n+1}, 0, y(t_{n+1})] - F[t_n, 0, y(t_{n+1})] \ .$$

D'autre part d'après la définition de la fonction F on a

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \int_0^y f_t(t, x, \eta) \, d\eta$$

et d'après (8) on obtient pour $x = 0$:

$$(13)\qquad F_t(t, 0, y) = \Phi(t, 0, y) = \int_0^y f_t(t, 0, \eta) \, d\eta \ .$$

Alors nons obtenons

$$(14)\qquad F[t_{n+1}, 0, y(t_{n+1})] - F[t_n, 0, y(t_{n+1})] = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi[t, 0, y(t_{n+1})] \, dt$$

En substituant (14) dans (12) nous obtenons:

$$F[t_n, 0, y(t_{n+1})] - F[t_n, 0, y(t_n)] =$$
$$(15)\qquad = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{\Phi[t, x(t), y(t)] - \Phi[t, 0, y(t_{n+1})]\} \, dt -$$
$$- \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Psi[t, x(t), y(t)] \, dt \ .$$

L'équation (15) est impossible, si l'on a:

$$\alpha)\ |y(t_n)| < |y(t_{n+1})|, \quad \beta)\ \Psi[t, x(t), y(t)] \geqslant 0 \ ,$$
$$\gamma)\ \Phi[t, x(t), y(t)] - \Phi[t, 0, y(t_{n+1})] \leqslant 0$$

dans l'intervalle $t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1}$.

En effet, d'après la propriété (W_2, e) et d'après α) on a:

$$F[t_n, 0, y(t_{n+1})] - F[t_n, 0, y(t_n)] > 0$$

tandis que selon β) et γ) le second membre de l'équation (15) serait non-positif.

Nous avons l'égalité:

$$\Phi[t, x(t), y(t)] - \Phi[t, 0, y(t_{n+1})] =$$
$$= \{\Phi[t, x(t), y(t)] - \Phi[t, 0, y(t)]\} + \{\Phi[t, 0, y(t)] - \Phi[t, 0. y(t_{n+1})]\}.$$

Nous pouvons donc remplacer la condition γ par des conditions suivantes:

$$\text{(16)} \qquad \begin{aligned} &\text{a)}\ \Phi[t, x(t), y(t)] - \Phi[t, 0, y(t)] \leqslant 0 \\ &\text{b)}\ \Phi[t, 0, y(t)] - \Phi[t, 0, y(t_{n+1})] \leqslant 0 \,. \end{aligned} \qquad \text{pour } t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1}$$

Nous supposons que la condition (16, a) est remplie. D'après (W_3, a) la condition (16, b) est remplie si $f_t(t, 0, y) \geqslant 0$ pour $t \geqslant t_0 > 0$, $0 < y < +\infty$.

En résumé nous pouvons énoncer la proposition suivante:

Théorème V (a).

Si pour $t \geqslant t_0 > 0$ sont remplies les conditions suivantes:

1) *Les fonctions f et g possèdent les proprietés* (W_1)

2) $f_t(t, 0, y) \geqslant 0$ pour $0 < y < +\infty$

3) $f_x(t, 0, y) \equiv 0$ pour $-\infty < y < +\infty$

4) $\int\limits_0^y [f_t(t, x, \eta) + f(t, x, y) f_x(t, x, \eta)]\, d\eta \leqslant \int\limits_0^y f_t(t, 0, \eta)\, d\eta$

5) $\int\limits_0^x g_t(t, \xi, y) + g(t, x, y) g_y(t, \xi, y)]\, d\xi \geqslant 0$

pour $-\infty < x, y < +\infty$[8])

6) *l'intégrale $x(t)$, $y(t)$ du système* (1) *est oscillante,*

alors on a:

$$|y(t_n)| \geqslant |y(t_{n+1})| \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

la fonction $y(t)$ est donc bornée lorsque $t \to +\infty$.

---

[8]) Un exemple, donné par M. Biernacki, d'une fonction $f(t,x,y)$ qui remplit les conditions 1) — 4) du théorème V (a), est le suivant:

$$f(t, x, y) \equiv t y e^{-x^2 y} \text{ pour } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$$
$$f(t, x, y) \equiv t y \text{ pour } x \cdot y \leqslant 0 \text{ et } x \leqslant 0,\ y \leqslant 0\,.$$

II. On peut maintenant remplacer l'équation (11) par la suivante:

$$F[t_{n+1}, 0, y(t_{n+1})] - F[t_{n+1}, 0, y(t_n)] =$$

$$(17) \qquad = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{ \Phi[t, x(t), y(t)[- \Psi[t, x(t), y(t)]\} \, dt -$$

$$- \{F[t_{n+1}, 0, y(t_n)] - F[t_n, 0, y(t_n)]\} .$$

D'après (13) on a:

$$F[t_{n+1}, 0, y(t_n)] - F[t_n, 0, y(t_n)] = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi[t, 0, y(t_n)] \, dt .$$

On peut alors écrire l'équation (17) sous la forme:

$$F[t_{n+1}, 0, y(t_{n+1})] - F[t_{n+1}, 0, y(t_n)] =$$

$$(18) \qquad = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{ \Phi[t, x(t), y(t)] - \Phi[t, 0, y(t_n)]\} - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Psi[t, x(t), y(t)] \, dt$$

Si

$$|y(t_{n+1})| < |y(t_n)|$$

on a d'après (W_2, e):

$$F[t_{n+1}, 0, y(t_{n+1})] < F[t_{n+1}, 0, y(t_n)]$$

et le premier membre de l'équation (18) est négatif.

Si

$$\Phi[t, x(t), y(t)] - \Phi[t, 0, y(t_n)] \geqslant 0$$

$$\Psi[t, x(t), y(t)] \leqslant 0$$

dans l'intervalle $t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1}$ le second membre de l'équation (18) est non-négatif. L'équation (18) est donc impossible.

Nous avons l'égalité:

$$\Phi[t, x(t), y(t)] - \Phi[t, 0, y(t_n)] =$$

$$= \{ \Phi[t, x(t), y(t)] - \Phi[t, 0, y(t)]\} +$$

$$+ \{\Phi[t, 0, y(t)] - \Phi[t, 0, y(t_n]\}$$

Supposons maintenant que:

$$(19) \qquad \begin{aligned} &\text{a)} \ \Phi[t, x(t), y(t)] - \Phi[t, 0, y(t)] \geqslant 0 \\ &\text{b)} \ \Phi[t, 0, y(t)] - \Phi[t, 0, y(t_n)] \geqslant 0 \\ &\qquad \text{pour } t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1} . \end{aligned}$$

D'après (W_3, b) l'égalité [19, b) est remplie si $f_t(t,0,y) \leqslant 0$ pour $t \geqslant t_0 > 0$, $0 < y < +\infty$.

En résumé nous obtenons le

Théorème V (b).

Si pour $t \geqslant t_0 > 0$ sont remplies les conditions suivante:

1) *Les fonctions f et g possèdent les propriétés (W_1)*
2) $f_t(t,0,y) \leqslant 0$ *pour* $0 < y < +\infty$
3) $f_x(t,0,y) = 0$ *pour* $-\infty \leqslant y < +\infty$
4) $\int\limits_0^y [f_t(t,x,\eta) + f(t,x,y) f_x(t,x,\eta)]\, d\eta \geqslant \int\limits_0^y f_t(t,0,\eta)\, d\eta$
5) $\int\limits_0^x [g_t(t,\xi,y) + g(t,x,y) g_y(t,\xi,y)]\, d\xi \leqslant 0$
   pour $-\infty < x, y < +\infty$
6) *l'intégrale* $x(t)$, $y(t)$ *du système* (1) *est oscillante, alors on a:*

$$|y(t_n)| \leqslant |y(t_{n+1})| \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

et par suite la fonction $y(t)$ *ne tend pas vers zéro lorsque* $t \to +\infty$.

III. Nous posons maintenant dans (5) $a = \tau_n$, $b = \tau_{n+1}$, on a donc:

$$y(\tau_n) = y(\tau_{n+1}) = 0\,.$$

Alors:

$$F[(\tau_n, x(\tau_n), 0] = 0, \quad F[\tau_{n+1}, x(\tau_{n+1}), 0] = 0\,.$$

L'équation (5) prendra la forme:

$$G[\tau_{n+1}, x(\tau_{n+1}), 0] - G[\tau_n, x(\tau_n), 0] = \tag{20}$$
$$= \int\limits_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \{\Psi[t, x(t), y(t)] - \Phi[t, x(t), y(t)]\}\, dt\,.$$

On peut écrire l'équation (20) sous la forme:

$$G[\tau_n, x(\tau_{n+1}), 0] - G[\tau_n, x(\tau_n), 0] =$$
$$= \int\limits_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \{\Psi[t, x(t), y(t)] - \Phi[t, x(t), y(t)]\}\, dt$$
$$- \{G[\tau_{n+1}, x(\tau_{n+1}), 0] - G[\tau_n, x(\tau_{n+1}), 0]\}\,.$$

D'après (8) on a:

$$G[\tau_{n+1}^{*}, x(\tau_{n+1}), 0] - G[\tau_n, x(\tau_{n+1}), 0] = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \Psi[t, x(\tau_{n+1}), 0]\, dt$$

et par suite:

$$G[\tau_n, x(\tau_{n+1}), 0] - G[\tau_n, x(\tau_n), 0] =$$

$$(21) \qquad = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \{\Psi[t, x(t), y(t)] - \Psi[t, x(\tau_{n+1}), 0]\}\, dt -$$

$$- \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \Phi[t, x(t), y(t)]\, dt\,.$$

Supposons que

$$|x(\tau_{n+1})| > |x(\tau_n)|,$$

alors d'après (W_2', e'):

$$G[\tau_n, x(\tau_{n+1}), 0] - G[\tau_n, x(\tau_n), 0] < 0$$

donc le premier membre de l'équation (21) est négatif.

Si

$$\Psi[t, x(t), y(t)] - \Psi[t, x(\tau_{n+1}), 0] \geqslant 0$$

$$\Phi(t, x(t), y(t)] \leqslant 0$$

dans l'intervalle $\tau_n \leqslant t \leqslant \tau_{n+1}$ le second membre de l'équation (21) est non-négatif et l'équation (21) est impossible.

Nous avons l'égalité:

$$\Psi[t, x(t), y(t)] - \Psi[t, x(\tau_{n-1}), 0] =$$

$$= \{\Psi[t, x(t), y(t)] - \Psi[t, x(t), 0]\} +$$

$$+ \{\Psi[t, x(t), 0] - \Psi[t, x(\tau_{n+1}), 0]\}$$

Supposons maintenant que

$$\Psi[t, x(t), y(t)] - \Psi[t, x(t), 0] \geqslant 0$$

D'après (W_3', b), si $g_t(t, x, o) \leqslant 0$ pour $t \geqslant t_0 > 0$, $0 < x < +\infty$, on a:

$$\Psi[t, x(t), 0] - \Psi[t, x(\tau_{n+1}), 0] \geqslant 0$$

pour $\tau_n \leqslant t \leqslant \tau_{n+1}$.

En résumé nous obtenons le

Théorème V (c).

Si pour $t \geqslant t_0 > 0$ *sont remplies les conditiones suivantes:*

1) *Les fonctions* f *et* g *possèdent les propriétés* (W_1)

2) $g_t(t, x, 0) \leqslant 0$ pour $0 < x < +\infty$

3) $g_y(t, x, 0) = 0$ pour $-\infty < x < +\infty$

4) $$\int_0^x [g_t(t, \xi, y) + g(t, x, y)\, g_y(t, \xi, y)]\, d\xi \geqslant \int_0^x g_t(t, \xi, 0)\, d\xi$$

5) $$\int_0^y [f_t(t, x, \eta) + f(t, x, y)\, f_x(t, x, \eta)]\, d\eta \leqslant 0$$

pour $-\infty < x,\ y < +\infty$

6) *l'intégrale* $x(t)$, $y(t)$ *du système* (1) *est oscillante, alors on a:*

$$|x(\tau_n)| \geqslant |x(\tau_{n+1})| \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

et par suite la fonction $x(t)$ *est bornée lorsque* $t \to +\infty$.

IV. On peut maintenant écrire l'équation (20) sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} G[\tau_{n+1}, x(\tau_{n+1}), 0] - G[\tau_{n+1}, x(\tau_n), 0] = \\ = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \{\Psi[t, x(t), y(t)] - \Phi[t, x(t), y(t)]\}\, dt - \\ - \{G[\tau_{n+1}, x(\tau_n), 0] - G[\tau_n, x(\tau_n), 0]\}\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Or, nous avons d'après la définition de la fonction G:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \int_0^x g_t(t, \xi, y)\, d\xi$$

et il résulte de l'hypothèse $g_y(t, x, 0) = 0$ pour $t \geqslant t_0 > 0$, $|x| < \infty$, que l'on a:

$$G_t(t, x, 0) = \Psi(t, x, 0) = \int_0^x g_t(t, \xi, 0)\, d\xi\,.$$

Nous obtenons donc:

$$G[\tau_{n+1}, x(\tau_n), 0] - G[\tau_n, x(\tau_n), 0] = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \Psi[t, x(\tau_n), 0]\, dt. \tag{23}$$

En substituant (23) dans (22) nous avons l'équation:

$$\begin{aligned} G[\tau_{n+1}, x(\tau_{n+1}), 0] - G[\tau_{n+1}, x(\tau_n), 0] = \\ = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \{\Psi[t, x(t), y(t)] - \Psi[t, x(\tau_n), 0]\}\, dt - \\ - \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \Phi[t, x(t), y(t)]\, dt. \end{aligned} \tag{24}$$

Si $|x(\tau_{n+1})| < |x(\tau_n)|$ alors d'après (W'_2, e') on obtient:

$$G[\tau_{n+1}, x(\tau_{n+1}), 0] - G[\tau_{n+1}, x(\tau_n), 0] > 0,$$

le premier membre de l'équation (24) est donc positif.

Supposons que l'on ait:

$$\begin{aligned} &\Psi[t, x(t), y(t)] - \Psi[t, x(\tau_n), 0] \leqslant 0 \\ &\Phi[t, x(t), y(t)] \geqslant 0 \qquad \text{pour } \tau_n \leqslant t \leqslant \tau_{n+1}. \end{aligned}$$

Dans ce cas l'équation (24) conduit a une contradiction. Nous avons l'égalité:

$$\begin{aligned} &\Psi[t, x(t), y(t)] - \Psi[t, x(\tau_n), 0] = \\ &= \{\Psi[t, x(t), y(t)] - \Psi[t, x(t), 0]\} + \\ &+ \{\Psi[t, x(t), 0] - \Psi[t, x(\tau_n), 0]\}. \end{aligned}$$

Supposons que

$$\Psi(t, x, y) - \Psi(t, x, 0) \leqslant 0.$$

D'après $(W'_3$, a), si $g_t(t, x, 0) \geqslant 0$ pour $t \geqslant t_0 > 0$, $0 < x < +\infty$, on a:

$$\Psi[t, x(t), 0] - \Psi[t, x(\tau_n), 0] < 0$$

pour $\tau_n \leqslant t \leqslant \tau_{n+1}$.

En résumé nous pouvons énoncer le

Théorème V (d).

Si pour $t \geqslant t_0 > 0$ sont remplies les conditiones suivantes:

1) *Les fonctions f et g possèdent les propriétés* (W_1)
2) $g_t(t, x, 0) \geqslant 0$ *pour* $0 < x < +\infty$
3) $g_y(t, x, 0) \equiv 0$ *pour* $-\infty < x < +\infty$

4) $\int\limits_0^x [g_t(t,\xi,y)+g(t,x,y)\,g_y(t,\xi,y)]\,d\xi \geqslant \int\limits_0^x g_t(t,\xi,0)\,d\xi$

5) $\int\limits_0^y [f_t(t,x,\eta)+f(t,x,y)\,f_x(t,x,\eta)]\,d\eta \geqslant 0$

pour $-\infty < x, y < +\infty$

6) *l'intégrale* $x(t)$, $y(t)$ *du système* (1) *est oscillante, alors on a:*

$$|x(\tau_n)| \leqslant |x(\tau_{n+1})| \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

et par suite la fonction $x(t)$ *ne tend pas vers zéro lorsque* $t\to+\infty$.

Considérons en particulier un système des équations différentielles

$$\frac{dx}{dt}=f(t,y)$$
$$(25) \qquad \frac{dy}{dt}=g(t,x)$$

où $f(t,y)$ et $g(t,x)$ sont les fonctions continues ainsi que leurs dérivées partielles du 1e ordre dans le domaine:

$$t\geqslant t_0>0,\ |x|<+\infty,\ |y|<+\infty$$

et possèdent pour $t\geqslant t_0>0$ les propriétés suivantes (comp. (W_1)):

(W_4) a) $f(t,y)>0$ pour $0<y<+\infty$

$f(t,-y)=-f(t,y)$

b) $g(t,x)<0$ pour $0<x<+\infty$

$g(t,-x)=-g(t,x)$.

En appliquant les théorèmes V a, b, c, d au système (25) nous obtenons les propriétés de l'intégrale oscillante $x(t)$, $y(t)$ du système (25):

a) Si les propriétés (W_4) sont remplies et si pour $t\geqslant t_0>0$ on a:

1) $f_t(t,y)\geqslant 0$ pour $0<y<+\infty$

2) $g_t(t,x)\geqslant 0$ „ $0<x<+\infty$,

alors la fonction $x(t)$ ne tend pas vers zéro lorsque $t\to+\infty$ et la fonction $y(t)$ est bornée lorsque $t\to+\infty$;

b) si les propriétés (W_4) sont remplies et si pour $t\geqslant t_0>0$ on a:

1) $f_t(t, y) \leqslant 0$ pour $0 < y < +\infty$
2) $g_t(t, x) \leqslant 0$ „ $0 < x < +\infty$

alors la fonction $x(t)$ est bornée lorsque $t \to +\infty$ et la fonction $y(t)$ ne tend pas vers zéro lorsque $t \to +\infty$.

Streszczenie

Rozważamy układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(t, x, y), \tag{1}$$

gdzie $f(t, x, y)$ i $g(t, x, y)$ są funkcjami ciągłymi zmiennych t, x, y dla $t \geqslant t_0 > 0$, $-\infty < x$, $y < +\infty$.

W pierwszej części tej pracy (§ 1) zajmujemy się rozwiązaniami oscylującymi względnie nieoscylującymi układu równań różniczkowych (1) dla dużych dodatnich wartości zmiennej niezależnej t.

Całka $x(t)$, $y(t)$ układu równań (1) jest *oscylująca* dla $t \geqslant t_0 > 0$, jeżeli każda z funkcji $x(t)$ i $y(t)$ zmienia znaki + i — nieskończenie wiele razy dla $t \geqslant t_0 > 0$; jeżeli przynajmniej jedna z funkcji $x(t)$, $y(t)$ nie spełnia powyższego warunku, to całka $x(t)$, $y(t)$ jest *nieoscylująca*.

Jeżeli założymy, że funkcje f i g są ciągłe dla $t \geqslant t_0 > 0$, $-\infty < x$, $y < +\infty$ i posiadają następujące własności: 1°) $f \neq 0$ dla $|x| < +\infty$, $y \neq 0$; $f = 0$ dla $|x| < +\infty$, $y = 0$; 2°) $g \neq 0$ dla $x \neq 0$, $|y| < +\infty$; $g = 0$ dla $x = 0$, $|y| < +\infty$, przy tym $t \geqslant t_0 > 0$, wtedy całka $x(t)$, $y(t)$ układu równań (1) posiada własności:

α) Jeżeli jedna z funkcji $x(t)$ i $y(t)$ jest tożsamościowo równa zeru w podprzedziale przedziału $\langle t_0, +\infty)$, wtedy całka $x(t)$, $y(t)$ jest tożsamościowo równa zeru w tym podprzedziale;

β) jeżeli jedna z funkcji $x(t)$ i $y(t)$ jest nieoscylująca, wtedy całka $x(t)$, $y(t)$ jest nieoscylująca dla $t \geqslant t_0 > 0$;

γ) jeżeli jedna z funkcji $x(t)$ i $y(t)$ jest oscylująca, wtedy całka $x(t)$, $y(t)$ jest oscylująca dla $t \to +\infty$, ponadto miejsca zerowe funkcji $x(t)$ i $y(t)$ następują naprzemian, są pojedyńcze i nie tworzą punktów skupienia.

Wykazujemy dalej, że warunki *wystarczające* na to, aby układ równań (1) nie posiadał całek oscylujących, są następujące:

1) $f \begin{cases} > 0 & \text{dla } y > 0 \\ < 0 & \phantom{\text{dla }} y < 0 \end{cases}$ $t \geqslant t_0 > 0$, $|x| < +\infty$ 2) $g \begin{cases} > 0 & \text{dla } x > 0 \\ < 0 & \phantom{\text{dla }} x < 0 \end{cases}$ $t \geqslant t_0 > 0$, $|y| < +\infty$.

Jest to rozszerzenie na układ równań (1) wyników, które uzyskałem już dawniej (por. pracę cytowaną pod 2)). Dowód przeprowadziliśmy metodą K n e s e r a przy uwzględnieniu uproszczeń wprowadzonych przez C e s a r i.

Następnie podajemy dwa twierdzenia (III i IV), w których są podane warunki wystarczające oscylacyjności całek układu równań (1). Pierwszy zespół tych warunków (tw. III), podany w mniej ogólnej postaci, brzmi:

1) $f \begin{cases} >0 \\ <0 \end{cases}$ dla $\begin{matrix} y>0 \\ y<0 \end{matrix}$ $\quad t \geqslant t_0 > 0,\ |x| < +\infty$

2) $g \begin{cases} >0 \\ <0 \end{cases}$ dla $\begin{matrix} x<0 \\ x>0 \end{matrix}$ $\quad t \geqslant t_0 > 0,\ |y| < +\infty$

3) $f_x \leqslant 0,\ f_y \geqslant 0$ dla $t \geqslant t_0 > 0,\ x \cdot y < 0$

4) $g_x \leqslant 0,\ g_y \leqslant 0$ „ „ $x \cdot y > 0$

5) $$\left.\begin{matrix} \int\limits^{+\infty} f(t,0,c)\,dt = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \text{dla } \begin{matrix} c>0 \\ c<0 \end{matrix} \\ \int\limits^{+\infty} g(t,c_1,0)\,dt = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \text{dla } \begin{matrix} c_1<0 \\ c_1>0 \end{matrix} \end{matrix}\right\} \quad (c, c_1 = \text{Const.})$$

Warunki 5) są typu F i t e'a.

Drugi zespół warunków oscylacyjności (tw. IV) jest następujący: Poprzednie warunki 1) i 2) są spełnione, a dalsze trzy są postaci dla $t \geqslant t_0 > 0$:

3) $f_t + f_x f + f_y g \begin{cases} \geqslant 0 \\ \leqslant 0 \end{cases}$ dla $\begin{matrix} x<0,\ y>0 \\ x>0,\ y<0 \end{matrix}$

4) $g_t + g_x f + g_y g \begin{cases} \geqslant 0 \\ \leqslant 0 \end{cases}$ dla $\begin{matrix} x<0,\ y<0 \\ x>0,\ y>0 \end{matrix}$

5) $x(t_0) \neq 0,\ y_0(t_0) = 0$ lub $x(t_0) = 0,\ y(t_0) \neq 0.$

Rezultat analogiczny dla równania różniczkowego drugiego rzędu $x''(t) + \varphi(t) f(x) = 0$ otrzymał M i l n e.

W dalszym ciągu (§ 2) zajmujemy się ekstremami całek oscylujących układu równań (1). Mianowicie ustalamy warunki wystarczające na to, aby ekstrema funkcji $x(t)$ były rosnące (malejące). To samo dotyczy funkcji $y(t)$. Te warunki są podane w twierdzeniach V a, V b, V c i V d.

W szczególności dla całki oscylującej $x(t)$, $y(t)$ układu równań

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(t,x) \end{aligned} \tag{25}$$

otrzymujemy rezultat następujący: Funkcje f, g oraz pochodne cząstkowe 1-go rzędu f_t, g_t są ciągłe w obszarze $t \geqslant t_0 > 0$, $-\infty < x$, $y < +\infty$, posiadają własności (W_4) dla $t \geqslant t_0 > 0$:

$$(W_4) \quad \begin{aligned} &\text{a)} \quad f > 0 \text{ dla } y > 0, \ f(t,-y) = -f(t,y) \\ &\text{b)} \quad g < 0 \text{ dla } x > 0, \ g(t,-x) = -g(t,x). \end{aligned}$$

Jeżeli własność (W_4) jest spełniona i ponadto:

α) jeżeli $f_t \geqslant 0$ dla $y > 0$, $g_t \geqslant 0$ dla $x > 0$; $t \geqslant t_0 > 0$, wtedy funkcja $x(t)$ nie dąży do zera, a funkcja $y(t)$ jest ograniczona gdy $t \to +\infty$;

β) jeżeli $f_t \leqslant 0$ dla $y > 0$, $g_t \leqslant 0$ dla $x > 0$; $t \geqslant t_0 > 0$, wtedy funkcja $x(t)$ jest ograniczona, a funkcja $y(t)$ nie dąży do zera gdy $t \to +\infty$.

Rezultaty otrzymane w § 2 są rozszerzeniem na układ równań (1) wyników, dotyczących ekstremów całki $x(t)$ oraz jej pierwszej pochodnej $x'(t)$ równania różniczkowego $x'' + A(t)x = 0$, które otrzymał M. Biernacki w swej podstawowej pracy na ten temat. W dowodach twierdzeń Va, Vb, Vc, Vd zastosowaliśmy również metodę, którą posługiwał się M. Biernacki w cytowanej pracy.