ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. 1. Nr 1 SECTIO A. 1946

Z Seminarium Matematycznego I Wydziału Przyrodniczego U. M. C. S.
Kierownik: Prof. dr Mieczysław Biernacki

Mieczysław Biernacki

Sur une propriété des suites à termes positifs
(O pewnej własności ciągów o wyrazach dodatnich)

Considérons deux suites à termes positifs: $p_1, p_2 \dots p_n \dots$ *et* $a_1, a_2 \dots a_n \dots$ *supposons que la suite* a_n *est bornée supérieurement et que l'on a*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{a_1 p_n + a_2 p_{n-1} + \dots + a_n p_1} = 0 \tag{1}$$

alors $b_1, b_2 \dots b_n \dots$ *étant une suite à termes positifs quelconque telle que la série* $b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$ *diverge on a:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{b_1 p_n + b_2 p_{n-1} + \dots + b_n p_1} = 0 \tag{2}$$

Démonstration. Il suffit évidemment de considérer le cas où $a_n = 1$ ($n = 1, 2, 3 \dots$). $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n \dots$, étant une suite à termes positifs telle que la série $\beta_1 + \beta_2 + \beta_n + \dots$ diverge et $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \dots$ une suite quelconque, on a généralement:

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n} \geq \underline{\lim}_{n \to \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n}$$

il suffit donc, en posant $P_n = p_1 + p_2 \dots + p_n$ ($n = 1, 2, \dots$), d'établir que la suite

$$\frac{P_n}{b_1 P_n + b_2 P_{n-1} + \dots + b_n P_1}$$

tend vers zéro lorsque $n \to \infty$ ou encore que la suite:

$$b_1 + b_2 \cdot \frac{P_{n-1}}{P_n} + b_3 \cdot \frac{P_{n-2}}{P_n} + \dots + b_n \cdot \frac{P_1}{P_n} \tag{3}$$

augmente indéfiniment dans les mêmes conditions. Or on a d'après (1) (où tous les a_n sont égaux à 1):

$$\frac{p_{n-1}}{p_n} \to 1, \quad \frac{p_{n-2}}{p_n} \to 1 \ldots.$$

donc k étant un entier quelconque l'expression (3) est plus grande que $\frac{1}{2}(b_1+b_2+\ldots+b_k)$ si n est assez grand.

Remarque 1. Si la suite a_n n'est pas bornée l'énoncé peut être en défaut. Voici un exemple de ce cas. Posons $p_1=1$ et $p_n=2^{n-2}$ $(n \geqq 2)$ et puis $a_n=p_n$ pour toute valeur de n. On trouve sans peine:

$$\frac{p_n}{a_1 p_n + \ldots + a_n p_1} < \frac{1}{2\,(n-2)}$$

donc la condition (1) est vérifée. En posant d'autre part $b_n=1$ $(n=1, 2\ldots)$ on trouve que

$$\frac{p_n}{b_1 p_n + \ldots + b_n p_1} = \frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{1}{2}$$

L'égalité (2) n'est donc pas vérifiiée.

Remarque 2. Il n'est pas possible de remplacer dans l'égalité (2) $\overline{\lim}$ par $\lim$.

Considérons en effet le cas où $a_n=1$ pour toute valeur de n et où $p_n=1$ si n n'est pas le carré d'un entier et $p_n=m$ si $n=m^2$, m étant un entier. Posons $b_n=1:n$ $(n=1, 2, 3\ldots.)$. Si n n'est pas le carré d'un entier on a $\frac{a_1 p_n + \ldots + a_n p_1}{p_n} = p_1 + \ldots + p_n \geqq n$ et si $n=m^2$ on a $\frac{a_1 p_n + \ldots + a_n p_1}{p_n} \geqq \frac{n}{m} = m$,

donc la condition (1) est bien vérifiée. Or nous avons d'autre part, en supposant que $n=m^2$:

$$\frac{b\, p_n + \ldots + b_n p_1}{p_n} \leqq \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s} + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m^2+1-k^2}$$

Les termes de la deuxième somme croissent avec k, le dernier terme est m et avant-dernier inférieur à $\frac{1}{2}$, nous avons donc:

$$\frac{b_1 p_n + \ldots + b_n p_1}{p_n} < \frac{\log\, n}{m} + \frac{m+\frac{1}{2}(m-1)}{m} < \frac{2\, \log\, m}{m} + \frac{3}{2}$$

et par suite

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \; \frac{p_n}{b_1 p_n + \ldots + b_n p_1} \geqq \frac{2}{3}$$

ce qui justifie bien la remarque 2.

Streszczenie.

W pracy tej badam ciągi $\{a_n\}$, $\{p_n\}$ i $\{b_n\}$ o wyrazach dodatnich. Zakładam że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony i że szereg $b_1+b_2+\ldots$ jest rozbieżny. W tych warunkach zależność:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{a_1 p_n + a_2 p_{n-1} + \ldots + a_n p_1} = 0$$

pociąga za sobą zależność:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{p_n}{b_1 p_n + b_2 p_{n-1} + \ldots + b_n p_1} = 0$$

przyczym granica tego ostatniego wyrażenia może nie istnieć.