

Z Seminarium Matematycznego I Wydziału Matem.-Przyr. U.M.C.S.
Kierownik: Prof. dr Mieczysław Biernacki

Zygmunt CHARZYŃSKI i Witold JANOWSKI

**Sur l'équation générale des fonctions extrémales dans la
famille des fonctions univalentes bornées.**

**O ogólnym równaniu funkcji ekstremalnych w rodzinie funkcji różnowartościowych
ograniczonych.**

Termes et notations employées dans cet ouvrage:

1. (1) $K(0,1)$

— cercle, dont le centre est à l'origine et dont le rayon est égal à l'unité.

(2) $K^*(0,1)$

— circonférence du cercle (1).

2. Nous allons considérer les fonctions méromorphes dans le cercle (1); nous les appellerons pour abréger aussi des points.

Nous allons appeler la famille

(3) $\mathfrak{G}$

de ces fonctions famille linéaire, si pour chaque couple de points g_1 et g_2 appartenant à la famille (3), la somme $g_1 + g_2$ y appartient, et si pour chaque point g de $\mathfrak{G}$ et pour un nombre complexe arbitraire λ le produit λg appartient aussi à la famille (3).

3. La convergence d'une suite de fonctions

(4) $\{g_i\}$

de $\mathfrak{G}$ vers une certaine fonction

(5) g

méromorphe dans le cercle (1)

$$(6) \quad g_i \longrightarrow g$$

signifie, que pour chaque ensemble fermé des points du cercle (1)

$$(7) \quad F,$$

ne renfermant pas de pôles de la fonction (5), toutes les fonctions de la suite (4), sauf au plus un nombre fini de celles-ci, n'admettent pas de pôles dans l'ensemble (7) et y convergent vers la fonction (5).

4. Nous appelons une fonctionnelle

$$(8) \quad S(g)$$

définie dans une famille linéaire du type (3):

- a) réelle (resp. complexe), si pour chaque fonction g de $\mathfrak{G}$ elle prend les valeurs réelles (resp. complexes)
- b) continue, si pour chaque point g et pour chaque suite (4) la relation (6) entraîne

$$S(g_i) \longrightarrow S(g)$$

- c) additive, si pour chaque couple de points g_1 et g_2 , y appartenant

$$S(g_1 + g_2) = S(g_1) + S(g_2)$$

- d) homogène, si pour un nombre arbitraire λ réel ou complexe, selon que la fonctionnelle (8) est réelle ou complexe

$$S(\lambda g) = \lambda S(g)$$

- e) linéaire, si elle est continue, additive et homogène.

5. Pour chaque fonction

$$(9) \quad g = g(z)$$

de la famille (3) la fonction définie par la formule

$$(10) \quad \hat{g} = g(\hat{z}) = \overline{g(\bar{z})}$$

pour les valeurs de z , pour lesquelles les valeurs conjuguées $\bar{z}$ sont différentes des pôles de la fonction (9), est appelée conjuguée avec la fonction (9).

6. Nous appelons conjuguée avec la famille (3) la famille de toutes les fonctions de la forme (10) et nous la désignons par

$$(11) \quad \hat{\mathfrak{G}}$$

7. La fonctionnelle

$$\hat{S}(g) = \overline{S(\hat{g})}$$

définie dans $\mathfrak{G}$ est appelée conjuguée avec la fonctionnelle (8).

8. Si la fonctionnelle (8) est réelle, la fonctionnelle linéaire complexe, définie dans $\mathfrak{G}$ de la forme

$$D(g) = S(g) - iS(gi)$$

est dite correspondante à la fonctionnelle (8).

Un simple calcul indique, qu'on a dans $\mathfrak{G}$ l'égalité

$$S(g) = \frac{1}{2} [D(g) + \hat{D}(\hat{g})]$$

9. Dans la suite nous employons les notations suivantes :

$$(12) \quad H$$

désigne la famille de toutes les fonctions

$$(13) \quad h = h(z)$$

holomorphes dans le cercle (1)

$$10. (14) \quad F$$

désigne la famille de toutes les fonctions de la famille (12) de la forme:

$$f = f(z) = a_1 z + \dots \quad \text{où } a_1 > 0$$

univalentes et bornées, c. à d. assujetties à la condition

$$|f(z)| < 1.$$

$$(15) \quad F_T$$

désigne la famille de toutes les fonctions, appartenant à la famille (14), pour lesquelles

$$a_1 \geq T \quad \text{où} \quad 0 < T < 1,$$

famille introduite par M. Z. Charzyński¹⁾.

11. Nous appelons le nombre

$$\|h\|_n = \sup_{|z| \leq 1 - \frac{1}{n}} |h(z)|$$

¹⁾ Z. Charzyński „Sur les fonctions extrémales dans les familles de fonctions univalentes bornées“ (à paraître dans les Annales de la Soc. Pol. de Math. tome 24).

n -ième pseudonorme de chaque fonction (13) appartenant à la famille (12).

Il est aisé de voir que la condition nécessaire et suffisante pour que $h_i \rightarrow h$ (au sens introduit plus haut) est que $\|h_i - h\|_n \rightarrow 0$ pour $i \rightarrow \infty$ et pour chaque n fixe.

12. Nous dirons que la fonctionnelle définie dans F

$$(16) \quad K(f)$$

est différentiable au point

$$(17) \quad f,$$

s'il existe une fonctionnelle linéaire

$$(18) \quad L(h),$$

définie dans H telle, que pour presque chaque n , fixé pour le moment, et pour chaque fonction Δf de F , satisfaisante à la condition $f + \Delta f \in F$, la convergence

$$\Delta f \rightarrow 0$$

entraîne

$$(19) \quad \frac{|K(f + \Delta f) - K(f) - L(\Delta f)|}{\|\Delta f\|_n} \rightarrow 0.$$

La fonctionnelle (18) satisfaisante à la condition (19) sera appelée différentielle de la fonctionnelle (16) au point (17).

13. Pour la fonctionnelle donnée (16), définie et différentiable en chaque point de la famille (14) le symbole

$$(20) \quad F_{TK}^*$$

désigne une famille qui n'est pas, comme il est aisé de le voir, vide, vu la continuité de la fonctionnelle (16) et la compacité de la famille (14), de toutes les fonctions extrémales de la famille (15) par rapport à la fonctionnelle (16), c.-à-d. pour lesquelles la fonctionnelle (16) atteint son maximum en (15)²).

Cette note contient la généralisation, pour le cas plus général des fonctionnelles différentiables de la forme (16), des équations pour les fonctions extrémales, obtenues par Z. Charzyński pour le cas des fonctionnelles qui dépendent d'un nombre fini de coefficients³).

Le résultat essentiel est compris dans le théorème suivant :

²) comparer le renvoi 1.

³) " " 1.

Théorème fondamental.

Etant donné une fonctionnelle

$$(21) \quad K(f)$$

définie et réelle dans la famille F , différentiable en chaque point de la famille F_T , dont la différentielle ne s'annule identiquement dans aucun point de la famille F_T , chaque fonction extrémale

$$(22) \quad w = f^* = f^*(z)$$

appartenant à la famille citée (20) satisfait aux conditions suivantes:

I. Il existe sur la circonférence

$$(23) \quad |z| = 1$$

un arc ouvert

$$(24) \quad C$$

tel que la fonction (22) reste analytique aussi sur cet arc et le transforme en un arc

$$(25) \quad D$$

du cercle

$$(26) \quad |w| = 1$$

II. On a pour chaque point z de C l'équation:

$$(27) \quad \left[z \frac{f^*(z)}{f^*(z)} \right] \mathfrak{M}[f^*(z)] = \mathfrak{N}(z)$$

où

$$(28) \quad \mathfrak{M}(w) \equiv D^* \left[\psi \left(f^*(z), \frac{1}{w} \right) \right] + \hat{D}^* [\psi(f^*(z), w)] - 2\mathfrak{P}$$

$$(29) \quad \mathfrak{N}(z) \equiv D^* \left[\psi \left(f^*(z), \frac{1}{z} \right) \right] + \hat{D}^* [\psi(f^*(z), z)] - 2\mathfrak{P}$$

$$(30) \quad \mathfrak{P} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} + w \right) \frac{1}{L^*(h)} \frac{L^*(h)}{L^*(h)} \quad (33)$$

$$(31) \quad D^*(h) = L^*(h) - \frac{1}{i} L^*(h) \quad (35)$$

$$(32) \quad 0 = \frac{1}{L^*(h)} \frac{D^*(h)}{L^*(h)} \frac{L^*(h)}{L^*(h)} \quad (36)$$

$L^*(h)$ — la différentielle de la fonctionnelle (21) au point f^*

$$\mathfrak{P} = \text{Minim}_{0 \leq y < 2\pi} \frac{1}{2} \left\{ D^* \left[\psi \left(f^*(z), e^{-iy} \right) \right] + \hat{D}^* [\psi(f^*(z), e^{iy})] \right\}.$$

ζ désigne ici la variable apparente de l'opération tandis que z dans (28)—(29) le rôle d'un paramètre.

III. Les fonctions (28) et (29) prennent sur la circonférence (26), respectivement (23), les valeurs réelles non négatives.

IV. Le premier coefficient du développement de toute fonction extrémale (22) est égal à T .

La démonstration du théorème se compose d'un lemme et de quatre parties correspondantes successivement aux points; I, II, III, IV de la thèse.

Considérons une fonction extrémale quelconque (22) de la thèse

Lemme

S'il existe une suite de fonctions de la famille (14)

$$\{e_i\}$$

qui appartiennent presque toutes à (15) et sont de la forme

$$e_i = f^* + l_i v_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

où

$$\{l_i\}$$

est une suite de nombres positifs convergente vers zéro, et

$$\{v_i\} = \{v_i(z)\}$$

est une suite de fonctions de la famille (12), qui tends vers la limite,

$$(31) \quad V = V(z),$$

alors pour la fonction (31) a lieu l'inégalité

$$(32) \quad L^*(V) \leq 0$$

Démonstration.

En vertu de (22) et de la définition de la classe (20), nous avons d'abord pour presque tous les indices i l'inégalité

$$(33) \quad k(e_i) - k(f^*) \leq 0;$$

en outre, vu la différenciabilité de la fonctionnelle (21) au point (22) on a

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|k(f^* + l_i v_i) - k(f^*) - L^*(l_i v_i)|}{\|l_i v_i\|_n} = 0$$

pour presque tous les indices n , d'où

$$(34) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{k(f^* + l_i v_i) - k(f^*)}{l_i} - L^*(v_i) \right|}{\|v_i\|_n} = 0,$$

donc en vertu de (33) et de (34)

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} (-L^*(v_i)) \geq 0,$$

ce que, vu l'égalité

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} L^*(v_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} L^*(v_i) = L^*(V)$$

démontre (32).

A. Les propriétés de la frontière.

En supposant qu'il n'existe aucun arc (24) décrit ci-dessus, construisons, d'une manière analogue à celle employée dans le travail cité⁴⁾, pour chaque point w_0 de la circonférence (26) une suite de points w_k et une suite variationnelle des fonctions de la forme (avec les notations dudit travail):

$$f_k^* = f_k^*(z) = \Omega_k^* [f^*(z)] \quad k = 1, 2, \dots$$

En posant

$$(35) \quad e_k = \frac{f_k^*}{1 + \frac{1}{8} (1-\varepsilon) (1 - |w_k|)^2} \quad (\varepsilon > 0)$$

nous voyons immédiatement, que

$$|e_k| < |f_k^*(z)| < 1 \quad k = 1, 2, \dots$$

et que

$$\frac{e_k - f^*}{(1 - |w_k|)^2} = \frac{1}{8} f^* \frac{1 + f^* \bar{w}_0}{1 - f^* \bar{w}_0} - \frac{1}{8} (1 - \varepsilon) f^*,$$

d'où l'on déduit sans difficulté, que presque tous les membres de la suite (35) appartiennent à la famille F_T .

Il en résulte, que la suite donnée (35) satisfait aux conditions du lemme, si l'on pose

$$l_k = (1 - |w_k|)^2$$

$$v_k = \frac{e_k - f^*}{(1 - |w_k|)^2}$$

et

$$V = \frac{1}{8} \psi(f^*, \bar{w}_0) - \frac{1}{8} f^* (1 - \varepsilon)$$

En appliquant les résultats de ce lemme, nous obtenons l'inégalité

⁴⁾ Comparer le renvoi 1.

$$L^* \left[\frac{1}{8} \psi(f^*, \bar{w}_0) - \frac{1}{8} (1-\varepsilon) f^* \right] \leq 0$$

ou, en passant à la limite avec $\varepsilon \rightarrow 0$, et en divisant par $\frac{1}{8}$, l'inégalité

$$(36) \quad L^* \left[\psi(f^*, \bar{w}_0) - f^* \right] \leq 0.$$

De là, en posant

$$\bar{w}_0 = e^{-ix}, \quad 0 \leq x < 2\pi$$

et en intégrant le membre gauche de l'inégalité (36) entre les limites de 0 à 2π , nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} L^* \left[\psi(f^*, e^{-ix}) - f^* \right] dx &= \int_0^{2\pi} L^* \left[2 \sum_{n=2}^{\infty} f^{*n} e^{-ix(n-1)} \right] dx = \\ &= L^* \left[\sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{2\pi} 2 f^{*n} e^{-ix(n-1)} dx \right] = L^*(\Theta) = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

(Θ désigne la fonction identiquement nulle), d'où il s'ensuit, vu (36) que

$$\begin{aligned} L^* \left[\psi(f^*, e^{-ix}) - f^* \right] &= L^* \left[\sum_{n=2}^{\infty} f^{*n} e^{-ix(n-1)} \right] = \\ &= 2 \sum_{n=2}^{\infty} \cos x (n-1) L^*(f^{*n}) - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \sin x (n-1) L^*(i f^{*n}) = 0 \end{aligned}$$

et par suite

$$L^*(f^{*n}) = 0 \quad \text{et} \quad L^*(i f^{*n}) = 0$$

donc

$$(37) \quad L^*(f^{*n}) = 0$$

pour chaque nombre complexe x .

Ensuite soit une fonction quelconque

$$(38) \quad h = h(z) \in H$$

et une suite de polynômes

$$w_k = \sum_{n=0}^{N_k} a_n^{(k)} z^n$$

convergente presque uniformément vers la fonction

$$h[f^{*-1}(\bar{w})]$$

dans le domaine G de la variable $\bar{w}$, transformé du cercle (1) par la fonction (22).

Il est aisé de voir, que

$$(39) \quad W_k^* = W_k(f^*(z)) \longrightarrow h(f^{*-1}(f^*(z))) = h(z) \text{ pour } |z| < 1$$

donc, en vertu de (37)

$$L^*(W_k^*) = \sum_{n=0}^{N_k} L^*(b_n f^{*n}) = 0$$

c. à d. finalement, vu (39)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L^*(W_k^*) = L^*(h) = 0,$$

ce qui, vu le choix arbitraire d'une fonction (38) est contraire à la supposition que la différentielle (18) ne s'annule identiquement en aucun point de la famille (15).

Ainsi l'existence d'un arc (24) est démontrée.

B. Les équations pour les fonctions extrémales.

Nous contruirons, d'une manière identique à celle du travail cité⁵⁾, 3 suites variationnelles des fonctions

$$f_{jk}^* = f_{jk}^*(\zeta) \quad ^6)$$

Chacune de ces suites, comme il résulte des considérations de l'ouvrage cité ci-dessus, satisfait à la condition du lemme si l'on pose:

$$e_k = f_{jk}^* \quad (j=1,2,3 ; k=1,2,\dots)$$

$$l_k = \tau_k^2$$

$$v_k = \frac{f_{jk}^* - f^*}{\tau_k^2}$$

$$l_k = \tau_k'^2$$

$$v_k = \frac{f_{jk}^* - f^*}{\tau_k'^2}$$

$$V = \mp c_j u_j \quad (j=1,2,3)$$

⁵⁾ Comparer le renvoi 1.

⁶⁾ Au lieu de z , nous employons maintenant la lettre ζ comme variable apparente de l'opération.

où nous adoptons le signe "—" pour $j=1$ et "+" pour $j=2,3$ et où nous posons

$$(40) \quad u_1 = u_1(\zeta) = \psi(\zeta, \bar{\xi}_0) f^{*'}(\zeta) - Q_0^2 (1-\varepsilon)^2 \psi[f^*(\zeta), \bar{\eta}_0] + \\ + [Q_0^2 (1-\varepsilon)^2 - 1 - \varepsilon] \psi[f^*(\zeta), \bar{\nu}]$$

$$(41) \quad u_2 = u_2(\zeta) = \zeta(\zeta, \bar{\xi}_0) f^{*'}(\zeta) - Q_0^2 (1+\varepsilon)^2 \psi[f^*(\zeta), \bar{\eta}_0] + \\ + [Q_0^2 (1+\varepsilon)^2 - 1 + \varepsilon] \psi[f^*(\zeta), \bar{\mu}_0]$$

$$(42) \quad u_3 = u_3(\zeta) = \psi[f^*(\zeta), \bar{\mu}_0'] (1+\varepsilon)^2 - (\zeta, \bar{\xi}) f^{*'}.$$

ε désigne un nombre positif quelconque, suffisamment petit, ν un point quelconque de la circonférence (26), μ_0, μ' — certains point fixes de cette circonférence, $\bar{\xi}_0$ — un point quelconque de l'arc (24), $\eta_0 = f^*(\bar{\xi}_0)$ — un point de l'arc (25).

$$Q_0^2 = |f^{*'}(\bar{\xi}_0)|^2 = \left[\bar{\xi}_0 \frac{f^{*'}(\bar{\xi}_0)}{f^*(\bar{\xi}_0)} \right]^2 > 1, \quad \bar{\xi} — \text{un point quelconque de la}$$

circonférence (23), $c_1 = c_3 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{5}{54}$ ⁷⁾.

Il en résulte, en appliquant le résultat du lemme, que

$$(43) \quad L^*[\mp c_j u_j(\zeta)] \leq 0 \quad (j=1, 2, 3)$$

En passant dans les inégalités (43) à la limite avec $\varepsilon \rightarrow 0$ pour $i=1, 2$ et en posant

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_j = U_j, \quad (j=1, 2)$$

puis en divisant les inégalités respectivement par $-c_1$ et c_2 on a:

$$(44) \quad \frac{L^*(-c_1 U_1)}{-c_1} \geq 0$$

$$(45) \quad \frac{L^*(c_2 U_2)}{c_2} \leq 0$$

En soustrayant (45) de (44) on obtient:

⁷⁾ Comparer le renvoi 1,

$$L^*(U_1) - L^*(U_2) = L^* \{ [\psi(f^*(\zeta), \bar{\nu}) - \psi(f^*(\zeta), \bar{\mu}_0)] (Q_0^2 - 1) \} \geq 0$$

Il en résulte aussitôt, vu le choix arbitraire de ν sur circonférence (26), que

$$(46) \quad L^* \{ \psi[f^*(\zeta), \bar{\mu}_0] \} = \underset{0 \leq y < 2\pi}{\text{Minim}} L^* \{ \psi[f^*(\zeta), e^{-iy}] \},$$

D'autre part, pour $\nu = \mu_0$ on a $U_1 = U_2$, il s'ensuit, en vertu de (44), (45) et après des calculs aisés:

$$(47) \quad L^* \{ Q_0^2 \psi[f^*(\zeta), \bar{\eta}_0] - \psi(\zeta, \bar{\xi}_0) f^{*'}(\varphi) \} - (Q_0^2 - 1) \mathfrak{P} = 0$$

où

$$\mathfrak{P} = \underset{0 \leq y < 2\pi}{\text{Minim}} L^* \{ \psi[f^*(\zeta), e^{-iy}] \},$$

c'est à dire

$$Q_0^2 \{ L^* [\psi(f^*(\zeta), \bar{\eta}_0)] - \mathfrak{P} \} = L^* [\psi(\zeta, \bar{\xi}_0) f^{*'}(\zeta)] - \mathfrak{P}$$

Nous avons maintenant, conformément aux notations (30) pour $|y| = 1$

$$(48) \quad \widehat{\psi[\zeta, \bar{y}] f^{*'}(\zeta)} \equiv \psi(\zeta, y) \widehat{f^{*'}(\zeta)}$$

$$(49) \quad \widehat{\psi[f^*(\zeta), \bar{y}]} \equiv \psi[f^*(\zeta), y]$$

$$\psi(\zeta, \bar{y}) f^{*'}(\zeta) \equiv \psi\left(\zeta, \frac{1}{y}\right) f^{*'}(\zeta)$$

$$\psi[f^*(\zeta), \bar{y}] \equiv \psi\left[f^*(\zeta), \frac{1}{y}\right],$$

ce qui donne

$$(50) \quad L^* [\psi(f^*(\zeta), \bar{y})] = \frac{1}{2} \left\{ D^* [\psi(f^*(\zeta), \bar{y})] + \widehat{D^* [\psi(f^*(\zeta), \bar{y})]} \right\} = \\ = \frac{1}{2} \left\{ D^* \left[\psi\left(\zeta, \frac{1}{y}\right) \right] + \widehat{D^* [\psi(f^*(\zeta), y)]} \right\}$$

$$(51) \quad L^* [\psi(\zeta, \bar{y}) f^{*'}(\zeta)] = \frac{1}{2} \left\{ D^* [\psi(\zeta, \bar{y}) f^{*'}(\zeta)] + \widehat{D^* [\psi(\zeta, \bar{y}) f^{*'}(\zeta)]} \right\} = \\ = \frac{1}{2} \left\{ D^* \left[\psi\left(\zeta, \frac{1}{y}\right) f^{*'}(\zeta) \right] + \widehat{D^* [\psi(\zeta, y) f^{*'}(\zeta)]} \right\}$$

En posant $\xi_0 = z$ et $\eta_0 = f^*(z)$, $Q_0^2 = \left[z \frac{f^{**}(z)}{f^*(z)} \right]^2$ nous pouvons écrire l'équation (47) vu (50) et (51), après des transformations aisées, sous la forme (27).

C. *Les inégalités pour les fonctions $\Re(w)$ et $\Re(z)$ sur les circonférences.*

La première inégalité est directement évidente, vu la définition du nombre $\Re$.

De (43) pour $j=3$, vu (40) — (42) nous obtenons pour $\varepsilon \rightarrow 0$

$$L^* \{ \psi[f^*(\zeta), \mu'_0] \} - L^* \{ \psi(\zeta, \xi) f^{**}(\zeta) \} \leq 0,$$

alors

$$L^* [\psi(\zeta, \xi) f^{**}(\zeta)] \geq L^* [\psi(f^*(\zeta), \mu'_0)] > \Re$$

donc, vu (41) et (29)

$$\Re(\xi) = L^* [\psi(\zeta, \xi) f^{**}(\zeta)] - \Re > 0,$$

d'où il s'ensuit, en changeant la notation de ξ en z , que $\Re(z)$ est non négatif sur la circonférence (23).

D. *Le premier coefficient est égal à T .*

En employant un raisonnement analogue à celui de l'ouvrage cité ci dessus⁸⁾ on peut démontrer directement, que le premier coefficient de la fonction extrémale est égal à T .

Ainsi donc le théorème fondamental a été démontré..

Il en résultent les corollaires suivants, utiles dans leurs applications.

Corollaire. I. Si les propriétés:

1° il existe un domaine

(52)

E

compris dans le cercle $|z| < 1$, dont la frontière contient un arc

$$C_1 \subset C$$

tel, qu'aucun des points de cet arc n'est un point d'accumulation de points essentiels⁹⁾ du complémentaire du domaine (52),

⁸⁾ Comparer le renvoi 1.

⁹⁾ Comparer le renvoi 1.

2° on peut étendre la différentielle (18) à la famille linéaire

$\mathfrak{G}$

de toutes les fonctions méromorphes dans le cercle (1) qui ont des pôles tout au plus aux points du domaine (52), sont vérifiées, alors l'équation (27) a lieu pour chaque $z \in E$.

Démonstration: il suffit de remarquer que d'après les conditions 1° et 2° les expressions qui forment les deux membres de l'équation (27) sont des fonctions holomorphes dans un domaine plus vaste contenant l'arc C_1 et E . Puisque l'équation (27) a lieu d'après le théorème fondamental sur l'arc C , on peut l'étendre au domaine (42), c'est ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire II. — Si les propriétés:

1° Il existe un domaine fixe

(53) E^*

compris dans le cercle (1), dont la frontière contient la circonférence (2), et les points qui sont des points d'accumulation des points essentiels du complémentaire forment sur cette circonférence un ensemble non dense,

2° la différentielle de la fonctionnelle (21), prise au point quelconque de la famille (15) s'étend à la famille linéaire

(54) $\mathfrak{G}^*$

de toutes les fonctions méromorphes dans le cercle (1), qui ont des pôles situés tout au plus aux points du domaine (53), sont vérifiées, alors l'équation (27) a lieu pour chaque $z \in E^*$.

Démonstration:

Il suffit de remarquer que pour la fonction extrémale (22):

a) la frontière du domaine (53) contient, en vertu de la condition 1°, un certain arc

$$C_1 \subset C$$

qui a des propriétés énoncées au point 1° du corollaire I,

b) la différentielle (18) s'étend d'après la condition 2° à la famille (44). En réunissant a, b et le corollaire I nous obtenons l'égalité (27) pour chaque z de l'ensemble (53), c'est ce qu'il fallait démontrer.

Streszczenie.

Niech $f(z)$ oznacza funkcję holomorficzną i jednolistną w kole $|z| < 1$ postaci

$$(1) \quad f = f(z) = a_1 z + \dots \quad (a_1 > 0),$$

dla której

$$(2) \quad |f(z)| < 1.$$

Rozważamy rodzinę F_T wszystkich funkcji postaci (1) spełniających warunek (2), oraz warunek $a_1 \geq T$, gdzie $0 < T < 1$.

Nota niniejsza zawiera uogólnienie równań dla funkcji ekstremalnych uzyskanych przez Z. Charzyńskiego¹⁾ odnośnie własności funkcji ekstremalnych w rodzinie funkcji F_T .

Dowodzimy następującego zasadniczego twierdzenia:
Jeżeli dany jest jakikolwiek funkcjonal

$$(3) \quad K(f)$$

określony, rzeczywisty i różniczkowalny w każdym punkcie opisanej rodziny, o różniczce nie znikającej tożsamościowo w żadnym jej punkcie, wówczas dla każdej funkcji ekstremalnej

$$(4) \quad f^* = f^*(z),$$

t. zn. takiej dla której $K(f)$ osiąga maximum w F_T spełnione są warunki:

I. istnieje na okręgu koła

$$(5) \quad |z| = 1$$

łuk otwarty

C

taki, że funkcja (2) jest analityczna na tym łuku i odwzorowuje go na łuk

D

okręgu

$$|w| = 1.$$

II. zachodzi równanie

$$(7) \quad \left[z \frac{f^{*'}(z)}{f^*(z)} \right]^2 \Re[f^*(z)] = \Re(z) \quad \text{dla } z \in C,$$

gdzie

$$(8) \quad \Re(w) = D^* \left[\psi \left(f^*(\zeta), \frac{1}{w} \right) \right] + \hat{D}^* [\psi(f^*(\zeta), w)] - 2\Re$$

¹⁾ Z. Charzyński: „Sur les fonctions extrémales dans les familles de fonctions univalentes bornées”, (w druku w Annales de la Soc. Pol. de Math. tom 24).

$$(9) \quad \Re(z) \equiv D^* \left[\psi \left(\zeta, \frac{1}{z} \right) f^{**}(\zeta) \right] + \hat{D}^* [\psi(\zeta, z) \hat{f}^{**}(\zeta)] - 2\Re$$

$$\psi(w, \lambda) \equiv w \frac{1+w\lambda}{1-w\lambda}$$

$$D^*(h) = L^*(h) - i L^*(hi)$$

$$\hat{D}^*(\hat{h}) = L^*(h) + i L^*(hi)$$

$L^*(h)$ — różniczka funkcjonału (3) w punkcie f^*

$$\Re = \text{Minim}_{0 \leq y < 2\pi} \frac{1}{2} \left\{ D^* [\psi(f^*(\zeta), e^{-iy})] + \hat{D}^* [\psi(\hat{f}^*(\zeta), e^{iy})] \right\}$$

zaś ζ jest oznaczeniem zmiennej pozornej operacji.

III. funkcje (8) i (9) przyjmują na okręgu koła (6) względnie (5) wartości rzeczywiste nieujemne.

IV. pierwszy współczynnik rozwinięcia funkcji (4) równy jest T . Z twierdzenia tego wpływają następujące wnioski przydatne do zastosowań:

Wniosek I: jeżeli spełnione są założenia:

1° istnieje zawarty w kole $|z| < 1$ obszar

$$(10) \quad E$$

którego brzeg zawiera łuk

$$C_1 \subset C$$

taki, że żaden punkt tego łuku nie jest punktem skupienia właściwych²⁾ punktów uzupełnienia zbioru (10).

2° różniczkę $L(h)$ można rozszerzyć na rodzinę liniową



wszystkich funkcji meromorficznych w kole $|z| < 1$, o biegunach conajwyżej w punktach obszaru (10), wówczas równanie (7) zachodzi dla każdego $z \in E$.

Wniosek II: jeżeli spełnione są założenia

1° istnieje zawarty w kole $|z| < 1$ stały obszar

$$(11) \quad E^*$$

²⁾ Por. Z. Charzyński: „Sur les fonctions extrémales dans les familles de fonctions univalentes bornées”.

którego brzeg zawiera okrąg (5), przy czym punkty będące punktami skupienia właściwych punktów uzupełnienia zbioru E^* tworzą na tym okręgu zbiór nigdzie gęsty,

2° różniczka funkcjonału (3) wzięta w dowolnym punkcie rodziny F_T rozszerza się na rodzinę liniową

$$\mathfrak{G}^*$$

wszystkich funkcji meromorficznych w kole $|z| < 1$, o biegunach co najwyżej w punktach obszaru (11), wówczas równanie (7) zachodzi dla każdego $z \in E^*$.