ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE – SKŁODOWSKA
LUBLIN – POLONIA

VOL. LVI, 5 SECTIO A 2002

REINER KÜHNAU

Bemerkung zur quasikonformen Fortsetzung

Abstract. An elementary proof of a theorem of T. Sugawa about quasiconformal extendibility is given.

Bekanntlich ist die Herleitung von hinreichenden Bedingungen für die quasikonforme Fortsetzbarkeit von z. B. im Innern des Einheitskreises schlichten konformen Abbildungen von ganz anderer Natur als die Herleitung von notwendigen Bedingungen. Bei hinreichenden Bedingungen (vgl. Literatur in [3], [5]) wird im allgemeinen eine explizite Konstruktion einer Fortsetzung vorgenommen, wobei die Funktionswerte der Fortsetzung aus denen der ursprünglichen Abbildung im Innern des Einheitskreises gebildet werden. Hier soll an einem Beispiel gezeigt werden, daß auch Konstruktionen möglich sind, bei denen die Fortsetzung aus den Randwerten der ursprünglichen Abbildung gebildet wird. Dies führt unter Umständen zu besseren Ergebnissen, d. h. kleineren Dilatationsschranken für die Fortsetzung.

In [3] wurde in Verschärfung eines Resultates von M. Fait, J. G. Krzyż und J. Zygmunt [1] (vgl. auch [4]) folgender Satz bewiesen.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30C55, 30C62.

Key words and phrases. Quasiconformal mappings in the plane, quasiconformal extension, close–to–convex functions.

Satz. *Erfüllt die analytische Funktion* $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ *für* $|z| < 1$ *die Bedingung*

$$\left| f'(z) - \frac{1+k^2}{1-k^2} \right| \leq \frac{2k}{1-k^2} \qquad (0 < k < 1), \tag{1}$$

dann ist $f(z)$ *schlicht und zu einer schlichten* k*-quasikonformen Abbildung der Vollkugel nach* $|z| \geq 1$ *fortsetzbar mit* $f(\infty) = \infty$*, wobei* $f(z) - z$ *beschränkt ist.*

Der Beweis in [3] stützt sich auf das sogenannte λ-Lemma, wobei beklagt wird, daß damit keine Konstruktion der Fortsetzung gelingt. Dies liefert der folgende elementare Beweis, der zeigt, daß das schwere Geschütz λ-Lemma nicht nötig ist.

Wir können dazu zunächst annehmen, daß $f(z)$ noch für $|z| \leq 1$ analytisch ist, da sonst $f(z)$ zunächst in $|z| \leq r < 1$ betrachtet wird mit anschließendem Grenzübergang $r \to 1$.

Dann machen wir den Ansatz

$$f(z) = \begin{cases} z + \omega(z) & \text{für } |z| \leq 1 \\ z + \omega\left(\frac{z}{|z|}\right) & \text{für } |z| \geq 1, \end{cases} \tag{2}$$

in den in der Tat in der 2. Zeile nur die Randwerte von $f(z)$ eingehen. Es folgt

$$\left| \frac{f_{\bar{z}}}{f_z} \right| = \frac{\left| \omega'\left(\frac{z}{|z|}\right) \cdot \frac{1}{2|z|} \right|}{\left| 1 + \omega'\left(\frac{z}{|z|}\right) \cdot \frac{1}{2|z|} \right|}.$$

Dies ist $\leq k$, wenn $\omega'\left(\frac{z}{|z|}\right) \frac{1}{2|z|}$ im Kreis mit Diametralpunkten $-\frac{k}{1+k}$ und $\frac{k}{1-k}$ liegt. Wegen $|z| \geq 1$ genügt es, wenn dies für $\frac{1}{2}\omega'\left(\frac{z}{|z|}\right)$ gilt. Das ist erfüllt, wenn (1) gilt.

Übrigens folgt aus (1), daß $f(z)$ "close–to–convex" ist, indem man in [2] auf S. 51 in (1) setzt $g(z) \equiv z$. Außerdem ist unmittelbar erkennbar, daß Funktionen (2) die nach Z. Lewandowski äquivalente, von M. Biernacki eingeführte Eigenschaft "linearly accessible" (vgl. z. B. [2], S. 51/52) besitzen.

Literatur

[1] Fait, M., J.G. Krzyż and J. Zygmunt, *Explicit quasiconformal extensions for some classes of univalent functions*, Comment. Math. Helv. **51** (1976), 279–285.

[2] Pommerenke, Chr., *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[3] Sugawa, T., *Holomorphic motions and quasiconformal extensions*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A **53** (1999), 239–252.
[4] Xiao, Jie, *Hadamard convolutions and some sufficient conditions for quasiconformal extensions*, Northeast. Math. J. **5** (1989), 321–329.
[5] Man sehe im Internet das "Zentralblatt" unter "http://www.emis. de/ZMATH/" z. B. mit *Basic index* "quasiconformal extension".

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
D-06099 Halle (Saale), Deutschland

received January 30, 2001